गणित

कक्षा 7 के लिए पाठ्यपुस्तक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न, समाजवादी, पंथ निरपेक्ष, लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को:

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**
प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में** व्यक्ति की गरिमा और
राष्ट्र की एकता और अखंडता
सुनिश्चित करने वाली बंधुता बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

[illegible]

[illegible] NCF-2005 [illegible] NCF-2005 [illegible] spatial transformations [illegible] NCF-2005 [illegible] Patterns [illegible]

[illegible] NCF-2005 [illegible] NCF-2005 [illegible]

[illegible] VI [illegible] NCF-2005 [illegible]

[illegible] VII [illegible]

VI

NCF-2005

open ended

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

IUCCA

C-SEC

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

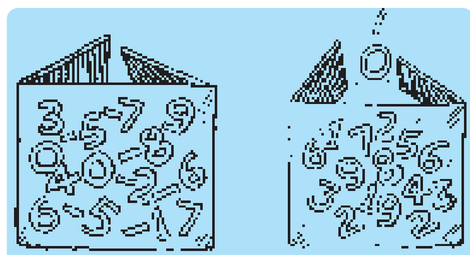
- [illegible]

[redacted]

अध्याय 1

पूर्णांक

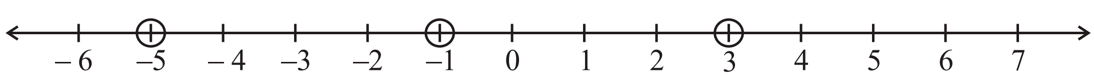
1.1 भूमिका



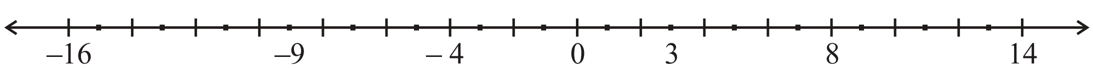
हम कक्षा VI में पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। हम जानते हैं कि पूर्णांक, संख्याओं का एक बड़ा संग्रह होता है, जिसमें पूर्ण संख्याएँ एवं ऋणात्मक संख्याएँ सम्मिलित होती हैं। आपने पूर्णांकों एवं पूर्ण संख्याओं में और क्या अंतर पाया है ? इस अध्याय में, हम पूर्णांकों, उनके गुणों एवं संक्रियाओं के बारे में और अधिक अध्ययन करेंगे। सर्वप्रथम हम पिछली कक्षा में पूर्णांकों से संबंधित किए गए कार्य की समीक्षा करेंगे एवं उसे दोहराएँगे।

1.2 पुनरावलोकन

हम जानते हैं कि पूर्णांकों को संख्या रेखा पर कैसे निरूपित किया जाता है। नीचे दी गई संख्या रेखा पर कुछ पूर्णांकों को अंकित किया गया है :

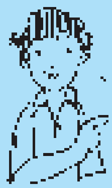


क्या आप इन अंकित पूर्णांकों को आरो6ही क्रम में लिख सकते हैं ? इन संख्याओं का आरोही क्रम – 5, – 1, 3 है।हमने – 5 को सबसे छोटी संख्या के रूप में क्यों चुना ?



निम्नलिखित संख्या रेखा पर पूर्णांकों के साथ कुछ बिंदु अंकित किए गए हैं। इन पूर्णांकों को अवरोही क्रम में लिखिए।

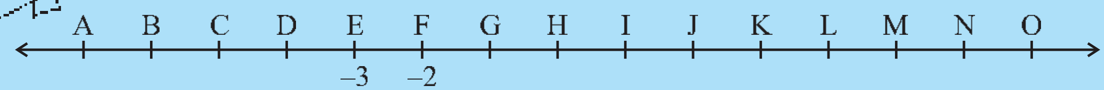
प्रयास कीजिए



इन पूर्णांकों का अवरोही क्रम 14, 8, 3, ... है।

उपर्युक्त संख्या रेखा पर केवल कुछ पूर्णांक लिखे गए हैं। प्रत्येक बिंदु पर उचित संख्या लिखिए।

1. पूर्णांकों को निरूपित करने वाली एक संख्या रेखा नीचे दी हुई है :



–3 एवं –2 को क्रमश: E और F से अंकित किया गया है। B, D, H, J, M एवं O द्वारा कौन से पूर्णांक अंकित किए जाएँगें ?

2. पूर्णांकों 7, –5, 4, 0 एवं – 4 को आरोही क्रम में क्रमबद्ध कीजिए और अपने उत्तर की जाँच करने के लिए इन्हें एक संख्या रेखा पर अंकित कीजिए।

हम अपनी पिछली कक्षा में पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन का अध्ययन कर चुके हैं। निम्नलिखित कथनों को पढ़िए :

किसी संख्या रेखा पर जब हम

(i) एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।

(ii) एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।

(iii) एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।

(iv) एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो दाईं ओर चलते है।

बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत। जो कथन गलत है उनको सही कीजिए।

(i) जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(ii) जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(iii) जब एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हमें हमेशा एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(iv) पूर्णांक 8 का योज्य प्रतिलोम (– 8) है एवं पूर्णांक (– 8) का योज्य प्रतिलोम 8 है।

(v) व्यवकलन के लिए, जिस पूर्णांक को घटाया जाना है उसके योज्य प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ देते हैं।

(vi) $(-10) + 3 = 10 - 3$

(vii) $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

अपने उत्तरों की तुलना निम्नलिखित उत्तरों के साथ कीजिए:

(i) सही है। उदाहरणत:

(a) $56 + 73 = 129$ (b) $113 + 82 = 195$ इत्यादि ।

इस कथन के समर्थन में पाँच और उदाहरण दीजिए।

(ii) गलत, क्योंकि (– 6) + (– 7) = – 13 है, जो कि धनात्मक पूर्णांक नहीं है। सही कथन इस प्रकार है :

जब दो ऋणात्मक पूर्णांक जोड़े जाते हैं, तो हम एक ऋणात्मक पूर्णांक ही प्राप्त करते हैं। : उदाहरणतः

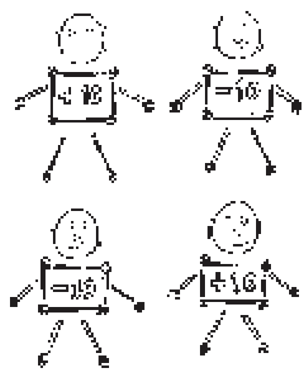
(a) (– 56) + (– 73) = – 129 (b) (– 113) + (– 82) = – 195, इत्यादि

इस कथन को सत्यापित करने के लिए अपनी तरफ़ से पाँच और उदाहरण दीजिए ।

(iii) गलत, क्योंकि – 9 + 16 = 7, यह एक ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है । सही कथन इस प्रकार है: जब एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हम उनका अंतर लेते हैं और बड़े पूर्णांक का चिह्न उस अंतर के पहले रख दिया जाता है। बड़े पूर्णांक का निर्णय दोनों पूर्णांकों के चिह्नों की अवहेलना करते हुए लिया जाता है। उदाहरणतः

(a) (– 56) + (73) = 17 (b) (– 113) + 82 = – 31

(c) 16 + (– 23) = – 7 (d) 125 + (– 101) = 24



इस कथन का सत्यापन करने के लिए पाँच और उदाहरण बनाइए।

(iv) सही! योज्य प्रतिलोम के कुछ और उदाहरण निम्नलिखित हैं :

पूर्णांक	योज्य प्रतिलोम
10	–10
–10	10
76	–76
–76	76

अतः, किसी पूर्णांक a का योज्य प्रतिलोम $-a$ है और $(-a)$ का योज्य प्रतिलोम a है।

(v) सही! व्यवकलन, योग का विपरीत होता है और इसलिए हम घटाए जाने वाले पूर्णांक के योज्य प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ देते हैं। उदाहरणतः,

(a) 56 – 73 = 56 + 73 का योज्य प्रतिलोम = 56 + (–73) = –17

(b) 56 – (–73) = 56 + (–73) का योज्य प्रतिलोम = 56 + 73 = 129

(c) (–79) – 45 = (–79) + (– 45) = –124

(d) (–100) – (–172) = –100 + 172 = 72 इत्यादि ।

इस कथन का सत्यापन करने के लिए ऐसे कम से कम पाँच उदाहरण लिखिए।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि किन्हीं भी दो पूर्णांकों a एवं b के लिए,

$a - b = a + b$ का योज्य प्रतिलोम $= a + (-b)$

और $a - (-b) = a + (-b)$ का योज्य प्रतिलोम $= a + b$

(vi) गलत है। क्योंकि (–10) + 3 = –7 और 10 – 3 = 7,

इसलिए (–10) + 3 ≠ 10 – 3 है ।

(vii) गलत । क्योंकि $8 + (-7) - (-4) = 8 + (-7) + 4 = 1 + 4 = 5$

और $8 + 7 - 4 = 15 - 4 = 11$ है, इसलिए

$8 + (-7) - (-4) = 8 - 7 + 4$ है ।

प्रयास कीजिए

अपनी पिछली कक्षा में हमने संख्याओं के साथ विभिन्न प्रकार के प्रतिरूप (पैटर्न) ज्ञात किए हैं। क्या आप निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए एक पैटर्न ज्ञात कर सकते हैं? यदि हाँ, तो इनको पूरा कीजिए ।

(a) 7, 3, – 1, – 5, ______, ______, ______.

(b) – 2, – 4, – 6, – 8, ______, ______, ______.

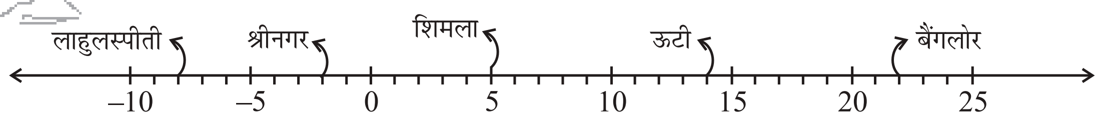
(c) 15, 10, 5, 0, ______, ______, ______.

(d) – 11, – 8, – 5, – 2, ______, ______, ______.

ऐसे कुछ और पैटर्न बनाइए और उन्हें पूरा करने के लिए अपने मित्रों से कहिए।

प्रश्नावली 1.1

1. किसी विशिष्ट दिन विभिन्न स्थानों के तापमानों को डिग्री सेल्सियस (°C) में निम्नलिखित संख्या रेखा द्वारा दर्शाया गया है :

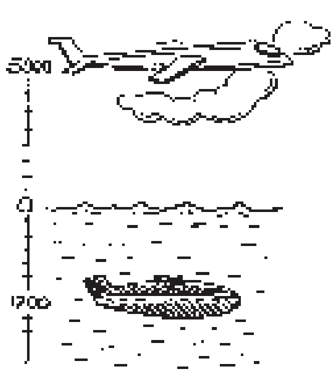


(a) इस संख्या रेखा को देखिए और इस पर अंकित स्थानों के तापमान लिखिए।

(b) उपर्युक्त स्थानों में से सबसे गर्म और सबसे ठंडे स्थानों के तापमानों में क्या अंतर है ?

(c) लाहुलस्पिति एवं श्रीनगर के तापमानों में क्या अंतर है ?

(d) क्या हम कह सकते हैं कि शिमला और श्रीनगर के तापमानों का योग शिमला के तापमान से कम है? क्या इन दोनों स्थानों के तापमानों का योग श्रीनगर के तापमान से भी कम है ?



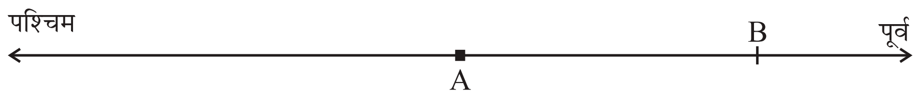
2. किसी प्रश्नोत्तरी में सही उत्तर के लिए धनात्मक अंक दिए जाते हैं और गलत उत्तर के लिए ऋणात्मक अंक दिए जाते हैं। यदि पाँच उत्तरोतर चक्करों (rounds) में जैक द्वारा प्राप्त किए गए अंक 25, – 5, – 10, 15 और 10 थे, तो बताइए अंत में उसके अंकों का कुल योग कितना था।

3. सोमवार को श्रीनगर का तापमान – 5°C था और मंगलवार को तापमान 2°C कम हो गया। मंगलवार को श्रीनगर का तापमान क्या था ? बुधवार को तापमान 4°C बढ़ गया। बुधवार को तापमान कितना था ?

4. एक हवाई जहाज़ समुद्र तल से 5000 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है। एक विशिष्ट बिंदु पर यह हवाई जहाज़ समुद्र तल से 1200 मीटर नीचे तैरती हुई पनडुब्बी के ठीक ऊपर है। पनडुब्बी और हवाई जहाज़ के बीच की ऊर्ध्वाधर दूरी कितनी है?

5. मोहन अपने बैंक खाते में 2000 रुपये जमा करता है और अगले दिन इसमें से 1642 रुपये निकाल लेता है । यदि खाते में से निकाली गई राशि को ऋणात्मक संख्या से निरूपित किया जाता है, तो खाते में जमा की गई राशि को आप कैसे निरूपित करोगे ? निकासी के पश्चात् मोहन के खाते में शेष राशि ज्ञात कीजिए ।

6. रीता बिंदु A से पूर्व की ओर बिंदु B तक 20 किलोमीटर की दूरी तय करती है । उसी सड़क के अनुदिश बिंदु B से वह 30 किलोमीटर की दूरी पश्चिम की ओर तय करती है। यदि पूर्व की ओर तय की गई दूरी को धनात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाता है, तो पश्चिम की ओर तय की गई दूरी को आप कैसे निरूपित करोगे ? बिंदु A से उसकी अंतिम स्थिति को किस पूर्णांक से निरूपित करोगे ?



7. किसी मायावी वर्ग में प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तंभ एवं प्रत्येक विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। बताइए निम्नलिखित में से कौनसा वर्ग एक मायावी वर्ग है ।

5	–1	– 4
–5	–2	7
0	3	–3

(i)

1	–10	0
– 4	–3	–2
– 6	4	–7

(ii)

8. a और b के निम्नलिखित मानों के लिए $a - (-b) = a + b$ का सत्यापन कीजिए :

(i) $a = 21, b = 18$ (ii) $a = 118, b = 125$

(iii) $a = 75, b = 84$ (iv) $a = 28, b = 11$

9. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए, बॉक्स में संकेत >, < अथवा = का उपयोग कीजिए :

(a) $(-8) + (-4)$ $\square$ $(-8) - (-4)$

(b) $(-3) + 7 - (19)$ $\square$ $15 - 8 + (-9)$

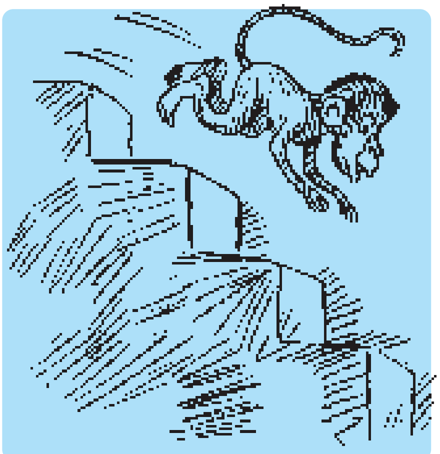
(c) $23 - 41 + 11$ $\square$ $23 - 41 - 11$

(d) $39 + (-24) - (15)$ $\square$ $36 + (-52) - (-36)$

(e) $-231 + 79 + 51$ $\square$ $-399 + 159 + 81$

10. पानी के एक तालाब में अंदर की ओर सीढ़ियाँ हैं । एक बंदर सबसे ऊपर वाली सीढ़ी (यानी पहली सीढ़ी) पर बैठा हुआ है। पानी नौवीं सीढ़ी पर है ।

(i) वह एक छलाँग में तीन सीढ़ियाँ नीचे की ओर और अगली छलाँग में दो सीढ़ियाँ ऊपर की ओर जाता है । कितनी छलाँगों में वह पानी के स्तर तक पहुँच पाएगा।



(ii) पानी पीने के पश्चात् वह वापस जाना चाहता है। इस कार्य के लिए वह एक छलाँग में 4 सीढ़ियाँ ऊपर की ओर और अगली छलाँग में 2 सीढ़ियाँ नीचे की ओर जाता है। कितनी छलाँगों में वह वापस सबसे ऊपर वाली सीढ़ी पर पहुँच जाएगा ?

(iii) यदि नीचे की ओर पार की गई सीढ़ियों की संख्या को ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाता है और ऊपर की ओर पार की गई सीढ़ियों की संख्या को धनात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाता है, तो निम्नलिखित को पूरा करते हुए भाग (i) और (ii) में उसकी गति को निरूपित कीजिए:

(a) $-3 + 2 + \ldots = -8$ (b) $4 - 2 + \ldots = 8$.

(a) में योग (-8) आठ सीढ़ियाँ नीचे जाने को निरूपित करता है, तो (b) में योग 8 किसको निरूपित करेगा ?

1.3 पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन के गुण

1.3.1 योग के अंतर्गत संवृत

हम सीख चुके हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग पुन: एक पूर्ण संख्या ही होती है। उदाहरणत: $17 + 24 = 41$ है, जो कि पुन: एक पूर्ण संख्या है। हम जानते हैं कि यह गुण पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण कहलाता है ।

आइए देखें कि क्या यह गुण पूर्णांकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं। पूर्णांकों के कुछ युग्म नीचे दिए जा रहे हैं। नीचे दी हुई सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए :

कथन	प्रेक्षण
(i) $17 + 23 = 40$	परिणाम एक पूर्णांक है।
(ii) $(-10) + 3 =$ ______	______________
(iii) $(-75) + 18 =$ ______	______________
(iv) $19 + (-25) = -6$	परिणाम एक पूर्णांक है।
(v) $27 + (-27) =$ ______	______________
(vi) $(-20) + 0 =$ ______	______________
(vii) $(-35) + (-10) =$ ______	______________

आप क्या देखते हैं ? क्या दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक प्राप्त करता है ?

क्या आपको पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म मिला जिसका योग पूर्णांक नहीं है ?

क्योंकि पूर्णांक का योग एक पूर्णांक होता है, इसलिए हम कहते हैं कि पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत (closed) होते हैं ?

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्णांक होता है।

1.3.2 व्यवकलन के अंतर्गत संवृत

जब हम एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक में से घटाते हैं, तो क्या होता है ? क्या हम कह सकते हैं कि उनका अंतर भी एक पूर्णांक होता है ?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन	प्रेक्षण
(i) $7 - 9 = -2$	परिणाम एक पूर्णांक है ।
(ii) $17 - (-21) =$ _______	_______________
(iii) $(-8) - (-14) = 6$	परिणाम एक पूर्णांक है ।
(iv) $(-21) - (-10) =$ _______	_______________
(v) $32 - (-17) =$ _______	_______________
(vi) $(-18) - (-18) =$ _______	_______________
(vii) $(-29) - 0 =$ _______	_______________

आप क्या देखते हैं? क्या पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म है जिसका अंतर पूर्णांक नहीं है ? क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं ? *हाँ, हम कह सकते हैं कि पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत होते हैं।*

अतः, *यदि a और b दो पूर्णांक हैं, तो $a - b$ भी एक पूर्णांक होता है।* क्या पूर्ण संख्याएँ भी इस गुण को संतुष्ट करती हैं ?

1.3.3 क्रमविनिमेय गुण

हम जानते हैं कि $3 + 5 = 5 + 3 = 8$ है, अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, पूर्ण संख्याओं के लिए योग क्रमविनिमेय होता है।

क्या इसी कथन को हम पूर्णांकों के लिए भी कह सकते हैं ?

हम पाते हैं कि $5 + (-6) = -1$ और $(-6) + 5 = -1$ है।

इसलिए $5 + (-6) = (-6) + 5$ है।

क्या निम्नलिखित समान हैं ?

(i) $(-8) + (-9)$ और $(-9) + (-8)$

(ii) $(-23) + 32$ और $32 + (-23)$

(iii) $(-45) + 0$ और $0 + (-45)$

पाँच अन्य पूर्णांकों के युग्मों के लिए ऐसा प्रयास कीजिए। क्या आपको पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म मिलता है जिसके लिए पूर्णांकों का क्रम बदल देने से उनका योग भी बदल जाता है। निःसन्देह नहीं। योग पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय होता है ।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a और b, के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + b = b + a$$

- हम जानते हैं कि व्यवकलन पूर्ण संख्याओं के लिए क्रमविनिमेय नहीं है। क्या यह पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय है ?

  पूर्णांक 5 एवं (–3) लीजिए। क्या 5 – (–3) एवं (–3) –5 समान हैं? नहीं, क्योंकि

  $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ है एवं $(-3) - 5 = -3 - 5 = -8$ है।

  पूर्णांकों के कम से कम पाँच विभिन्न युग्म लीजिए और इस कथन की जाँच कीजिए।

हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि *व्यवकलन पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय नहीं है।*

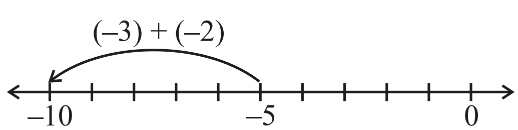
1.3.4 साहचर्य गुण

निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए :

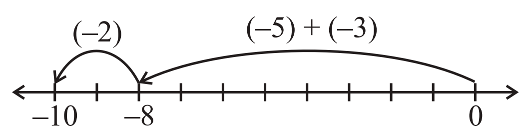
पूर्णांकों –3, –2 एवं –5 को लीजिए।

$(-5) + [(-3) + (-2)]$ और $[(-5) + (-3)] + (-2)$ पर ध्यान दीजिए।

प्रथम योग में (–3) और (–2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरे योग में (–5) एवं (–3) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है। हम इसकी जाँच करेंगे कि क्या हमको विभिन्न परिणाम प्राप्त होते हैं।



$(-5) + [(-3) + (-2)]$



$[(-5) + (-3)] + (-2)$

इन दोनों ही स्थितियों में हमें –10 प्राप्त होता है।

अर्थात्, $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$

इसी प्रकार, –3 , 1 और –7 को लीजिए।

$(-3) + [1 + (-7)] = -3 +$ __________ = __________

$[(-3) + 1] + (-7) = -2 +$ __________ = __________

क्या $(-3) + [1 + (-7)]$ एवं $[(-3) + 1] + (-7)$ समान हैं ?

इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएँगे जिसके लिए इस तरह के योग विभिन्न हैं। यह दर्शाता है कि पूर्णांकों के लिए योग सहचारी (associative) होता है। व्यापक रूप में, पूर्णांकों a, b और c के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.3.5 योज्य तत्समक

जब हम किसी पूर्ण संख्या में शून्य को जोड़ते हैं, तो हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। पूर्ण संख्याओं के लिए शून्य एक योज्य तत्समक (additive identity) है। क्या यह पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है ?

निम्नलिखित को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) $(-8) + 0 = -8$	(ii) $0 + (-8) = -8$
(iii) $(-23) + 0 =$ _____	(iv) $0 + (-37) = -37$
(v) $0 + (-59) =$ _____	(vi) $0 +$ _____ $= -43$
(vii) $-61 +$ _____ $= -61$	(viii) _____ $+ 0 =$ _____

उपर्युक्त उदाहरण दर्शाते हैं कि शून्य, पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है। आप किन्हीं पाँच अन्य पूर्णांकों में शून्य जोड़कर इसे सत्यापित कर सकते हैं।

व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए,

$$a + 0 = a = 0 + a$$

प्रयास कीजिए

1. एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके योग से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

(a) एक ऋणात्मक पूर्णांक
(b) शून्य
(c) दोनों पूर्णांकों से छोटा एक पूर्णांक
(d) दोनों पूर्णांकों में से केवल किसी एक से छोटा पूर्णांक
(e) दोनों पूर्णांकों से बड़ा एक पूर्णांक

2. एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके अंतर से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

(a) एक ऋणात्मक पूर्णांक
(b) शून्य
(c) दोनों पूर्णांकों से छोटा एक पूर्णांक
(d) दोनों पूर्णांकों में से केवल किसी एक से बड़ा पूर्णांक
(e) दोनों पूर्णांकों से बड़ा एक पूर्णांक

उदाहरण 1 ऐसे पूर्णांक युग्म लिखिए जिनका

(a) योग -3 है
(b) अंतर -5 है
(c) अंतर 2 है
(d) योग 0 है

हल

(a) $(-1) + (-2) = -3$ या $(-5) + 2 = -3$
(b) $(-9) - (-4) = -5$ या $(-2) - 3 = -5$
(c) $(-7) - (-9) = 2$ या $1 - (-1) = 2$
(d) $(-10) + 10 = 0$ या $5 + (-5) = 0$

क्या आप इन उदाहरणों में और अधिक युग्म लिख सकते हैं ?

प्रश्नावली 1.2

1. ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका
   (a) योग –7 है (b) अंतर –10 है (c) योग 0 है
2. (a) एक ऐसा ऋणात्मक पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका अंतर 8 है।
   (b) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक लिखिए जिनका योग –5 है।
   (c) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक लिखिए जिनका अंतर –3 है।
3. किसी प्रश्नोत्तरी के तीन उत्तरोतर चक्करों (rounds) में टीम A द्वारा प्राप्त किए गए अंक – 40, 10, 0 थे और टीम B द्वारा प्राप्त किए गए अंक 10, 0, – 40 थे। किस टीम ने अधिक अंक प्राप्त किए? क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है?
4. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
   (i) $(-5) + (-8) = (-8) + (............)$
   (ii) $-53 + ... = -53$
   (iii) $17 + ... = 0$
   (iv) $[13 + (-12)] + (............) = 13 + [(-12) + (-7)]$
   (v) $(-4) + [15 + (-3)] = [-4 + 15] + ...$

1.4 पूर्णांकों का गुणन

हम पूर्णांकों का योग एवं व्यवकलन कर सकते हैं। आईए अब सीखें कि पूर्णांकों को कैसे गुणा किया जाता है।

1.4.1 एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणन

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं का गुणन बार-बार योग है।

प्रयास कीजिए

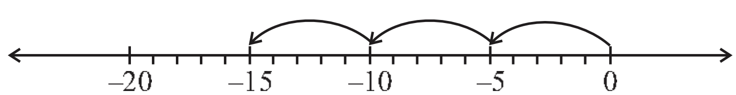
संख्या रेखा का उपयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए:

$4 \times (-8)$,
$8 \times (-2)$,
$3 \times (-7)$,
$10 \times (-1)$

उदाहरणत:, $5 + 5 + 5 = \quad 3 \times 5 = 15$

क्या आप पूर्णांकों के योग को भी इसी प्रकार निरूपित कर सकते हैं?

निम्नलिखित संख्या रेखा से हम पाते हैं कि $(-5) + (-5) + (-5) = -15$ है।

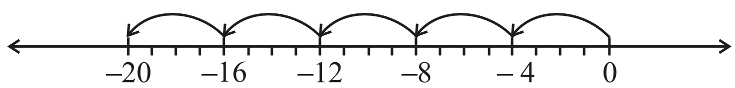


परंतु इसे हम निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं:

$$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5)$$

इसलिए, $3 \times (-5) = -15$

इसी प्रकार, $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 5 \times (-4) = -20$



और $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$ ___________ = ___________

साथ ही, $(-7) + (-7) + (-7) =$ ___________ = ___________

आइए देखें कि संख्या रेखा का उपयोग किए बिना एक धनात्मक पूर्णांक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल कैसे ज्ञात किया जाए।

आइए एक अन्य प्रकार से $3 \times (-5)$ ज्ञात करें। सर्वप्रथम 3×5 ज्ञात कीजिए और प्राप्त गुणनफल से पहले ऋण (–) रखिए। आप –15 प्राप्त करते हैं। अर्थात् –15 प्राप्त करने के लिए हम $-(3 \times 5)$ प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार, $5 \times (-4) = -(5\times4) = -20$ है।

इसी प्रकार, निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

$4 \times (-8) =$ _____ = _____ , $3 \times (-7) =$ _____ = _____

$6 \times (-5) =$ _____ = _____ , $2 \times (-9) =$ _____ = _____

इस विधि का उपयोग करते हुए, हम पाते हैं कि

$10 \times (-43) =$ _____ $-(10 \times 43) = -430$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

अभी तक हमने पूर्णांकों को (धनात्मक पूर्णांक) × (ऋणात्मक पूर्णांक) के रूप में गुणा किया है।

आइए अब इनको (ऋणात्मक पूर्णांक) × (धनात्मक पूर्णांक) के रूप में गुणा करें।

सर्वप्रथम हम -3×5 ज्ञात करते हैं।

यह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित पैटर्न को देखिए:

हम पाते हैं : $3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

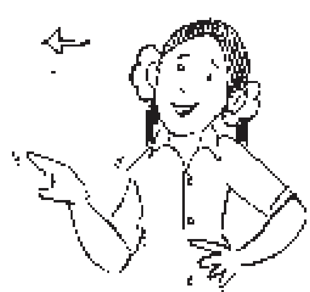
$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

इसलिए, $-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$

$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$

$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$



हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं कि $3 \times (-5) = -15$

अतः, हम पाते हैं कि $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

इस प्रकार के पैटर्नों का उपयोग करते हुए, हम $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$ भी प्राप्त करते हैं।

पैटर्नों का उपयोग करते हुए, $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ और $(-2) \times 9$ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या

$$(-4) \times 8 = 4 \times (-8),\ (-3) \times 7 = 3 \times (-7),\ (-6) \times 5 = 6 \times (-5)$$

और $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$ है?

इसका उपयोग करते हुए, हम $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को गुणा करते समय हम उनको पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं और गुणनफल से पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है ।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए:
   (a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$
   (c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15
2. जाँच कीजिए कि क्या
   (a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ है।
   (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$ है।

   इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लिखिए।

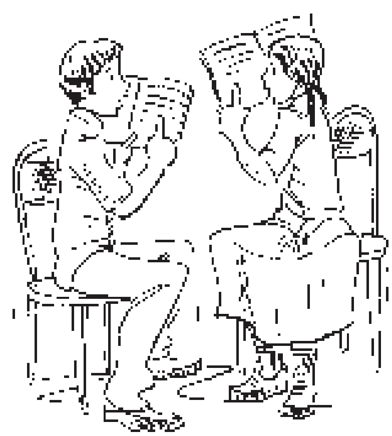
व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए, हम कह सकते हैं कि:

$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

1.4.2 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन

क्या आप गुणनफल $(-3) \times (-2)$ ज्ञात कर सकते हैं ?

निम्नलिखित को देखिए :



$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 \quad = -3 - (-3)$

$-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

क्या आपको कोई पैटर्न दिखाई देता है ? ध्यान दीजिए कि गुणनफल कैसे परिवर्तित हुए हैं ।

इन प्रेक्षणों के आधार पर, निम्नलिखित को पूरा कीजिए :

$-3 \times -3 =$ ______, $-3 \times -4 =$ ______

अब इन गुणनफलों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 \quad = -16 + 4$

$-4 \times 2 =$ ______ $= -12 + 4$

$-4 \times 1 =$ ______

$-4 \times 0 =$ ______

$-4 \times (-1) =$ ______

$-4 \times (-2) =$ ______

$-4 \times (-3) =$ ______

प्रयास कीजिए

(i) $(-5) \times 4$, से शुरू करते हुए, $(-5) \times (-6)$ ज्ञात कीजिए ।

(ii) $(-6) \times 3$ से शुरू करते हुए, $(-6) \times (-7)$ ज्ञात कीजिए ।

इन पैटर्नों से हम देखते हैं कि

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

और $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

इसलिए, $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 =$ ______

$(-4) \times (-3) =$ ______ $=$ ______

अत: इन गुणनफलों को देखते हुए हम कह सकते हैं कि *दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं और गुणनफल से पहले धनात्मक चिह्न (+) रख देते हैं।*

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $(-10) \times (-12) =$ 120 है।

इसी प्रकार, $(-15) \times (-6) = 90$ है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a एवं b के लिए,

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: $(-31) \times (-100)$, $(-25) \times (-72)$, $(-83) \times (-28)$

खेल 1

(i) एक ऐसा बोर्ड लीजिए जिस पर -104 से 104 तक के पूर्णांक अंकित हों, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है ।

(ii) एक थैले में दो नीले पासे और दो लाल पासे लीजिए। नीले पासों पर अंकित बिंदुओं की संख्या धनात्मक पूर्णांकों को दर्शाती हैं और लाल पासों पर अंकित बिंदुओं की संख्या ऋणात्मक पूर्णांकों को दर्शाती हैं।

(iii) प्रत्येक खिलाड़ी अपने काउंटर को शून्य पर रखेगा।

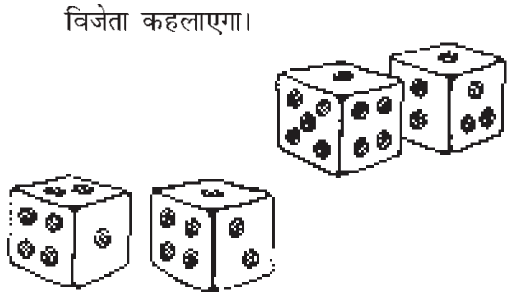
(iv) प्रत्येक खिलाड़ी थैले में से एक साथ दो पासे निकालेगा और उनको फेंकेगा ।

104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
–5	– 4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
– 6	–7	– 8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
– 49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
– 50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	– 60
–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–72	–73	–74	–75	–76	–77	–78	–79	–80	–81	–82
–93	–92	–91	–90	–89	–88	–87	–86	–85	–84	–83
–94	–95	–96	–97	–98	–99	–100	–101	–102	–103	–104

(v) पासों को फेंकने के बाद खिलाड़ी को प्रत्येक बार प्राप्त पासों पर अंकित संख्याओं को गुणा करना है।

(vi) यदि गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है, तो खिलाड़ी अपने काउंटर को 104 की ओर खिसकाएगा और यदि गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, तो वह अपने काउंटर को –104 की ओर खिसकाएगा ।

(vii) जो खिलाड़ी पहले –104 या 104 पर पहुँचता है, विजेता कहलाएगा।



1.4.3 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल

हमने देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा? चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ? आइए निम्नलिखित उदाहरणों को देखते हैं :

(a) $(-4) \times (-3) = 12$

(b) $(-4) \times (-3) \times (-2) = [(-4) \times (-3)] \times (-2) = 12 \times (-2) = -24$

(c) $(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = [(-4) \times (-3) \times (-2)] \times (-1) = (-24) \times (-1)$

(d) $(-5) \times [(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1)] = (-5) \times 24 = -120$

Euler सबसे पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने अपनी पुस्तक Ankitung zur Algebra (1770) में यह सिद्ध करने का प्रयास किया कि $(-1) \times (-1) = 1$ होता है।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

(a) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(b) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

(c) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(d) में पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या है ?

6 ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ?

इसके अतिरिक्त हम यह भी देखते हैं कि उपर्युक्त (a) और (c) में गुणा किए गए पूर्णांकों की संख्या सम है (क्रमश: दो और चार) और (a) एवं (c) में प्राप्त गुणनफल धनात्मक पूर्णांक हैं। (b) एवं (d) में गुणा किए गए ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम है। और (b) एवं (d) में प्राप्त गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक हैं।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि *गुणा किए जाने वाले ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या यदि सम है, तो गुणनफल धनात्मक है और यदि गुणा किए जाने वाले ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम है, तो गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।*

प्रत्येक प्रकार के पाँच और उदाहरण देकर इस कथन की पुष्टि कीजिए।

एक विशेष स्थिति

निम्नलिखित कथनों एवं परिणामी गुणनफलों पर विचार कीजिए :

$(-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि पूर्णांक (-1) को सम संख्या बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल $+1$ है और यदि पूर्णांक (-1) को विषम संख्या बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल -1 है। आप ऊपर दिए कथन में (-1) के युग्म बनाकर इसकी जाँच कर सकते हैं। पूर्णांकों का गुणनफल ज्ञात करने में यह बहुत उपयोगी है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

(i) गुणनफल $(-9) \times (-5) \times (-6) \times (-3)$ धनात्मक है, जबकि गुणनफल $(-9) \times (-5) \times 6 \times (-3)$ ऋणात्मक है। क्यों ?

(ii) गुणनफल का चिह्न क्या होगा, यदि हम निम्नलिखित को एक साथ गुणा करते हैं?

(a) आठ ऋणात्मक पूर्णांक एवं तीन धनात्मक पूर्णांक

(b) पाँच ऋणात्मक पूर्णांक और चार धनात्मक पूर्णांक

(c) (–1) को बारह बार

(d) (–1) को $2m$ बार, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है।

1.5 पूर्णांकों के गुणन के गुण

1.5.1 गुणन के अंतर्गत संवृत

1. निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन	निष्कर्ष
(–20) × (–5) = 100	गुणनफल एक पूर्णांक है
(–15) × 17 = – 255	गुणनफल एक पूर्णांक है
(–30) × 12 = _____	
(–15) × (–23) = _____	
(–14) × (–13) = _____	
12 × (–30) = _____	

आप क्या देखते हैं ? क्या आप एक ऐसा पूर्णांक युग्म ज्ञात कर सकते हैं जिसका गुणनफल एक पूर्णांक नहीं है ? नहीं, इससे हमें यह ज्ञात होता है कि दो पूर्णांकों का गुणनफल पुन: एक पूर्णांक ही होता है। अत: हम कह सकते हैं कि पूर्णांक गुणन के अंतर्गत संवृत होते हैं।

व्यापक रूप में,

सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

पाँच और पूर्णांक युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए।

1.5.2 गुणन की क्रमविनिमेयता

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है। क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी गुणन क्रमविनिमेय है ?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन 1	कथन 2	निष्कर्ष
3 × (– 4) = –12	(– 4) × 3 = –12	3 × (– 4) = (– 4) × 3
(–30) × 12 = _____	12 × (–30) = _____	
(–15) × (–10) = 150	(–10) × (–15) = 150	
(–35) × (–12) = _____	(–12) × (–35) =	
(–17) × 0 = _____		
__________ = _____	(–1) × (–15) =	

आप क्या देखते हैं ? उपर्युक्त उदाहरण संकेत करते हैं कि पूर्णांकों के लिए गुणन क्रमविनिमेय है। इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लिखिए एवं सत्यापन कीजिए।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$$a \times b = b \times a$$

1.5.3 शून्य से गुणन

हम जानते है कि जब किसी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल के रूप में शून्य प्राप्त होता है। ऋणात्मक पूर्णांकों एवं शून्य के निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए। पहले किए गए पैटर्नों के आधार पर हम इन्हें प्राप्त करते हैं।

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$-5 \times 0 =$ ______

$0 \times (-6) =$ ______

यह सारणी दर्शाती है कि एक ऋणात्मक पूर्णांक और शून्य का गुणनफल शून्य होता है। व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.5.4 गुणनात्मक तत्समक

हम जानते है कि पूर्ण संख्याओं के लिए 1 गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity) है।

जाँच कीजिए कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणनात्मक तत्समक है। 1 के साथ पूर्णांकों के निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए :

$(-3) \times 1 = -3$	$1 \times 5 = 5$
$(-4) \times 1 =$ ______	$1 \times 8 =$ ______
$1 \times (-5) =$ ______	$3 \times 1 =$ ______
$1 \times (-6) =$ ______	$7 \times 1 =$ ______

यह दर्शाता है कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणनात्मक तत्समक है।

व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

यदि किसी भी पूर्णांक को –1से गुणा किया जाए, तो क्या होता है ? निम्नलिखित को पूरा कीजिए:

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ ______

$(-1) \times 13 =$ ______

$(-1) \times (-25) =$ ______

$18 \times (-1) =$ ______

आप क्या देखते हैं ?

> पूर्णांकों के लिए शून्य योज्य तत्समक है, जबकि 1 गुणनात्मक तत्समक है। जब किसी पूर्णांक a को (-1) से गुणा किया जाता है, तो हमें उस पूर्णांक का योज्य प्रतिलोम प्राप्त होता है, अर्थात्
>
> $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$ होता है।

क्या हम कह सकते हैं कि –1 पूर्णांकों के लिए गुणनात्मक तत्समक है ? नहीं।

1.5.5 गुणन साहचर्य गुण

–3, –2 और 5 को लीजिए।

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ और $(-3) \times [(-2) \times 5]$ पर विचार कीजिए।

प्रथम स्थिति में, (–3) एवं (–2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरी स्थिति में, (–2) एवं 5 को मिलाकर एक समूह बनाया गया है।

हम पाते हैं कि $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

और $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

इस प्रकार, दोनों ही स्थितियों में हम एक ही उत्तर प्राप्त करते हैं।

अतः, $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

निम्नलिखित पर विचार कीजिए और गुणनफलों को पूरा कीजिए:

$[7 \times (-6)] \times 4 =$ ___________ $\times 4 =$ ___________

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times$ ___________ $=$ ___________

क्या $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times (4)]$ है?

क्या पूर्णांकों के विभिन्न प्रकार के समूहों से गुणनफल प्रभावित होता है?

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b और c मे से प्रत्येक के लिए पाँच मान लीजिए और इस गुण का सत्यापन कीजिए।

अतः पूर्ण संख्याओं की तरह तीन पूर्णांकों का गुणनफल उनके समूह बनाने पर निर्भर नहीं करता है और यह पूर्णांकों के लिए गुणन का साहचर्य गुण कहलाता है।

1.5.6 वितरण गुण

हम जानते हैं कि

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ [योग पर गुणन का वितरण नियम]

आइए जाँच करते हैं क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है? निम्नलिखित को देखिए:

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

और $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

अत :, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

और $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

अत :, $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

और $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

इसलिए, $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है? हाँ

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

a, b और c में से प्रत्येक के लिए कम से कम पाँच विभिन्न मान लीजिए और उपर्युक्त वितरण गुण को सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

(i) क्या $10 \times [(6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) क्या $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

अब निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

क्या हम कह सकते हैं कि $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ है?

आइए इसकी जाँच करें :

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$

$$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$$

इसलिए, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ है।

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$$

$$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$$

अत :, $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

$(-9) \times [10 - (-3)]$ और $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$

के लिए इस कथन की जाँच कीजिए।

आप पाएँगे कि ये भी समान हैं।

व्यापक रूप में किन्हीं भी तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

a, b और c में से प्रत्येक के लिए कम से कम पाँच मान लीजिए और इस गुण को सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

(i) क्या $10 \times (6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$ है?

(ii) क्या $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$ है?

1.5.7 गुणन को आसान बनाना

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

(i) $(-25) \times 37 \times 4$ को हम $[(-25) \times 37] \times 4 = (-925) \times 4 = -3700$ के रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

अथवा हम इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं :

$(-25) \times 37 \times 4 = (-25) \times 4 \times 37 = [(-25) \times 4] \times 37 = (-100) \times 37 = -3700$

कौन-सी विधि आसान है ?

स्पष्ट रूप से दूसरी विधि आसान है, क्योंकि (–25) को 4 से गुणा करने पर –100 प्राप्त होता है, जिसे 37 से गुणा करना आसान है। ध्यान दीजिए दूसरी विधि में पूर्णांकों की क्रमविनिमेयता और सहचारिता सम्मिलित हैं।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि पूर्णांकों की क्रमविनिमेयता, सहचारिता और वितरणता, परिकलन को सरल बनाने में हमारी सहायता करती हैं। आइए इससे आगे और देखें कि इन गुणों का उपयोग करते हुए कैसे परिकलनों को आसान बनाया जा सकता है।

(ii) 16×12 ज्ञात कीजिए।

16×12 को $16 \times (10 + 2)$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$16 \times 12 = 16 \times (10 + 2) = 16 \times 10 + 16 \times 2 = 160 + 32 = 192$

(iii) $(-23) \times 48 = (-23) \times [50 - 2] = (-23) \times 50 - (-23) \times 2 = (-1150) - (-46)$
$= -1104$

(iv) $(-35) \times (-98) = (-35) \times [(-100) + 2] = (-35) \times (-100) + (-35) \times 2$
$= 3500 + (-70) = 3430$

(v) $52 \times (-8) + (-52) \times 2$

$(-52) \times 2$ को $52 \times (-2)$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

इसलिए, $52 \times (-8) + (-52) \times 2 = 52 \times (-8) + 52 \times (-2)$
$= 52 \times [(-8) + (-2)] = 52 \times [(-10)] = -520$

प्रयास कीजिए

वितरण गुण का उपयोग करते हुए, $(-49) \times 18$; $(-25) \times (-31)$; $70 \times (-19) + (-1) \times 70$ के मान ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2 निम्नलिखित में से प्रत्येक गुणनफल को ज्ञात कीजिए :

(i) $(-18) \times (-10) \times 9$ (ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6)$

हल

(i) $(-18) \times (-10) \times 9 = [(-18) \times (-10)] \times 9 = 180 \times 9 = 1620$

(ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = -20 \times (-2 \times -5) \times 7 = [-20 \times 10] \times 7 = -1400$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6) = [(-1) \times (-5)] \times [(-4) \times (-6)] = 5 \times 24 = 120$

उदाहरण 3 सत्यापित कीजिए

$(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

हल $(-30) \times [13 + (-3)] = (-30) \times 10 = -300$

$[(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)] = -390 + 90 = -300$

इसलिए, $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

उदाहरण 4 15 प्रश्नों वाले एक कक्षा टेस्ट में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (–2) अंक दिए जाते हैं। (i) गुरुप्रीत सभी प्रश्नों को हल करती है, परंतु उसके उत्तरों में से केवल 9 सही हैं। उसने कुल कितने अंक प्राप्त किए हैं ? (ii) उसके एक मित्र के केवल 5 उत्तर सही हैं। उस मित्र के द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?

हल

(i) एक सही उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= 4$

इसलिए 9 सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक $= 4 \times 9 = 36$

एक गलत उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= -2$

इसलिए 6 $(= 15 - 9)$ गलत उत्तरों के लिए दिए जाने वाले अंक $= (-2) \times 6 = -12$

इसलिए, गुरुप्रीत द्वारा प्राप्त किए गए अंक $= 36 + (-12) = 24$

(ii) एक सही उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= 4$

इस प्रकार, 5 सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक $= 4 \times 5 = 20$

एक गलत उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= (-2)$

अत :, 10 $(=15 - 5)$ गलत उत्तरों के लिए दिए जाने वाले अंक $= (-2) \times 10 = -20$

इसलिए, गुरुप्रीत के मित्र द्वारा प्राप्त किए गए अंक $= 20 + (-20) = 0$

उदाहरण 5 मान लीजिए कि हम पृथ्वी से ऊपर की दूरी को धनात्मक पूर्णांक से निरूपित करते हैं और पृथ्वी से नीचे की दूरी को ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित करते हैं, तो निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

(i) एक उत्थापक (elevator) किसी खान कूपक मे 5 m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। एक घंटे पश्चात् उसकी स्थिति क्या होगी ?

(ii) यदि वह भूमि से 15 m ऊपर से नीचे जाना शुरू करता है, तो 45 मिनट बाद उसकी स्थिति क्या होगी ?

हल

(i) क्योंकि उत्थापक नीचे की ओर जा रहा है, इसलिए इसके द्वारा तय की गई दूरी को ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाएगा।

एक मिनट में उत्थापक की स्थिति में परिवर्तन $= -5$ m

60 मिनट पश्चात् उत्थापक की स्थिति में परिवर्तन $= (-5) \times 60 = -300$ m, अर्थात् भूमि की सतह से 300 m नीचे ।

(ii) 45 m में उत्थापक की स्थिति में परिवर्तन $= (-5) \times 45 = -225$ m

इसलिए, उत्थापक की अंतिम स्थिति $= -225 + 15 = -210$ m, अर्थात् भूमि की सतह से 210 m नीचे ।

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए :

(a) $3 \times (-1)$ (b) $(-1) \times 225$

(c) $(-21) \times (-30)$ (d) $(-316) \times (-1)$

(e) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (f) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(g) $9 \times (-3) \times (-6)$ (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

2. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए :

(a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

(b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

3. (i) किसी भी पूर्णांक a के लिए, $(-1) \times a$ किसके समान है ?

(ii) वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए, जिसका (-1) के साथ गुणनफल है :

(a) -22 (b) 37 (c) 0

4. $(-1) \times 5$ से आरंभ करके विभिन्न गुणनफलों द्वारा कोई पैटर्न दर्शाते हुए $(-1) \times (-1) = 1$ को निरूपित कीजिए ।

5. उचित गुणों का उपयोग करते हुए, गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(a) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (b) $8 \times 53 \times (-125)$

(c) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (d) $(-41) \times 102$

(e) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (f) $7 \times (50 - 2)$

(g) $(-17) \times (-29)$ (h) $(-57) \times (-19) + 57$

6. किसी हिमीकरण (ठंडा) प्रक्रिया में, कमरे के तापमान को 40°C से, 5°C प्रति घंटे की दर से कम करने की आवश्यकता है। इस प्रक्रिया के शुरू होने के 10 घंटे बाद, कमरे का तापमान क्या होगा ?

7. दस प्रश्नों वाले एक कक्षा टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (–2) अंक दिए जाते हैं एवं प्रयत्न नहीं किए गए प्रश्नों के लिए शून्य दिया जाता है।

(i) मोहन चार प्रश्नों का सही और छः प्रश्नों का गलत उत्तर देता है। उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं ?

(ii) रेशमा के पाँच उत्तर सही हैं और पाँच उत्तर गलत है । उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं ?

(iii) हीना ने कुल सात प्रश्न किए हैं उनमें से दो का उत्तर सही है और पाँच का उत्तर गलत है। तो उसे कितने अंक प्राप्त होते हैं ?

8. एक सीमेंट कंपनी को सफ़ेद सीमेंट बेचने पर 8 रुपये प्रति बोरी की दर से लाभ होता है और स्लेटी (Grey) रंग की सीमेंट बेचने पर 5 रुपये प्रति बोरी की दर से हानि होती है।

(a) किसी महीने में वह कंपनी 3000 बोरियाँ सफ़ेद सीमेंट की और 5000 बोरियाँ स्लेटी सीमेंट की बेचती है। उसका लाभ अथवा हानि क्या है ?

(b) यदि बेची गई स्लेटी सीमेंट की बोरियों की संख्या 6400 है, तो कंपनी को स्लेटी सीमेंट की कितनी बोरियाँ बेचनी चाहिए, ताकि उसे न तो लाभ हो और ना ही हानि ?

9. निम्नलिखित को सत्य कथन में परिवर्तित करने के लिए, रिक्त स्थान को एक पूर्णांक से प्रतिस्थापित कीजिए :

(a) $(-3) \times$ _____ $= 27$ (b) $5 \times$ _____ $= -35$

(c) _____ $\times (-8) = -56$ (d) _____ $\times (-12) = 132$

1.6 पूर्णांकों का विभाजन

हम जानते हैं कि विभाजन, गुणा की विपरीत संक्रिया है। आइए पूर्ण संख्याओं के लिए एक उदाहरण देखें:

क्योंकि $3 \times 5 = 15$ है, इसलिए $15 \div 5 = 3$ और $15 \div 3 = 5$ है।

इसी प्रकार, $4 \times 3 = 12$ से $12 \div 4 = 3$ एवं $12 \div 3 = 4$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन या भाग, कथन हैं।

क्या आप पूर्णांकों के लिए गुणन कथन एवं संगत भाग कथनों को लिख सकते हैं ?

- निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए।

गुणन कथन	संगत भाग कथन	
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$,	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$,	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ _____ $=$ _____ ,	$72 \div$ _____ $=$ _____
$(-3) \times (-7) =$ _____	_____ $\div (-3) =$ _____ ,	_____
$(-8) \times 4 =$ _____	_____ ,	_____
$5 \times (-9) =$ _____	_____ ,	_____
$(-10) \times (-5) =$	_____ ,	_____

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि

$(-12) \div 2 = (-6)$ $(-20) \div (5) = (-4)$

$(-32) \div 4 = -8$ $(-45) \div 5 = -9$

हम देखते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल से पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार, हम एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

- हम यह भी देखते हैं कि

$72 \div (-8) = -9$ और $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $50 \div (-5) = -10$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल के सामने ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार, हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है ।

क्या हम कह सकते हैं कि $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$? आइए जाँच करते हैं। हम जानते हैं कि $(-48) \div 8 = -6$ और $48 \div (-8) = -6$। इसलिए $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$।
निम्नलिखित के लिए इसकी जाँच कीजिए
(i) $90 \div (-45)$ और $(-90) \div 45$ (ii) $(-136) \div 4$ और $136 \div (-4)$

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$$a \div (-b) = (-a) \div b, \quad \text{जहाँ } b \neq 0$$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

- अंत में, हम देखते हैं कि

$(-12) \div (-6) = 2; (-20) \div (-4) = 5; (-32) \div (-8) = 4; (-45) \div (-9) = 5$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल से पहले धनात्मक चिह्न (+) रख देते हैं, अर्थात् हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो ऋणात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$$(-a) \div (-b) = a \div b, \quad \text{जहाँ } b \neq 0 \text{ है।}$$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए : (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.7 पूर्णांकों के भाग के गुण

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए :

कथन	निष्कर्ष	कथन	निष्कर्ष
$(-8) \div (-4) = 2$	परिणाम एक पूर्णांक है	$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$	________________
$(-4) \div (-8) = \frac{8}{3}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	________________

आप क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं। अपनी ओर से पाँच और उदाहरण लेते हुए, इस कथन की सत्यता के लिए उचित कारण बताइए।

- हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रमविनिमेय नहीं है। आइए पूर्णांकों के लिए भी इसकी जाँच करें।

आप सारणी से देख सकते हैं कि $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ है।

क्या $(-9) \div 3$ और $3 \div (-9)$ एक समान हैं ?

क्या $(-30) \div (-6)$ और $(-6) \div (-30)$ एक समान हैं ?

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भाग क्रमविनिमेय है ?

नहीं। आप पाँच और पूर्णांक युग्म लेकर इसे सत्यापित कर सकते हैं।

- पूर्ण संख्याओं की तरह, किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग करना अर्थहीन है और शून्येतर पूर्णांक से शून्य को भाग देने पर शून्य प्राप्त होता है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $a \div 0$ परिभाषित नहीं है। परंतु $0 \div a = 0$, $a \neq 0$ के लिए है।

- जब हम किसी पूर्ण संख्या को 1 से भाग देते हैं, तो हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। आइए इसकी जाँच करते हैं कि क्या यह ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी सत्य है।

  निम्नलिखित को देखिए :

$(-8) \div 1 = (-8)$	$(-11) \div 1 = -11$	$(-13) \div 1 = -13$
$(-25) \div 1 =$ ____	$(-37) \div 1 =$ ____	$(-48) \div 1 =$ ____

  यह दर्शाता है कि ऋणात्मक पूर्णांक को 1 से भाग देने पर वही ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। *अतः किसी भी पूर्णांक को 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।* व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए $a \div 1 = a$

- किसी पूर्णांक को (-1) से भाग देने पर क्या होता है ? निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

$(-8) \div (-1) = 8$	$11 \div (-1) = -11$	$13 \div (-1) =$ ____
$(-25) \div (-1) =$ ____	$(-37) \div (-1) =$ ____	$-48 \div (-1) =$ ____

  आप क्या देखते हैं ?

  हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक को (-1) से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

- क्या हम कह सकते हैं कि $[(-16) \div 4] \div (-2)$ एवं $(-16) \div [4 \div (-2)]$ समान हैं ?

  हम जानते हैं कि $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

  और $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

  अतः, $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

  क्या आप कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भाग साहचर्य है नहीं! अपनी ओर से पाँच अन्य उदाहरण लेकर इसे सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

क्या किसी भी पूर्णांक a के लिए

(i) $1 \div a = 1$ है ?

(ii) $a \div (-1) = -a$ है ?

a के विभिन्न मानों के लिए इनकी जाँच कीजिए।

उदाहरण 6 किसी टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए $(+5)$ अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं। (i) राधिका ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और 30 अंक प्राप्त किए, जबकि उसके 10 उत्तर सही पाए गए। (ii) जय ने भी सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और उसने (-12) अंक प्राप्त किए, जबकि उसके चार उत्तर सही पा गए गए। उनमें से प्रत्येक ने कितने प्रश्नों के उत्तर गलत दिए ?

हल

(i) एक सही उत्तर के लिए दिए गए अंक = 5

अतः, 10 सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक = 5 × 10 = 50

राधिका के द्वारा प्राप्त किए गए अंक = 30

गलत उत्तरों के लिए प्राप्तांक = 30 – 50 = – 20

एक गलत उत्तर के लिए दिए गए अंक = (–2)

इसलिए, गलत उत्तरों की संख्या = (–20) ÷ (–2) = 10

(ii) चार सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक = 5 × 4 = 20

जय द्वारा प्राप्त किए गए अंक = –12

गलत उत्तरों के लिए प्राप्तांक = –12 – 20 = – 32

इसलिए, गलत उत्तरों की संख्या = (–32) ÷ (–2) = 16

उदाहरण 7 कोई दुकानदार एक पेन बेचने पर 1 रुपये का लाभ अर्जित करती है और अपने पुराने स्टॉक की पेंसिलों को बेचते हुए 40 पैसे प्रति पेंसिल की हानि उठाती है।

(i) किसी विशिष्ट महीने में उसने 5 रुपये की हानि उठाई।

इस अवधि में उसने 45 पेन बेचे। बताइए इस अवधि में उसने कितनी पेंसिलें बेचीं।

(ii) अगले महीने में उसे न तो लाभ हुआ और न ही हानि हुई। यदि इस महीने में उसने 70 पेन बेचे, तो उसने कितनी पेंसिलें बेचीं ?

हल

(i) एक पेन को बेचने पर अर्जित लाभ = 1 रु

45 पेनों को बेचने पर अर्जित लाभ = 45 रु

जिसे हम + 45 रु से निर्दिष्ट करते हैं।

दी हुई कुल हानि = 5 रु जिसे –5 रु से निर्दिष्ट करते हैं।

अर्जित लाभ + उठाई गई हानि = कुल हानि

इसलिए उठाई गई हानि = कुल हानि – अर्जित लाभ

= (– 5 – 45) रु = (–50) रु = –5000 पैसे

एक पेंसिल को बेचने से उठाई गई हानि = 40 पैसे जिसे हम –40 पैसे के रूप में लिखते हैं।

इसलिए बेची गई पेंसिलों की संख्या = (–5000) ÷ (– 40) = 125 पेंसिल

(ii) अगले महीने में न तो लाभ हुआ और न ही हानि हुई।

इसलिए अर्जित लाभ + उठाई गई हानि = 0

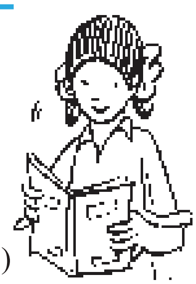
अर्थात् अर्जित लाभ = – उठाई गई हानि

अब, 70 पेनों को बेचने से अर्जित लाभ = 70 रु

इसलिए पेंसिलों को बेचने से उठाई गई हानि = 70 रु, जिसे हम – 70 रु अर्थात् – 7000 पैसे से दर्शाते हैं।

बेची गई पेंसिलों की कुल संख्या = (–7000) ÷ (– 40) = 175 पेंसिलें

प्रश्नावली 1.4



1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :
   (a) $(-30) \div 10$ (b) $50 \div (-5)$ (c) $(-36) \div (-9)$
   (d) $(-49) \div (49)$ (e) $13 \div [(-2) + 1]$ (f) $0 \div (-12)$
   (g) $(-31) \div [(-30) + (-1)]$
   (h) $[(-36) \div 12] \div 3$ (i) $[(-6) + 5)] \div [(-2) + 1]$
2. a, b और c के निम्नलिखित मानों में से प्रत्येक के लिए, $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ को सत्यापित कीजिए
   (a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$
3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :
   (a) $369 \div$ _____ $= 369$ (b) $(-75) \div$ _____ $= -1$
   (c) $(-206) \div$ _____ $= 1$ (d) $-87 \div$ _____ $= 87$
   (e) _____ $\div 1 = -87$ (f) _____ $\div 48 = -1$
   (g) $20 \div$ _____ $= -2$ (h) _____ $\div (4) = -3$
4. पाँच ऐसे पूर्णांक युग्म (a, b) लिखिए, ताकि $a \div b = -3$ हो । ऐसा एक युग्म $(6, -2)$ है, क्योंकि $6 \div (-2) = (-3)$ है।
5. दोपहर 12 बजे तापमान शून्य से $10°C$ ऊपर था । यदि यह आधी रात तक $2°C$ प्रति घंटे की दर से कम होता है, तो किस समय तापमान शून्य से $8°C$ नीचे होगा ? आधी रात को तापमान क्या होगा ?
6. एक कक्षा टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए $(+3)$ अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं और किसी प्रश्न को हल करने का प्रयत्न नहीं करने पर कोई अंक नहीं दिया जाता है। (i) राधिका ने 20 अंक प्राप्त किए। यदि उसके 12 उत्तर सही पाए जाते हैं, तो उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है ? (ii) मोहिनी टेस्ट में (-5) अंक प्राप्त करती है, जबकि उसके 7 उत्तर सही पाए जाते हैं । उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है?
7. एक उत्थापक किसी खान कूपक में 6 m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। यदि नीचे जाना भूमि तल से 10 m ऊपर से शुरू होता है, तो -350 m पहुँचने में कितना समय लगेगा ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. पूर्णांक, संख्याओं का एक विशाल संग्रह है जिसमें पूर्ण संख्याएँ और उनके ऋणात्मक सम्मिलित हैं । इनका परिचय कक्षा VI मे कराया गया था।
2. आपने पिछली कक्षा में पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित करने के बारे में एवं उनके योग और व्यवकलन के बारे में अध्ययन किया है ।
3. अब हमने योग एवं व्यवकलन द्वारा संतुष्ट होने वाले गुणों का अध्ययन किया है ।
   (a) पूर्णांक योग एवं व्यवकलन दोनों के लिए संवृत्त है । अर्थात्, $a + b$ और $a - b$ दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक हैं ।

(b) पूर्णांकों के लिए योग क्रमविनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए, $a + b = b + a$

(c) पूर्णांकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a, b तथा c के लिए $(a + b) + c = a + (b + c)$ होता है।

(d) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, अर्थात किसी भी पूर्णांक a के लिए, $a + 0 = 0 + a = a$ होता है।

4. हमने यह भी अध्ययन किया है कि पूर्णांकों को कैसे गुणा किया जा सकता है और हमने पाया कि एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है। उदाहरणत:, $-2 \times 7 = -14$ और $-3 \times -8 = 24$ है।

5. ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होने पर उनका गुणनफल धनात्मक होता है जबकि यह संख्या विषम होने पर उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है।

6. पूर्णांक गुणन के अंतर्गत कुछ गुणों को दर्शाते हैं।

(a) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक संवृत होते हैं, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

(b) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांको a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ होता है।

(c) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $1 \times a = a \times 1 = a$ होता है।

(d) पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों $a, b,$ तथा c के लिए, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।

7. योग एवं गुणन के अंतर्गत पूर्णांक एक गुण को दर्शाते हैं, जिसे वितरण गुण कहा जाता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।

8. योग एवं गुणन के अंतर्गत क्रमविनिमेयता, सहचारिता और वितरणता के गुण हमारे परिकलन को आसान बनाते हैं।

9. हमने यह भी सीखा है कि पूर्णांकों को कैसे भाग दिया जाता है। हमने पाया कि

(a) जब एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है या जब एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो प्राप्त भागफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

(b) एक ऋणात्मक पूर्णांक को दूसरे ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त भागफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

10. किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि

(a) $a \div 0$ परिभाषित नहीं है।

(b) $a \div 1 = a$ है।

भिन्न एवं दशमलव

अध्याय 2

2.1 भूमिका

आपने पिछली कक्षाओं में भिन्न एवं दशमलव के बारे में अध्ययन किया है। भिन्नों के अध्ययन में हम उचित भिन्न, विषम भिन्न, मिश्रित भिन्न और भिन्नों के योग एवं व्यवकलन के बारे में चर्चा कर चुके हैं। हमने, भिन्नों की तुलना, तुल्य भिन्न, भिन्नों को संख्या रेखा पर निरूपित करना और भिन्नों को क्रमबद्ध करना, के बारे में भी अध्ययन किया है।

दशमलवों के अध्ययन में हम, उनकी तुलना, संख्या रेखा पर उनका निरूपण और उनका योग एवं व्यवकलन, के बारे में चर्चा कर चुके हैं।

अब हम भिन्नों एवं दशमलवों के गुणन एवं भाग के बारे में अध्ययन करेंगे।

2.2 भिन्नों के बारे में आपने कितनी अच्छी तरह अध्ययन किया है?

उचित भिन्न वह भिन्न होती है जो संपूर्ण के एक भाग को निरूपित करती है। क्या $\frac{7}{4}$ एक उचित भिन्न है? इसके अंश अथवा हर में कौन बड़ा है?

विषम भिन्न, संपूर्ण एवं उचित भिन्न का संयोजन होता है। क्या $\frac{7}{4}$ एक विषम भिन्न है? यहाँ अंश अथवा हर में कौन बड़ा है?

विषम भिन्न $\frac{7}{4}$ को $1\frac{3}{4}$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक **मिश्रित भिन्न** है।

क्या आप उचित, विषम एवं मिश्रित भिन्न में से प्रत्येक के पाँच उदाहरण लिख सकते हैं?

उदाहरण 1 $\frac{3}{5}$ के पाँच तुल्य भिन्न लिखिए।

हल $\frac{3}{5}$ के तुल्य भिन्नों में से एक $\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10}$ है।

शेष चार तुल्य भिन्न आप स्वयं ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2 रमेश ने एक प्रश्नावली का $\frac{2}{7}$ भाग हल किया जबकि सीमा ने उस प्रश्नावली का $\frac{4}{5}$ भाग हल किया। ज्ञात कीजिए कि दोनों में से किसने कम भाग हल किया।

हल यह ज्ञात करने के लिए कि किसने प्रश्नावली का कम भाग हल किया, आइए $\frac{2}{7}$ और $\frac{4}{5}$ की तुलना करते हैं।

इनको समान भिन्नों में परिवर्तित करने पर हम पाते हैं :

$\frac{2}{7}=\frac{10}{35}$, $\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$

क्योंकि $10 < 28$, इसलिए $\frac{10}{35} < \frac{28}{35}$.

अत: $\frac{2}{7} < \frac{4}{5}$.

रमेश ने सीमा की तुलना में कम भाग हल किया।

उदाहरण 3 समीरा ने $3\frac{1}{2}$ kg सेब और $4\frac{3}{4}$ kg संतरे खरीदे। समीरा द्वारा खरीदे गए फलों का कुल भार कितना है?

हल फलों का कुल भार $= \left(3\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right)$ kg

$$= \left(\frac{7}{2}+\frac{19}{4}\right) \text{ kg} = \left(\frac{14}{4}+\frac{19}{4}\right) \text{ kg}$$

$$= \frac{33}{4} \text{ kg} = 8\frac{1}{4} \text{ kg है।}$$

उदाहरण 4 सुमन प्रतिदिन $5\frac{2}{3}$ घंटे पढ़ती है। वह अपने इस समय में से $2\frac{4}{5}$ घंटे विज्ञान और गणित में लगा देती है। दूसरे विषयों के लिए वह कितना समय लगाती है?

हल सुमन के अध्ययन का कुल समय $= 5\frac{2}{3}$ घंटे $= \frac{17}{3}$ घंटे

सुमन द्वारा विज्ञान एवं गणित में लगाया समय $= 2\frac{4}{5} = \frac{14}{5}$ घंटे

अत: उसके द्वारा दूसरे विषयों में लगाया गया समय $= \left(\frac{17}{3} - \frac{14}{5}\right)$ घंटे

$= \left(\frac{17 \times 5}{15} - \frac{14 \times 3}{15}\right)$ घंटे

$= \left(\frac{85 - 42}{15}\right)$ घंटे $= \frac{43}{15}$ घंटे $= 2\frac{13}{15}$ घंटे

प्रश्नावली 2.1

1. हल कीजिए:

(i) $2 - \frac{3}{5}$ (ii) $4 + \frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ (iv) $\frac{9}{11} - \frac{4}{15}$

(v) $\frac{7}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{2}$ (vi) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$ (vii) $8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$

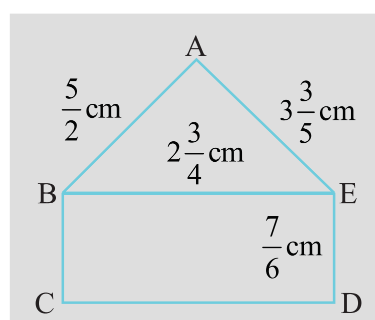
2. निम्नलिखित को अवरोही क्रम में रखिए :

(i) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{21}$ (ii) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$.

3. एक "जादुई वर्ग" में प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तंभ एवं प्रत्येक विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। क्या यह एक जादुई वर्ग है?

$\frac{4}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{11}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$

(प्रथम पंक्ति के अनुदिश $\frac{4}{11} + \frac{9}{11} + \frac{2}{11} = \frac{15}{11}$).



4. एक आयताकार कागज़ की लंबाई $12\frac{1}{2}$ cm और चौड़ाई $10\frac{2}{3}$ cm है। कागज़ का परिमाप ज्ञात कीजिए।

5. दी हुई आकृति में, (i) Δ ABE (ii) आयत BCDE, का परिमाप ज्ञात कीजिए। किसका परिमाप ज़्यादा है?

6. सलील एक तस्वीर को किसी फ्रेम (चौखट) में जड़ना चाहता है। तस्वीर $7\frac{3}{5}$ cm चौड़ी है। चौखट में उचित रूप से जड़ने के लिए तस्वीर की चौड़ाई $7\frac{3}{10}$ cm से ज़्यादा नहीं हो सकती। तस्वीर की कितनी काट-छाँट की जानी चाहिए।

7. रीतू ने एक सेब का $\frac{3}{5}$ भाग खाया और शेष सेब उसके भाई सोमू ने खाया। सेब का कितना भाग सोमू ने खाया? किसका हिस्सा ज़्यादा था? कितना ज़्यादा था?

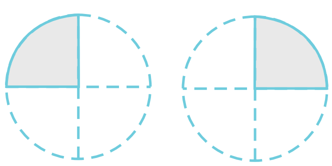
8. माइकल ने एक तस्वीर में रंग भरने का कार्य $\frac{7}{12}$ घंटे में समाप्त किया। वैभव ने उसी तस्वीर में रंग भरने का कार्य $\frac{3}{4}$ घंटे में समाप्त किया। किसने ज़्यादा समय कार्य किया? यह समय कितना ज़्यादा था?

2.3 भिन्नों का गुणन

आप जानते हैं कि एक आयत का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है। यह लंबाई × चौड़ाई के बराबर होता है। यदि किसी आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 7 cm और 4 cm है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा? इसका क्षेत्रफल $7 \times 4 = 28$ cm^2 होगा।

यदि आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः $7\frac{1}{2}$ cm एवं $3\frac{1}{2}$ cm है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा? आप कहेंगे कि यह $7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{7}{2}$ cm^2 है। संख्याएँ $\frac{15}{2}$ और $\frac{7}{2}$ भिन्न हैं। दिए हुए आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए यह ज्ञात करना आवश्यक है कि भिन्नों को गुणा कैसे किया जाए। हम अब इसे सीखेंगे।

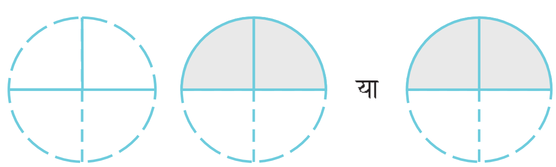
2.3.1 एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणन



आकृति 2.1

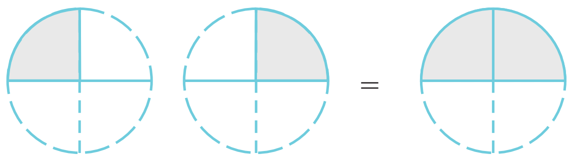
बाईं तरफ़ (आकृति 2.1) में दी हुई तस्वीर को देखिए। प्रत्येक छायांकित (shaded) भाग वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग है। दो छायांकित भाग मिलकर वृत्त के कितने भाग को निरूपित करेंगे? ये $\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 2\times\frac{1}{4}$ को निरूपित करेंगे।

दो छायांकित भागों को संयोजित करने पर हम आकृति 2.2 को प्राप्त करते हैं। आकृति 2.2 का छायांकित भाग वृत्त के किस भाग को निरूपित करेगा? यह वृत्त के $\frac{2}{4}$ भाग को निरूपित करता है।



आकृति 2.2

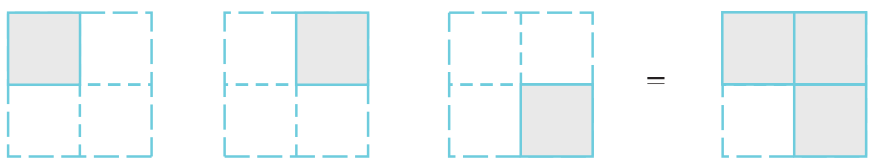
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि आकृति 2.1 के छायांकित टुकड़े मिलकर, आकृति 2.2 के छायांकित भाग के समान हैं अर्थात् हमें आकृति 2.3 प्राप्त होती है।



आकृति 2.3

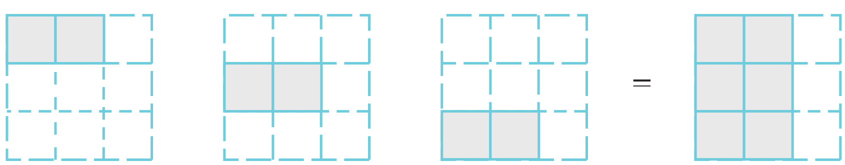
अथवा $$2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

क्या अब आप बता सकते हैं कि आकृति 2.4 किसे निरूपित करेगी?



आकृति 2.4

और आकृति 2.5 किसे निरूपित करेगी?



आकृति 2.5

आइए अब हम $3 \times \frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

हम यह भी पाते हैं, $$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3 \quad 1}{2} =$$

इसलिए $$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

इसी प्रकार $$\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3} = ?$$

क्या आप बता सकते हैं $$3 \times \frac{2}{7} = ? \qquad 4 \times \frac{3}{5} = ?$$

अभी तक हमने जितनी भिन्नों की चर्चा की है अर्थात् $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ और $\frac{3}{5}$ वे सभी उचित भिन्न हैं।

विषम भिन्नों के लिए भी हमारे पास है:

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

प्रयास कीजिए : $3 \times \frac{8}{7} = ?$ $\quad 4 \times \frac{7}{5} = ?$

अतः किसी पूर्ण संख्या को किसी उचित अथवा विषम भिन्न से गुणा करने के लिए हम पूर्ण संख्या को भिन्न के अंश के साथ गुणा करते हैं और भिन्न के हर को अपरिवर्तित या समान रखा जाता है।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए: (a) $\frac{2}{7} \times 3$ (b) $\frac{9}{7} \times 6$ (c) $3 \times \frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11} \times 6$

यदि गुणनफल एक विषम भिन्न है तो इसे मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

2. $2\ \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ को सचित्र निरूपित कीजिए।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए (i) $5 \times 2\frac{3}{7}$

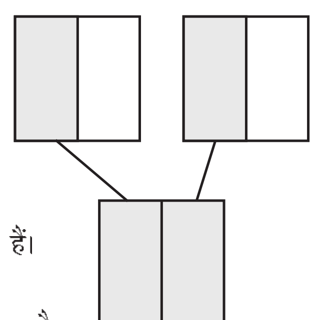
(ii) $1\frac{4}{9} \times 6$

किसी मिश्रित भिन्न को एक पूर्ण संख्या से गुणा करने के लिए सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए और तब गुणा कीजिए।

इसीलिए $\quad 3 \times 2\frac{5}{7} = 3 \times \frac{19}{7} = \frac{57}{7} = 8\frac{1}{7}$

इसी प्रकार, $\quad 2 \times 4\frac{2}{5} = 2 \times \frac{22}{5} = ?$

भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में



आकृति 2.6

आकृति 2.6 को देखिए। दो वर्ग पूरी तरह से समरूप हैं।

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा 1 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है।

इसलिए दोनों छायांकित टुकड़े मिलकर 2 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करते हैं।

2 छायांकित $\frac{1}{2}$ भागों को संयोजित कीजिए। यह 1 को निरूपित करता है।

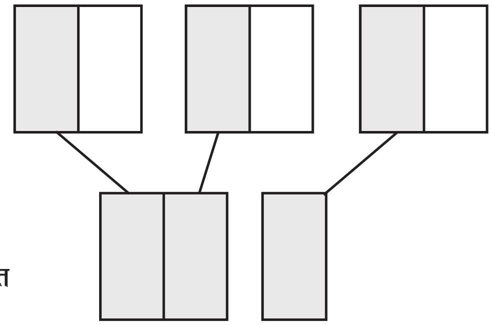
इस प्रकार हम कहते हैं कि 2 का $\frac{1}{2}$ एक भाग है। हम इसे $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ के रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं।

अतः 2 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

आकृति 2.7 के समरूप वर्गों को देखिए

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा एक के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करता है।

इसलिए तीन छायांकित टुकड़े मिलकर 3 के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करते हैं।



आकृति 2.7

तीन छायांकित भागों को संयोजित कीजिए।

यह $1\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ को निरूपित करता है।

इसलिए 3 का $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ है। और $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

अतः 3 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि **'का' गुणन को निरूपित करता है।**

फरीदा के पास 20 कँचे हैं। रेशमा के पास फरीदा के कँचों का $\frac{1}{5}$ है। रेशमा के पास कितने कँचे हैं? जैसा कि हम जानते हैं, 'का' गुणन को दर्शाता हैं। इसलिए रेशमा के पास $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ कँचे हैं।

इसी प्रकार हम पाते हैं कि 16 का $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$ है।

प्रयास कीजिए

क्या आप बता सकते हैं कि (i) 10 का $\frac{1}{2}$ (ii) 16 का $\frac{1}{4}$ (iii) 25 का $\frac{2}{5}$, क्या है?

उदाहरण 5 40 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते है, कुल संख्या का $\frac{2}{5}$ गणित पढ़ना पसंद करते हैं और शेष विद्यार्थी विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं।

(i) कितने विद्यार्थी अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते हैं?

(ii) कितने विद्यार्थी गणित पढ़ना पसंद करते हैं?

(iii) कुल विद्यार्थियों की संख्या का कितना भाग (fraction) विज्ञान पढ़ना पसंद करता है?

हल कक्षा के कुल विद्यार्थियों की संख्या = 40.

(i) इनमें से कुल संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते हैं।

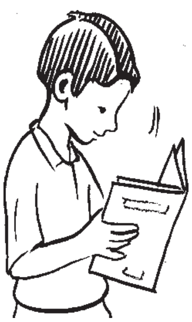
अत: अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 40 का $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 40 = 8$ है।

(ii) स्वयं प्रयास कीजिए।

(iii) अंग्रेज़ी एवं गणित पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 8 + 16 = 24 है। अत: विज्ञान पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 40 – 24 = 16 है।

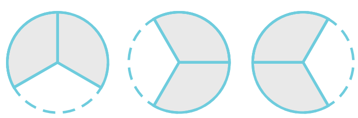
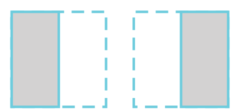
अत: वांछित भिन्न $\frac{16}{40}$ है।

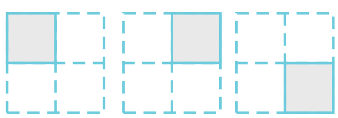
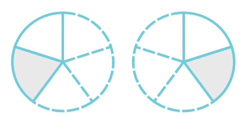
प्रश्नावली 2.2



1. (a) से (d) तक के रेखाचित्रों में निम्नलिखित को कौन दर्शाता है :

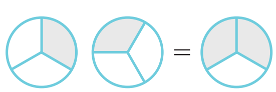
(i) $2 \times \frac{1}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{2}$ (iii) $3 \times \frac{2}{3}$ (iv) $3 \times \frac{1}{4}$

(a)  (b) 

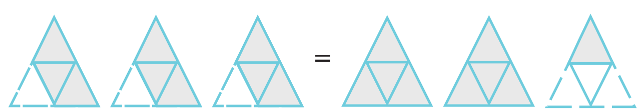
(c)  (d) 

2. (a) से (c) तक कुछ चित्र दिए हुए हैं। बताइए उनमें से कौन निम्नलिखित को दर्शाता है :

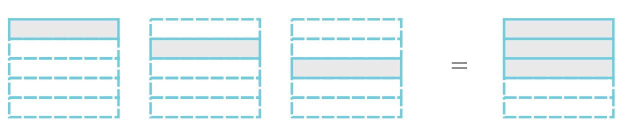
(i) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (iii) $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$



(a)



(b)



(c)

3. गुणा करके न्यूनतम रूप में लिखिए और मिश्रित भिन्न में व्यक्त कीजिए :

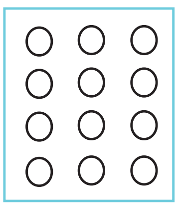
(i) $7\times\frac{3}{5}$ (ii) $4\times\frac{1}{3}$ (iii) $2\times\frac{6}{7}$ (iv) $5\times\frac{2}{9}$ (v) $\frac{2}{3}\times4$

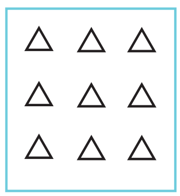
(vi) $\frac{5}{2}\times6$ (vii) $11\times\frac{4}{7}$ (viii) $20\times\frac{4}{5}$ (ix) $13\times\frac{1}{3}$ (x) $15\times\frac{3}{5}$

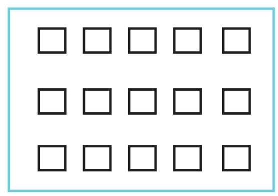
4. छायांकित कीजिए :

(i) बक्सा (a) के वृत्तों का $\frac{1}{2}$ भाग (ii) बक्सा (b) के त्रिभुजों का $\frac{2}{3}$ भाग

(iii) बक्सा (c) के वर्गों का $\frac{3}{5}$ भाग


(a)


(b)


(c)

5. ज्ञात कीजिए :

(a) (i) 24 का $\frac{1}{2}$ (ii) 46 का $\frac{1}{2}$ (b) (i) 18 का $\frac{2}{3}$ (ii) 27 का $\frac{2}{3}$

(c) (i) 16 का $\frac{3}{4}$ (ii) 36 का $\frac{3}{4}$ (d) (i) 20 का $\frac{4}{5}$ (ii) 35 का $\frac{4}{5}$

6. गुणा कीजिए और मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $3\times5\frac{1}{5}$ (b) $5\times6\frac{3}{4}$ (c) $7\times2\frac{1}{4}$

(d) $4\times6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4}\times6$ (f) $3\frac{2}{5}\times8$

7. ज्ञात कीजिए :

(a) (i) $2\frac{3}{4}$ का $\frac{1}{2}$ (ii) $4\frac{2}{9}$ का $\frac{1}{2}$ (b) (i) $3\frac{5}{6}$ का $\frac{5}{8}$ (ii) $9\frac{2}{3}$ का $\frac{5}{8}$

8. विद्या और प्रताप पिकनिक पर गए। उनकी माँ ने उन्हें 5 लीटर पानी वाली एक बोतल दी। विद्या ने कुल पानी का $\frac{2}{5}$ उपयोग किया। शेष पानी प्रताप ने पिया।

(i) विद्या ने कितना पानी पिया?

(ii) पानी की कुल मात्रा का कितना भिन्न (fraction) प्रताप ने पिया?

2.3.2 भिन्न का भिन्न से गुणन

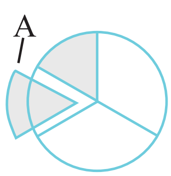
फरीदा के पास 9 cm लंबी एक रिबन की पट्टी थी। उसने इस पट्टी को चार समान भागों में काटा। उसने यह किस प्रकार किया? उसने पट्टी को दो बार मोड़ा। प्रत्येक भाग कुल लंबाई के किस भिन्न को निरूपित करेगा। प्रत्येक भाग, पट्टी का $\frac{9}{4}$ होगा। उसने इनमें से एक भाग लिया और इस भाग को एक बार मोड़ते हुए इसे दो बराबर भागों में बाँट दिया। इन दो टुकड़ों में से एक टुकड़ा क्या निरूपित करेगा? यह $\frac{9}{4}$ का $\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ को निरूपित करेगा।

आइए देखते हैं कि दो भिन्नों का गुणनफल जैसे $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ को कैसे ज्ञात किया जाए।

इसे ज्ञात करने के लिए आइए सर्वप्रथम हम $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ जैसा गुणनफल ज्ञात करना सीखते हैं।

आकृति 2.8

(a) किसी संपूर्ण भाग का $\frac{1}{3}$ हम कैसे ज्ञात करते हैं? हम संपूर्ण को तीन समान भागों में बाँटते है। तीनों में से प्रत्येक भाग संपूर्ण के $\frac{1}{3}$ भाग को निरूपित करता है। इन तीनों में से एक हिस्सा लीजिए और इसे छायांकित कर दीजिए जैसा कि आकृति 2.8 में दर्शाया गया है।



आकृति 2.9

(b) आप इस छायांकित भाग का $\frac{1}{2}$ भाग कैसे ज्ञात करोगे? इस छायांकित एक तिहाई $(\frac{1}{3})$ भाग को 2 समान भागों में बाँटिए। इन दोनों में से प्रत्येक भाग $\frac{1}{3}$ के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ को निरूपित करता है (आकृति 2.9)।

इन दो भागों में से एक को बाहर निकाल लीजिए और इसे 'A' नाम दे दीजिए। 'A' $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ को निरूपित करता है।

(c) 'A' संपूर्ण का कितना भाग है? यह जानने के लिए शेष $\frac{1}{3}$ भागों में से प्रत्येक को 2 समान भागों में बाँटिए। अब आपके पास ऐसे कितने समान भाग हैं? ऐसे 6 समान भाग हैं। 'A' इनमें से एक भाग है।

अतः 'A' संपूर्ण का $\frac{1}{6}$ भाग है। इस प्रकार $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

हमने यह कैसे निर्णय लिया कि 'A' संपूर्ण का $\frac{1}{6}$ भाग है? संपूर्ण को $2 \times 3 = 6$ भागों में बाँटा गया और 1 भाग इसमें से बाहर निकाला गया।

अत: $$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$$

अथवा $$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ का मान भी इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। संपूर्ण को 2 समान भागों में बाँटिए और तब इनमें से किसी एक भाग को 3 समान भागों में बाँटिए। इनमें से एक भाग को लीजिए।

यह $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{1}{6}$ भाग को निरूपित करेगा।

इसलिए जैसा कि पहले चर्चा की जा चुकी है $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2}$

अत: $$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ और $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या आप

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ पाते हैं?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित बक्सों को भरिए :

(i) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{2 \times 7} = \square$

(ii) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \square = \square$

(iii) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \square = \square$

(iv) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \square = \square$

उदाहरण 6 सुशांत एक घंटे में किसी पुस्तक का $\frac{1}{3}$ भाग पढ़ता है। वह $2\frac{1}{5}$ घंटों में पुस्तक का कितना भाग पढ़ेगा?

हल सुशांत द्वारा 1 घंटे में पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग $= \frac{1}{3}$.

इसलिए $2\frac{1}{5}$ घंटे में उसके द्वारा पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग $= 2\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{11}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{11 \quad 1}{5 \quad 3} = \frac{11}{15}$$

आइए अब हम $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$ ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times 5$.

इसलिए, $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{6} \quad 5 = \frac{5}{6}$

साथ ही, $\frac{5}{6} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3}$। अतः $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

इसे नीचे खींची गई आकृतियों में भी दर्शाया गया है। पाँच समान आकारों (आकृति 2.10) में से प्रत्येक पाँच समरूप वृत्तों के भाग हैं। इस प्रकार का एक आकार लीजिए। इस आकार को प्राप्त करने के लिए सर्वप्रथम हम वृत्त को 3 समान भागों में बाँटते हैं। आगे भी इन तीन भागों में से प्रत्येक को 2 समान भागों में बाँटते हैं। इसका एक भाग वह आकार है जिसकी हमने चर्चा की है। यह क्या निरूपित करेगा? यह $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ को निरूपित करेगा। इस प्रकार के भाग मिलाकर कुल $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ होंगे।

आकृति 2.10

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

इसी प्रकार, $\frac{3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \times 1}{5 \times 7} = \frac{3}{35}$.

इस प्रकार हम $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ को $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$ के रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

इस प्रकार हम पाते हैं कि हम दो भिन्नों का गुणन $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में करते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: $\frac{8}{3} \times \frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

गुणनफल का मान

आपने देखा है कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है। उदाहरणार्थ $3 \times 4 = 12$ और $12 > 4$, $12 > 3$.

जब हम दो भिन्नों को गुणा करते हैं तो गुणनफल के मान को दिए गए भिन्नों से तुलना कीजिए?

आइए सर्वप्रथम हम दो उचित भिन्नों के गुणनफल की चर्चा करते हैं। हम पाते हैं,

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}<\frac{2}{3},\frac{8}{15}<\frac{4}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है।
$\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}$ = ---------	--------,--------	-------------------------------------
$\frac{3}{5}\times\frac{\square}{8}$ =	--------,--------	-------------------------------------
$\frac{2}{\square}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$	--------,--------	-------------------------------------

आप पाते हैं कि *जब दो उचित भिन्नों को गुणा किया जाता हैं तो गुणनफल दोनों भिन्नों से कम होता है। अर्थात् दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से छोटा होता है। पाँच और उदाहरण बनाकर इसकी जाँच कीजिए।*

आइए अब हम दो विषम भिन्नों को गुणा करते हैं।

$\frac{7}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{35}{6}$	$\frac{35}{6}>\frac{7}{3},\frac{35}{6}>\frac{5}{2}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से बड़ा है।
$\frac{6}{5}\times\frac{\square}{3}=\frac{24}{15}$	--------,--------	--
$\frac{9}{2}\times\frac{7}{W}=\frac{63}{8}$	--------,--------	--
$\frac{3}{W}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{14}$	--------,--------	--

हम पाते हैं कि *दो विषम भिन्नों का गुणनफल उनमें से प्रत्येक भिन्न से बड़ा है। अथवा दो विषम भिन्नों के गुणनफल का मान उनमें से प्रत्येक भिन्न से अधिक है।*

ऐसे पाँच और उदाहरणों को बनाइए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए।

आइए अब हम एक उचित और एक विषम भिन्न को गुणा करते हैं।

मान लीजिए और $\frac{7}{5}$ को।

हम पाते हैं : $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$. यहाँ, $\frac{14}{15}<\frac{7}{5}$ और $\frac{14}{15}>\frac{2}{3}$

प्राप्त गुणनफल, गुणन में उपयोग किए गए विषम भिन्न से कम है और उचित भिन्न से ज़्यादा है।

$\frac{6}{5} \times \frac{2}{7}$, $\frac{8}{3} \times \frac{4}{5}$ के लिए भी गुणनफल की जाँच कीजिए।

प्रश्नावली 2.3

1. ज्ञात कीजिए :

(i) (a) $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ का $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ का $\frac{1}{4}$

(ii) (a) $\frac{2}{9}$ का $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{6}{5}$ का $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{3}{10}$ का $\frac{1}{7}$

2. गुणा कीजिए और न्यूनतम रूप में बदलिए (यदि संभव है) :

(i) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$ (iv) $\frac{9}{5} \times \frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3} \times \frac{15}{8}$ (vi) $\frac{11}{2} \times \frac{3}{10}$ (vii) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

3. निम्नलिखित भिन्नों को गुणा कीजिए:

(i) $\frac{2}{5} \times 5\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2} \times 5\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{5}{6} \times 2\frac{3}{7}$

(v) $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$ (vi) $2\frac{3}{5} \times 3$ (vii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$

4. कौन बड़ा है :

(i) $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{7}$ अथवा $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ का $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{7}$ का $\frac{2}{3}$

5. सैली अपने बगीचे में चार छोटे पौधे एक पंक्ति में लगाती है। दो क्रमागत छोटे पौधों के बीच की दूरी $\frac{3}{4}$ m है। प्रथम एवं अंतिम पौधे के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

6. लिपिका एक पुस्तक को प्रतिदिन $1\frac{3}{4}$ घंटे पढ़ती है। वह संपूर्ण पुस्तक को 6 दिनों में पढ़ती है। उस पुस्तक को पढ़ने में उसने कुल कितने घंटे लगाए?

7. एक कार 1 लिटर पैट्रोल में 16 किमी दौड़ती है। $2\frac{3}{4}$ लिटर पैट्रोल में यह कार कुल कितनी दूरी तय करेगी?

8. (a) (i) बक्सा $\square$, में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{2}{3} \times \square = \frac{10}{30}$।

(ii) $\square$ में प्राप्त संख्या का न्यूनतम रूप _____ है।

(b) (i) बक्सा $\square$, में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{3}{5} \times \square = \frac{24}{75}$ ।

(ii) $\square$ में प्राप्त संख्या का न्यूनतम रूप ______ है।

2.4 भिन्नों की भाग

जॉन के पास 6 cm लंबी कागज़ की एक पट्टी है। वह इस पट्टी को 2 cm लंबी छोटी पट्टियों में काटता है। आप जानते हैं कि वह $6 \div 2 = 3$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा। जॉन 6 cm लंबाई वाली एक दूसरी पट्टी को $\frac{3}{2}$ cm लंबाई वाली छोटी पट्टियों में काटता है। अब उसको कितनी छोटी पट्टियाँ प्राप्त होंगी? वह $6 \div \frac{3}{2}$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा।

एक $\frac{15}{2}$ cm लंबाई वाली पट्टी को $\frac{3}{2}$ cm लंबाई वाली छोटी पट्टियों में काटा जा सकता है जिससे हमें $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2}$ टुकड़े प्राप्त होंगे।

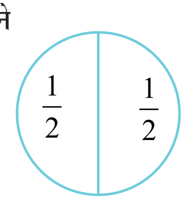
अतः, हमें एक पूर्ण संख्या को किसी भिन्न से अथवा एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग देने की आवश्यकता है। आइए हम देखते हैं कि इसे कैसे करना है।

2.4.1 भिन्न से पूर्ण संख्या की भाग

आइए $1 \div \frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

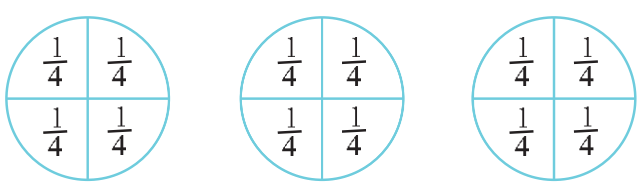
हम किसी संपूर्ण को कुछ बराबर भागों में इस प्रकार बाँटते हैं ताकि प्रत्येक भाग संपूर्ण का आधा है। ऐसे आधे $(\frac{1}{2})$ भागों की संख्या $1 \div \frac{1}{2}$ होगी। आकृति 2.11 को देखिए। आपको कितने आधे भाग दिखाई देते हैं? ऐसे दो आधे भाग हैं।

इसलिए $1 \div \frac{1}{2} = 2$. साथ ही $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$ अतः $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$



आकृति 2.11

इसी प्रकार, $3 \div \frac{1}{4} = 3$ संपूर्णों में से प्रत्येक को समान $\frac{1}{4}$ भागों में बाँटने पर, $\frac{1}{4}$ भागों की संख्या $= 12$ (आकृति 2.12 से)



आकृति 2.12

यह भी देखिए कि $3\times\frac{4}{1} = 3 \times 4 = 12$. इस प्रकार, $3\div\frac{1}{4}=3 \quad \frac{4}{1} = 12$.

इसी प्रकार $3 \div \frac{1}{2}$ और $3\times\frac{2}{1}$ ज्ञात कीजिए।

भिन्न का व्युत्क्रम

$\frac{1}{2}$ के अंश एवं हर को परस्पर बदलने पर अथवा $\frac{1}{2}$ का प्रतिलोम करने पर संख्या $\frac{2}{1}$ प्राप्त की जा सकती है। इसी प्रकार $\frac{1}{3}$ का प्रतिलोम करने पर $\frac{3}{1}$ प्राप्त होता है।

आइए सर्वप्रथम हम ऐसी संख्याओं के प्रतिलोम के बारे में चर्चा करते हैं।
निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$7\times\frac{1}{7} = 1$	$\frac{5}{4}\times\frac{4}{5} =$ ---------
$\frac{1}{9}\times 9 =$ ------	$\frac{2}{7}\times$ ------- $= 1$
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{2} = \frac{2\times3}{3\times2} = \frac{6}{6} = 1$	------ $\times\frac{5}{9} = 1$

ऐसे पाँच और युग्मों को गुणा कीजिए।

ऐसी शून्येतर संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है, एक दूसरे के व्युत्क्रम कहलाती हैं। इस प्रकार $\frac{5}{9}$ का व्युत्क्रम $\frac{9}{5}$ है और $\frac{9}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{9}$ है। $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{7}$ के व्युत्क्रम क्या है?

आप देखेंगे कि $\frac{2}{3}$ का प्रतिलोम करने पर इसका व्युत्क्रम प्राप्त होता है। आप इस प्रकार $\frac{3}{2}$ प्राप्त करते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

(i) क्या एक उचित भिन्न का व्युत्क्रम भी उचित भिन्न होगी?

(ii) क्या एक विषम भिन्न का व्युत्क्रम भी एक विषम भिन्न होगा?

इसलिए हम कह सकते हैं कि

$1 \div \frac{1}{2} = 1\times\frac{2}{1} = 1 \times (\frac{1}{2}$ का व्युत्क्रम$)$

$3 \div \frac{1}{4} = 3\times\frac{4}{1} = 3 \times (\frac{1}{4}$ का व्युत्क्रम$)$

$3 \div \frac{1}{2} =$ ------ $=$ ---------------------.

अतः, $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times (\frac{3}{4}$ का व्युत्क्रम$) = 2 \times \frac{4}{3}$.

$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times$ ------------------- $= 5 \times$ -------------

इस प्रकार किसी पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए उस पूर्ण संख्या को उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा कर दीजिए।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए : (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

- *किसी पूर्ण संख्या को एक मिश्रित भिन्न से भाग करते समय, सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए और तब इसको हल कीजिए।*

  इस प्रकार $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} = ?$ साथ ही $5 \div 3\frac{1}{3} = 3 \div \frac{10}{3} = ?$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $6 \div 5\frac{1}{3}$

(ii) $7 \div 2\frac{4}{7}$

2.4.2 पूर्ण संख्या से भिन्न की भाग

- $\frac{3}{4} \div 3$ का मान क्या होगा?

  पूर्व प्रेक्षणों के आधार पर हम पाते हैं : $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

  अतः, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = ?$ $\frac{5}{7} \div 6$, $\frac{2}{7} \div 8$ के मान क्या हैं?

- मिश्रित भिन्नों को पूर्ण संख्या से भाग करते समय मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए। अर्थात्

  $2\frac{2}{3} \div 5 = \frac{8}{3} \div 5 =$ ------ ; $4\frac{2}{5} \div 3 =$ ------ $=$ ------ $2\frac{3}{5} \div 2 =$ ------ $=$ ----

2.4.3 एक भिन्न की दूसरी भिन्न से भाग

अब हम $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$ ज्ञात कर सकते हैं।

$\frac{1}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{1}{3} \times (\frac{6}{5}$ का व्युत्क्रम$) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$

इसी प्रकार, $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times (\frac{2}{3}$ का व्युत्क्रम$) = ?$ और $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6}\div\frac{9}{2}$

प्रश्नावली 2.4

1. ज्ञात कीजिए :

(i) $12\div\frac{3}{4}$ (ii) $14\div\frac{5}{6}$ (iii) $8\div\frac{7}{3}$ (iv) $4\div\frac{8}{3}$

(v) $3\div2\frac{1}{3}$ (vi) $5\div3\frac{4}{7}$

2. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। व्युत्क्रमों को उचित भिन्न, विषम भिन्न एवं पूर्ण संख्या के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{1}{11}$

3. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{3}\div2$ (ii) $\frac{4}{9}\div5$ (iii) $\frac{6}{13}\div7$ (iv) $4\frac{1}{3}\div3$

(v) $3\frac{1}{2}\div4$ (vi) $4\frac{3}{7}\div7$

4. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{2}{5}\div\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{9}\div\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7}\div\frac{8}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3}\div\frac{3}{5}$ (v) $3\frac{1}{2}\div\frac{8}{3}$

(vi) $\frac{2}{5}\div1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5}\div1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5}\div1\frac{1}{5}$

2.5 दशमलव संख्याओं के बारे में आप कितनी अच्छी तरह पढ़ चुके हैं

आपने पिछली कक्षाओं में दशमलव संख्याओं के बारे में अध्ययन किया है। आइए यहाँ हम संक्षिप्त

में इनका स्मरण करते हैं। निम्नलिखित सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	सहस्रांश $\left(\frac{1}{1000}\right)$	संख्या
2	5	3	1	4	7	253.147
6	2	9	3	2	1	....
0	4	3	1	9	2	....
....	1	4	2	5	1	514.251
2	....	6	5	1	2	236.512
....	2	....	5	....	3	724.503
6	....	4	....	2	....	614.326
0	1	0	5	3	0	....

उपर्युक्त सारणी में आपने ऐसी दशमलव संख्याएँ लिखी हैं जिनका प्रसारित स्थानीय मान दिया हुआ था। आप विलोम भी कर सकते हैं। अर्थात् यदि आपको संख्या दी हुई है तो आप इसका प्रसारित रूप लिख सकते हैं। उदाहरणतः

$$253.417 = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{1000}\right)$$

जॉन के पास 15.50 रु हैं और सलमा के पास 15.75 रु हैं। किसके पास अधिक धन है? इसे ज्ञात करने के लिए हमें दशमलव संख्याओं 15.50 एवं 15.75 की तुलना करने की आवश्यकता है। इसके लिए हम सर्वप्रथम दशमलव बिंदु के सबसे बाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए बाईं तरफ के अंकों की तुलना करते हैं। यहाँ बिंदु के बाईं तरफ़ के दोनों अंक 1 और 5 दोनों संख्याओं में एक जैसे हैं। इसलिए हम दशांश स्थान से शुरू करते हुए दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ के अंकों की तुलना करते हैं। हम पाते हैं कि $5 < 7$, इस प्रकार हम कहते हैं कि $15.50 < 15.75$. अतः सलमा के पास जॉन से अधिक धन है।

यदि दशांश स्थान के अंक भी एक जैसे हैं तो शतांश स्थान के अंकों की तुलना कीजिए और इसी प्रकार आगे कीजिए।

अब तुरंत 35.63 और 35.67; 20.1 और 20.01; 19.36 और 29.36 की तुलना कीजिए।

धन, लंबाई और भार की निम्न इकाई को उच्च इकाई में परिवर्तित करते समय हमें दशमलव की आवश्यकता होती है। उदाहरणतः 3 पैसे $= \frac{3}{100}$ रु $= 0.03$ रुपये,

$5\text{ g} = \frac{5}{1000}\text{ kg} = 0.005\text{ kg}$, $7\text{ cm} = \frac{7}{100} = 0.07\text{ m}$

75 पैसे = _______रु, 250 g = ______ kg, 85 cm = ______ m, लिखिए

हम यह भी जानते हैं कि दशमलवों को कैसे जोड़ा और घटाया जाता है। इस प्रकार 21.36 + 37.35 है

$$\begin{array}{r} 21.36 \\ +\quad 37.35 \\ \hline 58.71 \end{array}$$

0.19 + 2.3 का मान क्या है?

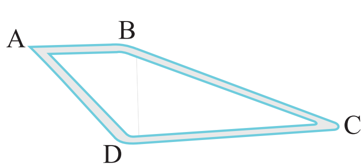
29.35 – 4.56 का अंतर है

$$\begin{array}{r} 29.35 \\ -\quad 04.56 \\ \hline 24.79 \end{array}$$

39.87 – 21.98 का मान बताइए।

प्रश्नावली 2.5

1. कौन बड़ा है?
   (i) 0.5 अथवा 0.05 (ii) 0.7 अथवा 0.5 (iii) 7 अथवा 0.7
   (iv) 1.37 अथवा 1.49 (v) 2.03 अथवा 2.30 (vi) 0.8 अथवा 0.88.
2. दशमलव का उपयोग करते हुए निम्नलिखित को रुपये के रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 7 पैसे (ii) 7 रुपये 7 पैसे (iii) 77 रुपये 77 पैसे
   (iv) 50 पैसे (v) 235 पैसे
3. (i) 5 cm को m एवं km में व्यक्त कीजिए।
   (ii) 35 mm को cm, m एवं km में व्यक्त कीजिए।
4. निम्नलिखित को kg में व्यक्त कीजिए :
   (i) 200 gm (ii) 3470 gm (iii) 4 kg 8 g
5. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखिए :
   (i) 20.03 (ii) 2.03 (iii) 200.03 (iv) 2.034
6. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं में 2 का स्थानीय मान लिखिए :
   (i) 2.56 (ii) 21.37 (iii) 10.25 (iv) 9.42 (v) 63.352.



7. दिनेश स्थान A से स्थान B तक गया और वहाँ से स्थान C तक गया। A से B की दूरी 7.5 km है और B से C की दूरी 12.7 km है। अयूब स्थान A से स्थान D तक गया और वहाँ से वह स्थान C को गया। A से C की दूरी 9.3 km है और D से C की दूरी 11.8 km है। किसने ज़्यादा दूरी तय की और वह दूरी कितनी अधिक थी?
8. श्यामा ने 5 kg 300 g सेब और 3 kg 250 g आम खरीदे। सरला ने 4 kg 800 g संतरे और 4 kg 150 g केले खरीदे। किसने अधिक फल खरीदे?
9. 28 km, 42.6 km से कितना कम है?

2.6 दशमलव संख्याओं का गुणन

रेशमा ने 8.50 रुपये प्रति kg की दर से 1.5 kg सब्जी खरीदी। उसे कितने धन का भुगतान करना चाहिए? निश्चित रूप से यह 8.50×1.50 रुपये होगा। 8.5 और 1.5 दोनों ही दशमलव संख्याएँ हैं। इस प्रकार हमें एक ऐसी परिस्थिति मिलती है जहाँ हमें यह ज्ञात करने की आवश्यकता है कि दो दशमलवों को कैसे गुणा किया जाता है। आइए अब दो दशमलव संख्याओं के गुणन को सीखते हैं। सर्वप्रथम हम 0.1×0.1 ज्ञात करते हैं।

अब $0.1 = \frac{1}{10}$, इसलिए $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01.$

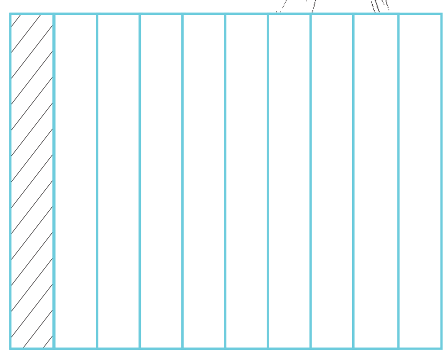
आइए इसका सचित्र निरूपण देखते हैं। (आकृति 2.13)

भिन्न $\frac{1}{10}$, 10 समान भागों में से एक को निरूपित करती है।

चित्र में छायांकित भाग $\frac{1}{10}$ को निरूपित करता है।

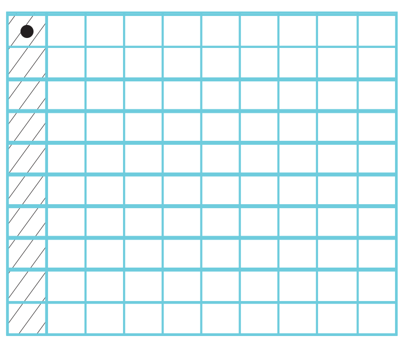
हम जानते हैं कि

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ का अर्थ है $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$. इसलिए इस $\frac{1}{10}$ वें भाग को 10 बराबर भागों में बाँटिए और इनमें से एक भाग को लीजिए।



आकृति 2.13

इस प्रकार हम पाते हैं (आकृति 2.14) कि



आकृति 2.14

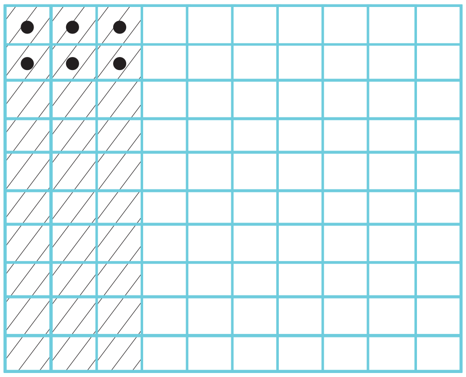
$\frac{1}{10}$ वें भाग के 10 भागों में एक भाग बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग है। अर्थात् यह $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ अथवा 0.1×0.1 को निरूपित करता है।

क्या बिंदु वर्ग को किसी दूसरी विधि से निरूपित किया जा सकता है?

आप आकृति 2.14 में कितने छोटे वर्ग पाते हैं।

इसमें 100 छोटे वर्ग हैं। इस प्रकार बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग 100 में से एक को निरूपित करता है अर्थात् 0.01 को निरूपित करता है। अतः $0.1 \times 0.1 = 0.01$.

ध्यान दीजिए 0.1 गुणनफल में दो बार सम्मिलित है। 0.1 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ एक अंक है। 0.01 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ दो (अर्थात् 1 + 1) अंक हैं।



आकृति 2.15

आइए अब हम 0.2×0.3 ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं, $0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$

जैसे हमने $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$, के लिए किया है, वैसे ही आइए हम वर्ग को 10 समान भागों में बाँटते हैं और $\frac{3}{10}$ प्राप्त करने के लिए इनमें से 3 भागों को बाहर निकाल लेते हैं। फिर से इन 3 समान भागों में से प्रत्येक भाग को 10 समान भागों में बाँटिए और प्रत्येक में से 2 ले लीजिए। इस प्रकार हम $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ प्राप्त करते हैं।

बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग, $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ अर्थात् 0.2×0.3 को निरूपित करते हैं (आकृति 2.15 देखिए)

क्योंकि 100 में से 6 बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग हैं अत: ये 0.06 को भी निरूपित करते हैं।

इस प्रकार $0.2 \times 0.3 = 0.06$.

ध्यान दीजिए कि $2 \times 3 = 6$ और 0.06 में दशमलव बिंदु से दाईं तरफ़ अंकों की संख्या 2 (= 1 + 1) हैं।

जाँच कीजिए कि क्या यह 0.1×0.1 के लिए भी उचित है।

इन प्रेक्षणों का उपयोग करते हुए 0.2×0.4 ज्ञात कीजिए।

0.1×0.1 और 0.2×0.3 ज्ञात करते समय संभवत: आपने ध्यान दिया होगा कि सर्वप्रथम हमने दशमलव बिंदु की उपेक्षा करते हुए पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा किया था। 0.1×0.1 में हमने पाया, 01×01 अर्थात् 1×1 इसी प्रकार 0.2×0.3 में हमने पाया, $02 \times 03 = 2 \times 3$.

तब हमने सबसे दाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए और बाईं तरफ़ चलते हुए अंकों की संख्या को गिना। तब हमने वहाँ दशमलव बिंदु रखा। गिने जाने वाले अंकों की संख्या, गुणा की जा रही दशमलव संख्याओं के दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ के अंकों की संख्या का योग करने पर प्राप्त होती है।

आइए अब हम 1.2×2.5 ज्ञात करते हैं।

12 एवं 25 को गुणा कीजिए। हम 300 अंक प्राप्त करते हैं। 1.2 और 2.5 दोनों में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ एक अंक है। इसलिए 300 में सबसे दाईं तरफ से $1 + 1 = 2$ अंक गिन लीजिए (अर्थात् 0) और बाईं तरफ़ चलिए। हम 3.00 अर्थात् 3 प्राप्त करते हैं

इसी प्रकार 1.5×1.6, 2.4×4.2 ज्ञात कीजिए।

2.5 और 1.25 को गुणा करते समय सर्वप्रथम आप 25 एवं 125 को गुणा करेंगे। प्राप्त गुणनफल में दशमलव रखने के लिए आप सबसे दाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए $1 + 2 = 3$ (क्यों)? अंक गिनेंगे। अत: $2.5 \times 1.25 = 3.225$। 2.7×1.35 ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए: (i) 2.7×4 (ii) 1.8×1.2 (iii) 2.3×4.35

2. प्रश्न 1 में प्राप्त गुणनफलों को अवरोही क्रम में क्रमबद्ध कीजिए।

उदाहरण 7 एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 3.5 cm है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल समबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएँ समान होती हैं।

इसलिए, प्रत्येक भुजा की लंबाई = 3.5 cm।   अत: परिमाप $= 3 \times 3.5$ cm = 10.5 cm

उदाहरण 8 एक आयत की लंबाई 7.1 cm और इसकी चौड़ाई 2.5 cm है। आयत का क्षेत्रफल क्या है?

हल आयत की लंबाई = 7.1 cm   आयत की चौड़ाई = 2.5 cm

इसलिए आयत का क्षेत्रफल $= 7.1 \text{ cm} \times 2.5 \text{ cm} = 17.75 \text{ cm}^2$

2.6.1 दशमलव संख्याओं का 10,100 और 1000 से गुणन

रेशमा ने देखा कि $2.3 = \frac{23}{10}$ है जबकि $2.35 = \frac{235}{100}$. अत: उसने पाया कि दशमलव बिंदु की स्थिति पर निर्भर करते हुए दशमलव संख्या को 10 अथवा 100 हर वाली भिन्न के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। उसने सोचा कि यदि किसी दशमलव संख्या को 10 अथवा 100 अथवा 1000 से गुणा किया जाए तो क्या होगा?

आइए देखते हैं क्या हम दशमलव संख्याओं को 10 अथवा 100 अथवा 1000 से गुणा करने का कोई प्रतिरूप (पैटर्न) प्राप्त कर सकते हैं।

नीचे दी हुई सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 =$ ___	$12.356 \times 10 =$ ___
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ या 176.0	$2.35 \times 100 =$ ___	$12.356 \times 100 =$ ___
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ या 1760.0	$2.35 \times 1000 =$ ___	$12.356 \times 1000 =$ ___
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 =$ ___ ; $0.5 \times 1000 =$ ___		

सारणी में गुणनफल के दशमलव बिंदु के विस्थापन को देखिए। यहाँ संख्याओं को 10,100 एवं 1000 से गुणा किया गया है। $1.76 \times 10 = 17.6$ में अंक वही हैं अर्थात् दोनों तरफ़ 1, 7 और 6 है। क्या आपने इसे दूसरे गुणनफलों में भी देखा है? 1.76 और 17.6 को भी देखिए। दशमलव बिंदु दाईं अथवा बाईं, किस तरफ़ विस्थापित हुआ है ध्यान दीजिए 10 में 1 के अतिरिक्त एक शून्य है।

$1.76 \times 100 = 176.0$ में, 1.76 एवं 176.0 को देखिये कि किस तरफ और कितने स्थानों से दशमलव बिंदु का विस्थापन हुआ है। दशमलव बिंदु दाईं तरफ़ दो स्थानों से विस्थापित हुआ है।

ध्यान दीजिए 100 में 1 के अतिरिक्त दो शून्य है।

क्या आप दूसरे गुणनफलों में भी दशमलव बिंदु का इसी प्रकार का विस्थापन देखते हैं?

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) 0.3×10

(ii) 1.2×100

(iii) 56.3×1000

इस प्रकार हम कहते हैं कि जब किसी दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल के अंक वही होते हैं जो अंक दशमलव संख्या में होते हैं परंतु गुणनफल में दशमलव बिंदु दाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित होता है जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं। इन प्रेक्षणों के आधार पर अब हम कह सकते हैं कि:

$$0.07 \times 10 = 0.7,\ 0.07 \times 100 = 7 \text{ और } 0.07 \times 1000 = 70.$$

क्या अब आप बता सकते हैं कि $2.97 \times 10 = ?$ $\quad 2.97 \times 100 = ?$ $\quad 2.97 \times 1000 = ?$

क्या अब आप रेशमा द्वारा भुगतान किए जाने वाली राशि अर्थात् 8.50×150 रुपये, ज्ञात करने में उसकी सहायता कर सकते हैं?

प्रश्नावली 2.6

1. ज्ञात कीजिए :

(i) 0.2×6	(ii) 8×4.6	(iii) 2.71×5
(iv) 20.1×4	(v) 0.05×7	(vi) 211.02×4
(vii) 2×0.86		

2. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 5.7 cm और चौड़ाई 3 cm है।

3. ज्ञात कीजिए :

(i) 1.3×10	(ii) 36.8×10	(iii) 153.7×10
(iv) 168.07×10	(v) 31.1×100	(vi) 156.1×100
(vii) 3.62×100	(viii) 43.07×100	(ix) 0.5×10
(x) 0.08×10	(xi) 0.9×100	(xii) 0.03×1000

4. एक दुपहिया वाहन एक लीटर पैट्रोल में 55.3 km की दूरी तय करता है। 10 लीटर पैट्रोल में वह कितनी दूरी तय करेगा?

5. ज्ञात कीजिए :

(i) 2.5×0.3 (ii) 0.1×51.7 (iii) 0.2×316.8

(iv) 1.3×3.1 (v) 0.5×0.05 (vi) 11.2×0.15

(vii) 1.07×0.02 (viii) 10.05×1.05

(ix) 101.01×0.01 (x) 100.01×1.1

2.7 दशमलव संख्याओं की भाग

सविता अपनी कक्षा की सजावट के लिए एक डिजाईन तैयार कर रही थी। उसे 1.9 cm लंबाई वाली कुछ रंगीन कागज़ की पट्टियों की आवश्यकता थी। उसके पास 9.5 cm लंबाई वाली एक रंगीन कागज़ की पट्टी थी। इस पट्टी में से वह अभीष्ट लंबाई के कितने टुकड़े प्राप्त कर सकेगी। उसने सोचा शायद यह $\frac{9.5}{1.9}$ होगा। क्या यह सही है?

9.5 और 1.9 दोनों ही दशमलव संख्याएँ हैं। इसलिए हमें दशमलव संख्याओं की भाग भी जानने की आवश्यकता है।

2.7.1 10, 100 और 1000 से भाग

आइए अब हम एक दशमलव संख्या की 10, 100 और 1000 से भाग ज्ञात करते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $235.4 \div 10$

(ii) $235.4 \div 100$

(iii) $235.4 \div 1000$

आइए हम $31.5 \div 10$ ज्ञात करते हैं।

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

इसी प्रकार
$$31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \quad \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$$

आइए हम यह देखते हैं कि क्या हम संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने का कोई प्रतिरूप ज्ञात कर सकते हैं। यह संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से, संक्षिप्त विधि से भाग करने में हमारी सहायता कर सकता है।

$31.5 \div 10 = 3.15$	$231.5 \div 10 =$ ___	$1.5 \div 10 =$ ___	$29.36 \div 10 =$ ___
$31.5 \div 100 = 0.315$	$231.5 \div 100 =$ ___	$1.5 \div 100 =$ ___	$29.36 \div 100 =$ ___
$31.5 \div 1000 = 0.0315$	$231.5 \div 1000 =$ ___	$1.5 \div 1000 =$ ___	$29.36 \div 1000 =$ ___

$31.5 \div 10 = 3.15$ को लीजिए। 31.5 और 3.15 में अंक एक जैसे हैं अर्थात् 3, 1, और 5 परंतु भागफल में दशमलव बिंदु विस्थापित हो गया है। किस तरफ़ और कितने स्थानों से? दशमलव बिंदु बाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित हो गया है। ध्यान दीजिए 10 में 1 के अतिरिक्त एक शून्य है।

अब $31.5 \div 100 = 0.315$ की चर्चा करते हैं। 31.5 और 0.315 में अंक एक जैसे हैं परंतु भागफल में दशमलव बिंदु के बारे में क्या कह सकते हैं? यह बाईं तरफ दो स्थानों से विस्थापित हो गया है। ध्यान दीजिए 100 में 1 के अतिरिक्त दो शून्य हैं।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि किसी संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने पर संख्या एवं भागफल के अंक एक जैसे हैं परंतु भागफल में दशमलव बिंदु बाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित हो जाता है जितने 1 के साथ शून्य होते हैं। इस प्रेक्षण का उपयोग करते हुए अब हम शीघ्रतापूर्वक निम्नलिखित को ज्ञात करते हैं,

$$2.38 \div 10 = 0.238$$
$$2.38 \div 100 = 0.0238$$
$$2.38 \div 1000 = 0.00238$$

2.7.2 पूर्ण संख्या से दशमलव संख्या की भाग

आइए, हम $\frac{6.4}{2}$ ज्ञात करते हैं। याद कीजिए हम इसे $6.4 \div 2$ के रूप में भी लिखते हैं।

इसलिए, जैसा कि हमने भिन्नों से सीखा है

प्रयास कीजिए

(i) $35.7 \div 3 = ?$

(ii) $25.5 \div 3 = ?$

$$6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2$$
$$= \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2}$$
$$= \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

अथवा, आइए सर्वप्रथम हम 64 को 2 से भाग करते है। हम 32 प्राप्त करते हैं। 6.4 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ एक अंक है। 32 में दशमलव इस प्रकार रखिए ताकि दशमलव के दाईं तरफ़ केवल एक ही अंक रह पाए। हम फिर से 3.2 प्राप्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

(i) $43.15 \div 5 = ?$

(ii) $82.44 \div 6 = ?$

$19.5 \div 5$ ज्ञात करने के लिए पहले $195 \div 5$ ज्ञात कीजिए। हम 39 प्राप्त करते हैं। 19.5 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ एक अंक है। 39 में दशमलव बिंदु को इस प्रकार रखिए ताकि इसके दाईं तरफ़ केवल एक अंक रह पाए। आप 3.9 प्राप्त करेंगे।

अब $$12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4$$

$$= \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$$

अथवा, 1296 को 4 से भाग दीजिए। आप 324 प्राप्त करते हैं। 12.96 में दशमलव बिंदु के दाईं ओर 2 अंक हैं। 324 में इसी प्रकार दशमलव रखते हुए आप 3.24 प्राप्त करेंगे।

ध्यान दीजिए यहाँ और इससे अगले परिच्छेद में हमने केवल ऐसे विभाजनों की चर्चा की है जिनमें, दशमलव को ध्यान में न रखकर, एक संख्या को दूसरी संख्या से पूरी तरह विभाजित किया जा सकेगा अर्थात् शेषफल के रूप में शून्य प्राप्त होगा। जैसा कि $19.5 \div 5$ में, जब 195 को 5 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

यद्यपि ऐसी भी स्थितियाँ हैं जिनमें कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी तरह विभाजित नहीं की जा सकती अर्थात् हमें शेषफल के रूप में शून्य की प्राप्ति नहीं होती है। उदाहरणत: $195 \div 7$ ऐसी स्थितियों के बारे में हम अगली कक्षाओं में चर्चा करेंगे।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $15.5 \div 5$

(ii) $126.35 \div 7$

अत: $40.86 \div 6 = 6.81$

उदाहरण 9 4.2, 3.8 और 7.6 का औसत ज्ञात कीजिए।

हल 4.2, 3.8 और 7.6 का औसत होगा,

$$\frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3}$$

$$= \frac{15.6}{3} = 5.2, \text{ होगा।}$$

2.7.3 एक दशमलव संख्या का दूसरी दशमलव संख्या से भाग

आइए हम $\frac{25.5}{0.5}$ अर्थात् $25.5 \div 0.5$ ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं: $25.5 \div 0.5 = \qquad = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51$

अत: $25.5 \div 0.5 = 51$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{7.75}{0.25}$ (ii) $\frac{42.8}{0.02}$ (iii) $\frac{5.6}{1.4}$

आप क्या देखते हैं? $\frac{25.5}{0.5}$ के लिए हम पाते हैं कि 0.5 में दशमलव के दाईं तरफ़ एक अंक है। इसको 10 से भाग करने पर पूर्ण संख्या में परिवर्तित किया जा सकता है। इसी तरह से 25.5 को भी 10 से भाग करके एक भिन्न में परिवर्तित किया गया है।

अथवा हम कहते हैं कि 0.5 को 5 बनाने के लिए दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित किया गया है।

इसलिए 25.5 में भी दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित करके 225 में परिवर्तित किया गया।

अत: $22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{225}{15} = 15$

इसी प्रकार $\frac{20.3}{0.7}$ और $\frac{15.2}{0.8}$ ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम $20.55 \div 1.5$ ज्ञात करते हैं।

उपर्युक्त चर्चा के अनुसार हम इसे $205.5 \div 15$ के रूप में लिख सकते हैं। इससे हम 13.7 प्राप्त करते हैं।

$\frac{3.96}{0.4}$, $\frac{2.31}{0.3}$ ज्ञात कीजिए।

अब $\frac{33.725}{0.25}$ की चर्चा करते हैं। हम इसे $\frac{3372.5}{25}$ के रूप में लिख सकते हैं (कैसे?) और हम 134.9 के रूप में भागफल प्राप्त करते हैं। आप $\frac{27}{0.03}$ कैसे ज्ञात करेंगे? हम जानते हैं कि 27 को 27.0 के रूप में लिखा जा सकता है।

इसलिए $\frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = ?$

उदाहरण 10 एक समबहुभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 2.5 cm है। बहुभुज का परिमाप 12.5 cm है। इस बहुभुज की कितनी भुजाएँ हैं?

हल समबहुभुज का परिमाप इसकी सभी समान भुजाओं की लंबाई का योग होता है = 12.5 cm

प्रत्येक भुजा की लंबाई = 2.5 cm

अतः भुजाओं की संख्या = $\frac{12.5}{2.5} = \frac{125}{25} = 5$

बहुभुज की 5 भुजाएँ हैं।

उदाहरण 11 एक कार 2.2 घंटे में 89.1 km की दूरी तय करती है। कार द्वारा 1 घंटे में तय की गई औसत दूरी कितनी है?

हल कार द्वारा तय की गई दूरी = 89.1 km

इस दूरी को तय करने में लिया गया समय = 2.2 घंटे

इसलिए कार द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी $= \frac{89.1}{2.2}$

$= \frac{891}{22} = 40.5$ km

प्रश्नावली 2.7

1. ज्ञात कीजिए :
   (i) $0.4 \div 2$ (ii) $0.35 \div 5$ (iii) $2.48 \div 4$
   (iv) $65.4 \div 6$ (v) $651.2 \div 4$ (vi) $14.49 \div 7$
   (vii) $3.96 \div 4$ (viii) $0.80 \div 5$
2. ज्ञात कीजिए :
   (i) $4.8 \div 10$ (ii) $52.5 \div 10$ (iii) $0.7 \div 10$
   (iv) $33.1 \div 10$ (v) $272.23 \div 10$ (vi) $0.56 \div 10$
   (vii) $3.97 \div 10$
3. ज्ञात कीजिए :
   (i) $2.7 \div 100$ (ii) $0.3 \div 100$ (iii) $0.78 \div 100$
   (iv) $432.6 \div 100$ (v) $23.6 \div 100$ (vi) $98.53 \div 100$

4. ज्ञात कीजिए :

(i) $7.9 \div 1000$ (ii) $26.3 \div 1000$

(iii) $38.53 \div 1000$ (iv) $128.9 \div 1000$ (v) $0.5 \div 1000$

5. ज्ञात कीजिए :

(i) $7 \div 3.5$ (ii) $36 \div 0.2$ (iii) $3.25 \div 0.5$

(iv) $30.94 \div 0.7$ (v) $0.5 \div 0.25$ (vi) $7.75 \div 0.25$

(vii) $76.5 \div 0.15$ (viii) $37.8 \div 1.4$ (ix) $2.73 \div 1.3$

6. एक गाड़ी 24 लीटर पैट्रोल में 43.2 km की दूरी तय करती है। यह गाड़ी एक लिटर पैट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी?

हमने क्या चर्चा की?

1. हमने पिछली कक्षा में भिन्न एवं दशमलव के बारे में, तथा उन पर योग एवं व्यवकलन की संक्रियाओं सहित अध्ययन किया है।

2. अब हमने भिन्नों एवं दशमलवों पर गुणन एवं भाग की संक्रियाओं का अध्ययन किया है।

3. हमने अध्ययन किया है कि भिन्नों को कैसे गुणा किया जाए। दो भिन्नों को गुणा करने के लिए उनके अंशों एवं हरों को पृथक्-पृथक् गुणा किया जाता है और फिर गुणनफल को $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखा जाता है।

उदाहरणार्थ $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

4. भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में काम करती है।

उदाहरणत: 2 का $\frac{1}{2}$ होता है $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

5. (a) दो उचित भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से कम होता है।

(b) एक उचित और एक विषम भिन्न का गुणनफल विषम भिन्न से कम होता है और उचित भिन्न से अधिक होता है।

(c) दो विषम भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।

6. एक भिन्न का व्युत्क्रम इसके अंश और हर को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है।

7. हमने देखा है कि दो भिन्नों को कैसे भाग दिया जाता है :

(a) एक पूर्ण संख्या को किसी भिन्न से भाग करते समय हम पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरणत: $2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

(b) एक भिन्न को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए हम भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरणत: $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

(c) एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करने के लिए हम पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। इसलिए $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$.

8. हमने यह भी सीखा है कि दो दशमलव संख्याएँ कैसे गुणा की जाती हैं। दो दशमलव संख्याओं को गुणा करने के लिए सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं। दोनों दशमलव संख्याओं में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ अंकों की संख्या को गिनते हैं। गिनी हुई अंकों की संख्या का योग ज्ञात करते हैं। सबसे दाएँ स्थान से अंकों को गिनते हुए गुणनफल में दशमलव बिंदु रखा जाता है। यह गिनती पूर्व में प्राप्त योग के समान होनी चाहिए।

उदाहरणत: $0.5 \times 0.7 = 0.35$

9. एक दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से गुणा करने के लिए हम उस संख्या में दशमलव बिंदु को दाईं तरफ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं।

अत: $0.53 \times 10 = 5.3$, $0.53 \times 100 = 53$, $0.53 \times 1000 = 530$

10. हमने देखा है कि दशमलव संख्याएँ कैसे विभाजित की जाती है।

(a) एक दशमलव संख्या को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं। तब भागफल में दशमलव बिंदु को वैसे ही रखा जाता है जैसे दशमलव संख्या में।

उदाहरणत: $8.4 \div 4 = 2.1$

ध्यान दीजिए हम यहाँ पर केवल ऐसे विभाजनों की बात कर रहे हैं जिनमें शेषफल शून्य है।

(b) एक दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने के लिए दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु को बाईं तरफ़ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं। इस प्रकार भागफल की प्राप्ति होती है।

इसलिए, $23.9 \div 10 = 2.39, 23.9 \div 100 = 0.239$, $23.9 \div 1000 = 0.0239$

(c) दो दशमलव संख्याओं को भाग करते समय सर्वप्रथम हम दोनों संख्याओं में दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ समान स्थानों से विस्थापित करते हैं और तब भाग देते हैं। अत: $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$.

अध्याय 3

आँकड़ों का प्रबंधन

3.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने विभिन्न प्रकार के आँकड़ों के साथ कार्य किया था। आपने आँकड़ों को एकत्रित करना, उनको सारणीबद्ध करना तथा उन्हें दंड आलेखों (bar graphs) के रूप में प्रदर्शित करना सीखा था। आँकड़ों का संग्रह, आलेखन और प्रस्तुतीकरण, हमारे अनुभवों को संगठित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं। इस अध्याय में, हम इस ओर एक कदम और आगे बढ़ेंगे । आपके सम्मुख कुछ अन्य प्रकार के आँकड़े और आलेख आएँगे। आप समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं, टेलीविजन और अन्य साधनों से, विभिन्न प्रकार के आँकड़ों को देख चुके हैं। आप यह भी जानते हैं कि सभी आँकड़े हमें किसी न किसी प्रकार की सूचना अवश्य देते हैं। आइए आँकड़ों के कुछ सामान्य रूपों को देखें, जो आपके सम्मुख आते रहते हैं।

सारणी 3.1

नगरों के तापमान 20.6.2006 को		
	अधिकतम	न्यूनतम
अहमदाबाद	38°C	29°C
अमृतसर	37°C	26°C
बेंगलूर	28°C	21°C
चेन्नई	36°C	27°C
दिल्ली	38°C	28°C
जयपुर	39°C	29°C
जम्मू	41°C	26°C
मुंबई	32°C	27°C

सारणी 3.2

फुटबॉल विश्व कप 2006	
यूक्रेन ने सऊदी अरब को हराया	4 - 0 से
स्पेन ने ट्यूनिशिया को हराया	3 - 1 से
स्विटजरलैंड ने टोगो को हराया	2 - 0 से

हिंदी के एक टेस्ट में 5 विद्यार्थियों द्वारा 10 में से प्राप्त किए गए अंक हैं : 4, 5, 8, 6, 7

सारणी 3.3

एक कक्षा में साप्ताहिक अनुपस्थिति दर्शाने वाले आँकड़े	
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	-
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	
	एक बच्चे को निरूपित करता है

आँकड़ों के ये संग्रह आपको क्या बताते हैं?

उदाहरणार्थ, आप यह कह सकते हैं कि 20–6–2006 को जम्मू का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था (सारणी 3.1) या हम कह सकते हैं कि बुधवार को कोई बच्चा अनुपस्थित नहीं था (सारणी 3.3)।

क्या हम इन आँकड़ों को किसी अलग तरीके से संगठित और प्रस्तुत कर सकते हैं, ताकि उनका विश्लेषण करना और उनकी व्याख्या करना बेहतर हो जाए? इस अध्याय में, हम इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

3.2 आँकड़ों का संग्रह

नगरों के तापमानों के बारे में आँकड़े (सारणी 3.1) हमें अनेक बातें बता सकते हैं, परंतु ये आँकड़े हमें यह नहीं बता सकते कि पूरे वर्ष में किस नगर का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था। यह जानने के लिए हमें इन नगरों में से प्रत्येक नगर के पूरे वर्ष के दौरान रिकॉर्ड किए गए अधिकतम तापमानों से संबंधित आँकड़े इकट्ठे करने पड़ेंगे। ऐसी स्थिति में, सारणी 3.1 में दिए गए वर्ष के एक विशिष्ट दिन का तापमान–चार्ट पर्याप्त नहीं है।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि शायद आँकड़ों का एक दिया हुआ संग्रह हमें उससे संबंधित एक विशिष्ट सूचना न दे पाए। इसके लिए, हमें उस विशिष्ट सूचना को ध्यान में रखते हुए, आँकड़ों को इकट्ठे करने की आवश्यकता है। उपरोक्त स्थिति में, हमें जो विशिष्ट सूचना चाहिए थी वह यह थी, कि पूरे वर्ष के दौरान इन नगरों के अधिकतम तापमान क्या रहे, जो हमें सारणी 3.1 से प्राप्त नहीं हो सके थे। इस प्रकार, **आँकड़ों को इकट्ठे करने से पहले, हमें यह जानना आवश्यक है कि हम इनका उपयोग किसके लिए करेंगे।**

नीचे कुछ स्थितियाँ दी जा रही हैं।

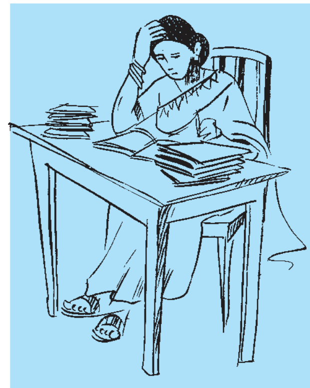
आप अध्ययन करना चाहते हैं :

– गणित में अपनी कक्षा के प्रदर्शन का
– फुटबॉल या क्रिकेट में भारत के प्रदर्शन का
– किसी क्षेत्र में महिला साक्षरता दर का, अथवा
– आपके आस-पास के परिवारों में 5 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या का।

उपरोक्त स्थितियों में, आपको किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता है? जब तक आप उपयुक्त आँकड़े इकट्ठे नहीं करेंगे, आप वांछित जानकारी नहीं प्राप्त कर सकते हैं। प्रत्येक के लिए, उपयुक्त आँकड़े क्या हैं?

अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और पहचानिए कि प्रत्येक स्थिति में किन आँकड़ों की आवश्यकता होगी। कुछ आँकड़ों को इकट्ठे करना सरल है और कुछ को इकट्ठे करना कठिन।

3.3 आँकड़ों का संगठन



जब हम आँकड़ों को संग्रहित करते हैं, तो हमें उन्हें रिकॉर्ड करके संगठित करना होता है। हमें इसकी क्यों आवश्यकता पड़ती है? निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए:

कक्षा अध्यापिका सुश्री नीलम यह जानना चाहती थी कि अंग्रेज़ी में बच्चों का प्रदर्शन कैसा रहा? वह विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्नलिखित प्रकार से लिखती है:

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

इस रूप में, आँकड़े सरलता से समझने योग्य नहीं थे। उन्हें यह भी ज्ञात नहीं हुआ कि विद्यार्थियों के बारे में उनकी धारणाएँ उनके प्रदर्शन से मेल करती हैं या नहीं। नीलम के एक सहकर्मी ने उन आँकड़ों को निम्नलिखित रूप में इकट्ठे करने में उसकी सहायता की। (सारणी 3.4):

सारणी 3.4

रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक	रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक
1	अजय	23	6	गोविंद	46
2	अरमान	35	7	जय	13
3	आशीष	48	8	कविता	27
4	दीप्ति	30	9	मनीषा	32
5	फैज़ान	25	10	नीरज	38

इस तरह नीलम यह समझ सकी कि किस छात्र ने कितने अंक प्राप्त किए। लेकिन वह कुछ और जानकारी चाहती थी। दीपिका ने उन आँकड़ों को दूसरी तरह से प्रदर्शित किया

सारणी 3.5

रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक	रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक
3	आशिष	48	4	दीप्ति	30
6	गोविंद	46	8	कविता	27
10	नीरज	38	5	फैजान	25
2	अरमान	35	1	अजय	23
9	मनीषा	32	7	जय	13

अब नीलम यह जानने में समर्थ हो गई कि किसने सबसे अच्छा प्रदर्शन किया है और किसको सहायता की आवश्यकता है।

हमारे सामने आने वाले अनेक आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं। हमारे स्कूल के रजिस्टर, प्रगति रिपोर्ट, अभ्यास-पुस्तिकाओं में क्रमानुसार सूची, तापमान के रिकॉर्ड तथा अन्य अनेक आँकड़े

सारणीबद्ध (tabular) रूप में होते हैं। क्या आप कुछ और आँकड़ों के बारे में सोच सकते हैं, जो सारणीबद्ध रूप में हैं?

जब हम आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी में रख लेते हैं, तो उन्हें समझना और उनकी व्याख्या करना सरल हो जाता है।

प्रयास कीजिए

अपनी कक्षा के कम से कम 20 बच्चों (लड़के और लड़कियों) को अलग-अलग तौलिए (किलोग्राम में)। प्राप्त आँकड़ों को संगठित कीजिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयत्न कीजिए :

(i) सबसे अधिक भार किसका है? (ii) कौन-सा भार अधिकांश बच्चों का है?

(iii) आपके भार और आपके सबसे अच्छे मित्र के भार में क्या अंतर है?

3.4 प्रतिनिधि मान

आप 'औसत' (average) शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगे:

- ईशा अपनी पढ़ाई पर प्रतिदिन औसतन लगभग 5 घंटे का समय व्यतीत करती है।
- इस समय वर्ष का औसत तापमान 40 डिग्री (सेल्सियस) है।
- मेरी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 12 वर्ष है।
- एक स्कूल की वार्षिक परीक्षा के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 98 प्रतिशत थी।

इसी प्रकार के अनेक कथन हो सकते हैं। ऊपर दिए हुए कथनों के बारे में सोचिए।

क्या आप सोचते हैं कि पहले कथन में बताया गया बच्चा प्रतिदिन ठीक 5 घंटे पढ़ता है?

अथवा, क्या उस विशेष समय पर, दिए हुए स्थान का तापमान सदैव 40 डिग्री रहता है?

अथवा, क्या उस कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 12 वर्ष है? स्पष्टत: इन प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं'।

तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं?

औसत से हम समझते हैं कि ईशा प्राय: एक दिन में 5 घंटे पढ़ती है। कुछ दिन वह इससे कम घंटे पढ़ती है और कुछ दिन इससे अधिक घंटे पढ़ती है।

इसी प्रकार, 40 डिग्री सेल्सियस के औसत तापमान का अर्थ है कि वर्ष के इस समय पर तापमान प्राय: 40 डिग्री सेल्सियस रहता है। कभी वह 40° C से कम रहता है और कभी 40° C से अधिक भी रहता है।

इस प्रकार, हम यह अनुभव करते हैं कि औसत एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों (observations) या आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति (central tendency) को निरूपित करती (या दर्शाती) है। क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य (value) के आँकड़ों के बीच में होता है। इसलिए हम कहते हैं कि औसत, आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक (measure)

है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि (representative) या केंद्रीय मानों (central values) की आवश्यकता होती है। इनमें से एक प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** या **समांतर माध्य** (**arthmetic mean**) है।

3.5 अंकगणितीय माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अंधिकांशत: प्रयोग किए जाना वाला प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** है, संक्षेप में इसे **माध्य** (mean) भी कहते हैं। इसे अच्छी प्रकार से समझने के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण को देखें :

दो बर्तनों में क्रमश: 20 लीटर और 60 लीटर दूध है। यदि दोनों बर्तनों में बराबर–बराबर दूध रखा जाए, तो प्रत्येक बर्तन में कितना दूध होगा? जब हम इस प्रकार का प्रश्न पूछते हैं, तब हम अंकगणितीय माध्य ज्ञात करने के लिए कहते हैं।

उपरोक्त स्थिति में, औसत या अंकगणितीय माध्य होगा :

$$\frac{\text{दूध की कुल मात्रा}}{\text{बर्तनों की संख्या}} = \frac{20+60}{2} \text{ लीटर} = 40 \text{ लीटर}$$

इस प्रकार, प्रत्येक बर्तन में 40 लीटर दूध होगा।

औसत या अंकगणितीय माध्य (A.M.) या केवल माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 आशिष तीन क्रमागत दिनों में क्रमश: 4 घंटे, 5 घंटे और 3 घंटे पढ़ता है। उसके प्रतिदिन पढ़ने का औसत समय क्या है?

हल आशिष के पढ़ने का औसत समय होगा :

$$\frac{\text{पढ़ाई में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिनमें पढ़ाई की}} = \frac{4+5+3}{3} \text{ घंटे} = 4 \text{ घंटे प्रतिदिन}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि आशिष प्रतिदिन 4 घंटे के औसत से पढ़ाई करता है।

उदाहरण 2 एक बल्लेबाज ने 6 पारियों (innings) में निम्नलिखित संख्याओं में रन बनाए :
36, 35, 50, 46, 60, 55

एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल कुल रन = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282

माध्य ज्ञात करने के लिए, हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसे प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अत:, इस स्थिति में

$$\text{माध्य} = \frac{282}{6} = 47.$$

इस प्रकार, एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य 47 है।

अंकगणितीय माध्य कहाँ स्थित है?

प्रयास कीजिए

आप पढ़ाई में व्यतीत किए गए अपने समय (घंटों में) का पूरे सप्ताह का औसत किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरणों में दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए तथा निम्नलिखित विषय में सोचिए:

- क्या माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा है?
- क्या यह प्रत्येक प्रेक्षण से छोटा है?

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। इसी प्रकार का एक और उदाहरण बनाइए और इन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

आप पाएँगे कि माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है।

विशिष्ट रूप में, दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है।

उदाहरणार्थ, 5 और 11 का माध्य $\frac{5+11}{2}=8$ है, जो 5 और 11 के बीच में स्थित है।

क्या आप इस अवधारणा का प्रयोग करके, यह दर्शा सकते हैं कि दो भिन्नात्मक संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी भिन्नात्मक संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं? उदाहरणार्थ $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच में आपको इनका औसत मिलेगा $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$ और फिर $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{8}$ के बीच में इनका औसत होगा $\frac{7}{16}$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. एक सप्ताह कि अपनी नींद में व्यतीत किए गए समय (घंटों में) का माध्य ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच कम से कम पाँच संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3.5.1 प्रसार या परिसर

सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार का एक अनुमान लग जाता है। इसे सबसे बड़े प्रेक्षण में से सबसे छोटे प्रेक्षण को घटा कर ज्ञात किया जा सकता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का **प्रसार** या **परिसर** (**range**) कहते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण देखिए :

उदाहरण 3 एक स्कूल के 10 अध्यापकों की वर्षों में आयु इस प्रकार है :

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है? तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है?

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है?

हल

(i) आयु को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

हमें ज्ञात होता है कि सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु 54 वर्ष है तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु 23 वर्ष है।

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर = (54 –23) वर्ष = 31 वर्ष है।

(iii) अध्यापकों की माध्य आयु

$$= \frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10} \text{ वर्ष}$$

$$= \frac{350}{10} \text{ वर्ष } = 35 \text{ वर्ष}$$

प्रश्नावली 3.1

1. अपनी कक्षा के किन्हीं दस (10) विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का परिसर ज्ञात कीजिए।

2. कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीबद्ध रूप में संगठित कीजिए :

   4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

   (i) सबसे बड़ा अंक कौन-सा है? (ii) सबसे छोटा अंक कौन-सा है?

   (iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है? (iv) अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

3. प्रथम 5 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 8 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :

   58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100.

   उसका माध्य स्कोर (score) या रन ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चार खेलों में अर्जित किए गए अंकों को दर्शाती है:

खिलाड़ी	खेल 1	खेल 2	खेल 3	खेल 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	खेला नहीं	13

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) प्रत्येक खेल में A द्वारा अर्जित औसत अंक ज्ञात करने के लिए, माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रत्येक खेल में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए, आप कुल अंकों को 3 से भाग देंगे या 4 से? क्यों?

(iii) B ने सभी चार खेलों में भाग लिया है। आप उसके अंकों का माध्य किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

(iv) किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा है?

6. विज्ञान की एक परीक्षा में, विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 और 75 हैं। ज्ञात कीजिए :

(i) विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त सबसे अधिक अंक और सबसे कम अंक

(ii) प्राप्त अंकों का परिसर

(iii) समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक

7. छह क्रमागत वर्षों में एक स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी :
1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820
इस समय काल में स्कूल के विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

8. एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित रूप से रिकॉर्ड की गई:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
वर्षा (mm)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) उपरोक्त आँकड़ों से वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सप्ताह की माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।

(iii) कितने दिन वर्षा, माध्य वर्षा से कम रही?

9. 10 लड़कियों की ऊँचाइयाँ cm में मापी गईं और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए:
135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.

(i) सबसे लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(ii) सबसे छोटी लड़की की लंबाई क्या है?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है?

(iv) लड़कियों की माध्य ऊँचाई (लंबाई) क्या है?

(v) कितनी लड़कियों की लंबाई, माध्य लंबाई से अधिक है?

3.6 बहुलक

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं केवल माध्य ही केंद्रीय प्रवृत्ति की माप या प्रतिनिधि मान नहीं है। विभिन्न प्रकार की आवश्यकताओं के अनुसार अन्य प्रकार कि केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों का प्रयोग किया जाता है।

निम्नलिखित उदाहरण को देखिए :

कमीज़ों के विभिन्न मापों (साइज़ों) की साप्ताहिक माँग को ज्ञात करने के लिए, एक दुकानदार 90 cm, 95 cm, 100 cm, 105 cm और 110 cm मापों की कमीज़ों की बिक्री का रिकॉर्ड (record) रखता है। एक सप्ताह का रिकॉर्ड इस प्रकार है :

माप (cm में)	90	95	100	105	110	योग
बेची गई कमीज़ों की संख्या	8	22	32	37	6	**105**

यदि वह बेची गई कमीज़ों की संख्या का माध्य ज्ञात करे, तो क्या आप सोचते हैं कि वह यह निर्णय ले पाएगा कि किस माप की कमीज़ें स्टॉक (stock) में रखी जाएँ?

$$\text{बेची गई कमीज़ों का माध्य} = \frac{\text{बेची गई कमीज़ों की कुल संख्या}}{\text{कमीज़ों के विभिन्न मापों के प्रकार}} = \frac{105}{5} = 21$$

क्या वह प्रत्येक माप की 21 कमीज़ें स्टॉक में रखे? यदि वह ऐसा करता है, तो क्या वह अपने ग्राहकों की आवश्यकताओं को पूरा कर पाएगा?

उपरोक्त रिकॉर्ड को देखकर, दुकानदार 95 cm, 100 cm और 105 cm मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय लेता है। वह अन्य मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय, उनके कम खरीददारों को देखते हुए, आगे के लिए टाल देता है।

एक अन्य उदाहरण देखिए :

रेडीमेड (readymade) कपड़ों का एक दुकानदार कहता है, 'मेरे द्वारा सबसे अधिक माप की बेची गईं कमीज़ का माप 90 cm है।'

ध्यान दीजिए कि यहाँ भी दुकानदार की रुचि विभिन्न मापों की बेची गई कमीज़ों की संख्याओं में ही है। वह कमीज़ के उस माप को देख रहा है, जो सबसे अधिक बिकती है। यह आँकड़ों का एक अन्य **प्रतिनिधि मान** है। सबसे अधिक बिक्री 105 cm माप की कमीज़ों की बिक्री है। यह प्रतिनिधि मान (105) आँकड़ों का **बहुलक (mode)** कहलाता है।

दिए हुए प्रेक्षणों के एक समूह में, सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण इस समूह का बहुलक कहलाता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित के बहुलक ज्ञात कीजिए :

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4,

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14, 18, 14

उदाहरण 4 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए:

1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

हल समान मान वाली संख्याओं को एक साथ व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

इन आँकड़ों का बहुलक 2 है, क्योंकि यह अन्य प्रेक्षणों की तुलना में अधिक बार आता है।

3.6.1 बड़े आँकड़ों का बहुलक

यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान मान वाले प्रेक्षणों के रूप में व्यवस्थित करना और फिर उनको गिनना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में, हम आँकड़ों को सारणीबद्ध करते हैं, जैसा कि आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं, आँकड़ों की सारणी बनाने का कार्य मिलान चिह्नों (tally marks) से प्रारंभ करते हुए, प्रेक्षणों की बारंबारताएँ (frequencies) बना कर पूरा किया जा सकता है।

निम्न उदाहरणों को देखिए :

उदाहरण 5 टीमों के एक समूह में खेले गए फुटबॉल के मैचों में, जीतने के अंतर गोलों में (in goals) निम्नलिखित हैं :

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,
6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल आइए इन आँकड़ों को एक सारणी के रूप में रखें :

जीतने का अंतर	मिलान चिह्न	मैचों की संख्या
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
3	~~||||~~ ||	7
4	~~||||~~	5
5	|||	3
6	||	2
	योग	**40**

इस सारणी को देखकर, हम तुरंत यह कह सकते हैं कि '2' बहुलक है, क्योंकि 2 सबसे अधिक बार आया है। इस प्रकार, अधिकांश मैच 2 गोलों के अंतर से जीते गए हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं?

उदाहरण 6 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

हल यहाँ 2 और 5 दोनों ही तीन बार आए हैं। अत:, ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक हैं।

इन्हें कीजिए

1. अपनी कक्षा के साथियों की वर्षों में आयु रिकॉर्ड कीजिए और फिर उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

2. अपनी कक्षा के साथियों की cm में लंबाइयाँ रिकॉर्ड कीजिए और उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:

12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

2. 25 बच्चों की ऊँचाइयाँ (cm में) नीचे दी गई हैं :

168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

उनकी लंबाइयों का बहुलक क्या है? यहाँ बहुलक से हम क्या समझते हैं?

जहाँ माध्य हमें आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों का औसत प्रदान करता है, वहीं बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को दर्शाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :

(a) आपको एक दावत में बुलाए गए 25 व्यक्तियों के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या के बारे में निर्णय लेना है।

(b) कमीज़ें बेचने वाले एक दुकानदार को अपने स्टॉक की आपूर्ति करनी है।

(c) हमें अपने घर के लिए आवश्यक दरवाज़े की ऊँचाई ज्ञात करनी है।

(d) एक पिकनिक (picnic) पर जाते समय, अगर प्रत्येक व्यक्ति के लिए केवल एक ही फल खरीदा जाना है, तब, हमें कौन-सा फल मिलेगा?

इन स्थितियों में हम किसमें बहुलक का एक अच्छे आकलन के रूप में प्रयोग कर सकते हैं?

पहले कथन पर विचार कीजिए। मान लीजिए प्रत्येक व्यक्ति के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या इस प्रकार है : 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

इन आँकड़ों का बहुलक 2 चपाती है। यदि हम बहुलक को आँकड़ों के प्रतिनिधि मान के रूप में प्रयोग करें, तो हमें प्रति व्यक्ति 2 चपातियों की दर से 25 व्यक्तियों के लिए केवल 50

चपातियों की आवश्यकता होगी। परंतु निश्चय ही यह चपातियाँ सभी व्यक्तियों को अपर्याप्त होंगी। इस स्थिति में क्या **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?

तीसरे कथन के लिए, दरवाज़े की ऊँचाई, उन व्यक्तियों की ऊँचाई से संबंधित है जो उस दरवाज़े का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए कि घर में 5 बच्चे और 4 वयस्क हैं जो उस दरवाज़े का प्रयोग करते हैं तथा 5 बच्चों में से प्रत्येक की ऊँचाई 135 cm के आसपास है। ऊँचाइयों का बहुलक 135 cm है। क्या हमें एक ऐसा दरवाज़ा लेना चाहिए जिसकी ऊँचाई 144 cm है? क्या सभी वयस्क इस दरवाज़े में से निकल पाएँगे? यह स्पष्ट है कि इन आँकड़ों के लिए भी बहुलक एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान नहीं है। क्या यहाँ **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?

क्यों नहीं? दरवाज़े की ऊँचाई के बारे में निर्णय लेने के लिए, ऊँचाई के किस प्रतिनिधि मान का प्रयोग किया जाए?

इसी प्रकार, शेष कथनों का विश्लेषण कीजिए तथा इन स्थितियों के लिए उपयुक्त प्रतिनिधि मान ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और

(a) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में माध्य का प्रयोग उपयुक्त होगा।

(b) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में बहुलक का प्रयोग उपयुक्त होगा।

3.7 माध्यक

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में अंकगणितीय माध्य एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है तथा कुछ स्थितियों में बहुलक एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

आइए अब एक अन्य उदाहरण देखें। 17 विद्यार्थियों के एक समूह पर विचार कीजिए, जिनकी ऊँचाई cm में निम्नलिखित हैं :

106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

खेल की अध्यापिका कक्षा को ऐसे दो समूहों में इस तरह विभाजित करना चाहती है कि प्रत्येक समूह में विद्यार्थियों की संख्या बराबर हो तथा एक समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ एक विशेष ऊँचाई से कम हों और दूसरे समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ उस विशेष ऊँचाई से अधिक हों। वह ऐसा किस प्रकार करेगी?

आइए उसके पास जो विभिन्न विकल्प हैं, उन्हें देखें :

(i) वह माध्य ज्ञात कर सकती है। यह माध्य है :

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$=\frac{1930}{17}=113.5$$

अत:, अध्यापिका कक्षा के विद्यार्थियों को यदि ऐसे दो समूहों में विभाजित करती है, जिनमें से एक समूह में माध्य ऊँचाई से कम ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं और दूसरे समूह में माध्य ऊँचाई से अधिक ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं। तब, इन समूहों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर नहीं रहती हैं क्योंकि एक समूह में 7 सदस्य होंगे तथा दूसरे समूह में 10 सदस्य होंगे।

(ii) उसके पास दूसरा विकल्प है कि वह बहुलक ज्ञात करे। सबसे अधिक बारंबारताओं वाला प्रेक्षण 115 cm है और इसे बहुलक लिया जाएगा।

बहुलक से नीचे वाले 7 विद्यार्थी हैं तथा 10 विद्यार्थी बहुलक के बराबर या उससे ऊपर हैं। अत:, हम कक्षा के विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित नहीं कर सकते।

इसलिए, आइए अब हम एक अन्य वैकल्पिक प्रतिनिधि मान या केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक के बारे में सोचें। ऐसा करने के लिए, हम पुन: दी हुई ऊँचाइयों (cm में) को देखते हैं और इन्हें आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। हम निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं :

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

इन आँकड़ों में मध्य मान (middle value) 115 है, क्योंकि यह विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित करता है जिनमें से प्रत्येक में 8 विद्यार्थी हैं। यह मान आँकड़ों का **माध्यक (median)** कहलाता है। माध्यक उस मान को बताता है, जो आँकड़ों के मध्य में स्थित होता है (उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर) तथा आधे प्रेक्षण इससे अधिक मान वाले होते हैं और आधे प्रेक्षण इससे कम मान वाले होते हैं। खेल की अध्यापिका इस बीच वाले विद्यार्थी को इस खेल में निर्णायक (refree) बना सकती है।

यहाँ हम केवल उन स्थितियों को ही लेंगे, जहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

प्रयास कीजिए

आपके एक मित्र ने दिए हुए आँकड़ों के माध्यक और बहुलक ज्ञात किए। उस मित्र द्वारा की गई त्रुटि, यदि कोई हो तो, बताइए और सही कीजिए:

35, 32, 35, 42, 38, 32, 34

माध्यक = 42, बहुलक = 32

इस प्रकार, दिए गए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद उनका बीचों-बीच (मध्य) वाला मान उनका **माध्यक** होता है।

ध्यान दीजिए कि सामान्यत:, हमें माध्यक और बहुलक के लिए एक ही मान नहीं मिलेगा।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 7 निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए :

24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

17, 18, 24, 25, 35, 36, 46

मध्य (बीच) वाला प्रेक्षण माध्यक होता है। अत:, माध्यक 25 है।

प्रश्नावली 3.2

1. गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं:

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?

2. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं :

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

इन आँकड़ों के माध्य, बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं?

3. एक कक्षा के 15 विद्यार्थियों के भार (kg में) इस प्रकार हैं :

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

(i) इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या इनके एक से अधिक बहुलक हैं?

4. निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए :

13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14

5. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य :

(i) बहुलक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

(ii) माध्य दिए हुए आँकड़ों में से एक संख्या हो सकता है।

(iii) माध्यक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

(iv) आँकड़ों 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9 का माध्य 9 है।

3.8 भिन्न उद्देश्य के साथ दंड आलेखों का प्रयोग

पिछले वर्ष हम देख चुके हैं कि किस प्रकार एकत्रित (संग्रहित) की गई सूचनाओं को एक बारंबारता बंटन सारणी (frequency distribution table) के रूप में पहले व्यवस्थित करके और फिर इन सूचनाओं को चित्रीय रूप में चित्रालेखों (pictographs) या दंड आलेखों (bargraphs) के रूप में निरूपित किया जाता है। आप इन दंड आलेखों को देख सकते हैं और इनके बारे में निष्कर्ष निकाल सकते हैं। आप इन दंड आलेखों के आधार पर सूचनाएँ भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, आप कह सकते हैं कि सबसे लंबा दंड (bar) ही बहुलक है, यदि दंड बारंबारता निरूपित करता है।

3.8.1 एक स्केल (या मापदंड) का चुनना

हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडों द्वारा संख्याओं (आँकड़ों) का निरूपण है तथा दंडों की लंबाइयाँ बारंबारताओं और चुने गए स्केल (scale) पर निर्भर करती हैं। उदाहरणार्थ, एक दंड आलेख में, जहाँ संख्याओं को इकाइयों में दर्शाना है, आलेख एक प्रेक्षण के लिए एक इकाई लंबाई निरूपित करता है और यदि उसे संख्याओं को दहाई या सैकड़ों में दर्शाना है, तो एक इकाई लंबाई 10 या 100 प्रेक्षणों को निरूपित कर सकती है। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

उदाहरण 8 छठी और सातवीं कक्षाओं के 200 विद्यार्थियों से उनके मनपसंद रंग का नाम बताने के लिए कहा गया, ताकि यह निर्णय लिया जा सके कि उनके स्कूल के भवन का क्या रंग रखा जाए। इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

मनपसंद रंग	लाल	हरा	नीला	पीला	नारंगी
विद्यार्थियों की संख्या	43	19	55	49	34

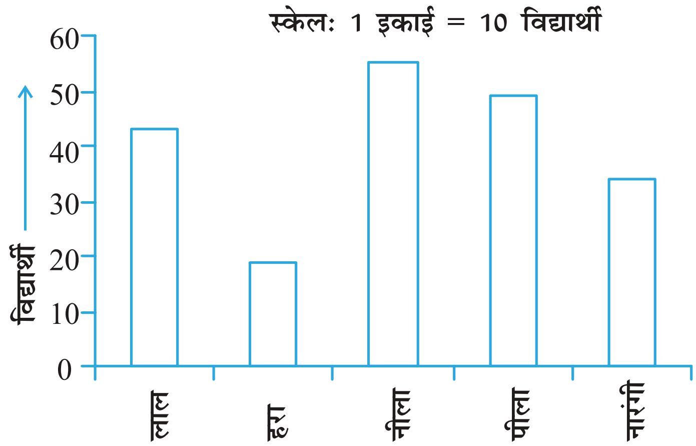
इस दंड आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) कौन–सा रंग सबसे अधिक पसंद किया जाता है और कौन–सा रंग सबसे कम पसंद किया जाता है?

(ii) कुल कितने रंग हैं? वे क्या हैं?

हल एक उपयुक्त पैमाना नीचे दर्शाए अनुसार चुनिए :

स्केल को 0 से प्रारंभ कीजिए। आँकड़ों में सबसे बड़ा मान 55 है। अत:, स्केल को 55 से कुछ अधिक, मान लीजिए 60 पर समाप्त करते हैं। अक्ष पर समान विभाजनों (divisions) का प्रयोग कीजिए, जैसे कि 10 की वृद्धियाँ। आप जानते हैं कि सभी दंड (bars) 0 और 60 के बीच स्थित होंगे। हम स्केल को इस प्रकार चुनेंगे, ताकि 0 और 60 के बीच की लंबाई न तो अधिक छोटी हो और न ही अधिक बड़ी हो। यहाँ, हम 1 इकाई = 10 विद्यार्थी लेते हैं।



फिर हम आकृति में दर्शाए अनुसार, दंड आलेख को खींचते और नामांकित करते हैं।

दंड आलेख से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

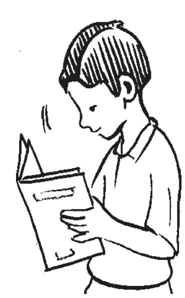
(i) नीला रंग सबसे मनपसंद रंग है (क्योंकि नीले रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे लंबा है)

(ii) हरा रंग सबसे कम मनपसंद रंग है (क्योंकि हरे रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे छोटा है)।

(iii) यहाँ पांच रंग हैं। ये हैं लाल, हरा, नीला, पीला और नारंगी (ये क्षैतिज अक्ष पर देखे जा सकते हैं)।

उदाहरण 9 निम्नलिखित आँकड़े किसी कक्षा के छ: विद्यार्थियों द्वारा (600 में से) प्राप्त किए गए कुल अंकों को दर्शाते हैं। इन्हें एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

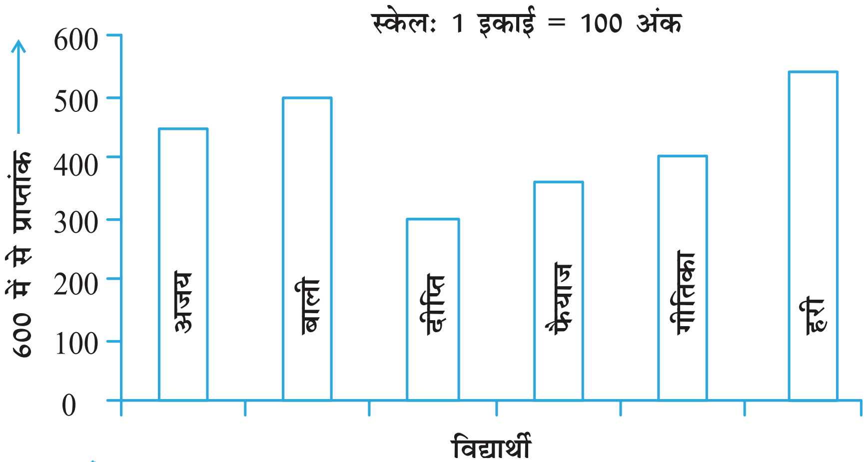
विद्यार्थी	अजय	बाली	दीप्ति	फैयाज	गीतिका	हरी
प्राप्तांक	450	500	300	360	400	540



हल

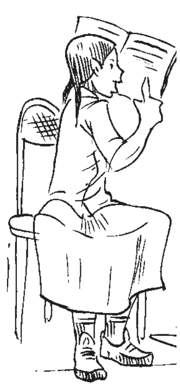
1. एक उपयुक्त स्केल चुनने के लिए, हम 100 की वृद्धियाँ लेते हुए, समान विभाजन अक्ष पर अंकित करते हैं। इस प्रकार, 1 इकाई 100 अंक निरूपित करेगी। (यदि हम 1 इकाई से 10 अंकों को निरूपित करें, तो क्या कठिनाई होगी?)

2. अब आँकड़ों को दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।



दोहरे दंड आलेख खींचना

आँकड़ों के निम्नलिखित दो समूहों पर विचार कीजिए, जो दो नगरों, आबेरदीन और मारगेट में, वर्ष के सभी बारह महीनों के लिए, धूप रहने के औसत दैनिक घंटों को दर्शाते हैं। ये नगर दक्षिणी ध्रुव के निकट स्थित हैं और इसीलिए यहाँ प्रतिदिन धूप बहुत कम घंटों के लिए रहती है।



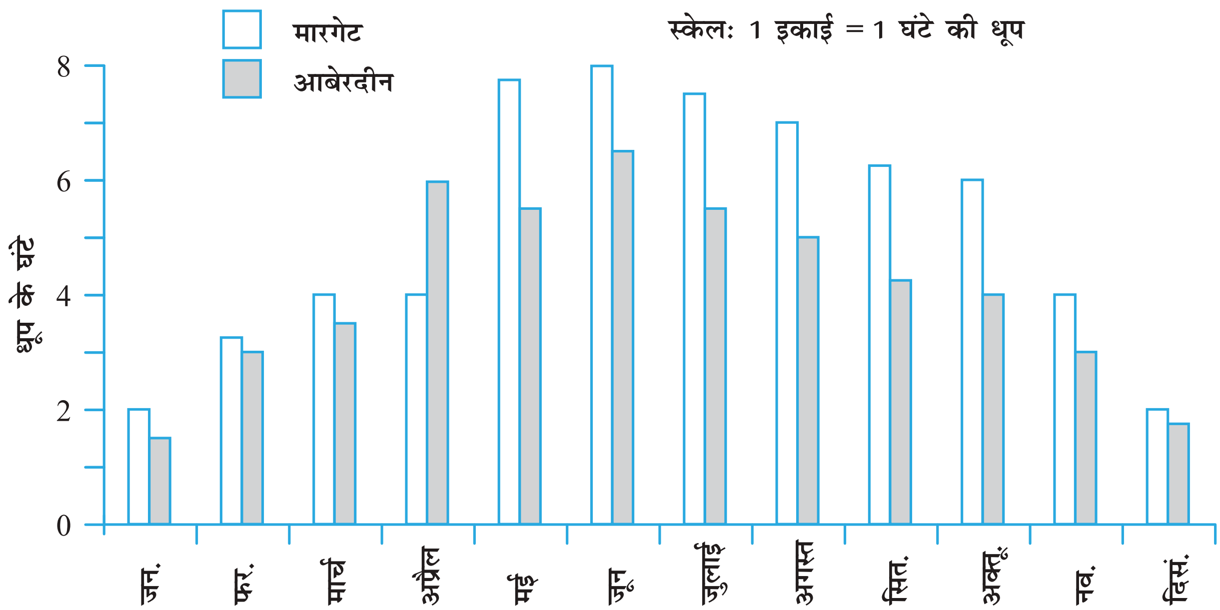
मारगेट में												
	जन.	फर.	मार्च.	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अग.	सितं.	अक्तू.	नव.	दिसं.
धूप के औसत घंटे	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2
आबेरदीन में												
धूप के औसत घंटे	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

इनके अलग-अलग दंड आलेख खींच कर आप निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं:

(i) प्रत्येक नगर में, किस महीने में अधिकतम धूप रहती है? या

(ii) प्रत्येक नगर में, किस महीने में न्यूनतम धूप रहती है?

परंतु 'एक विशेष महीने में, किस नगर में धूप अधिक घंटों तक रहती है?' जैसे प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, हमें दोनों नगरों के औसत धूप के घंटों की तुलना करने की आवश्यकता होगी। इसके लिए हम उन आलेखों को खींचना सीखेंगे, जिन्हें दोहरे दंड आलेख (double bar graphs) कहा जाता है। इनमें दोनों नगरों की सूचना दंड आलेखों द्वारा साथ-साथ दी हुई होती हैं।



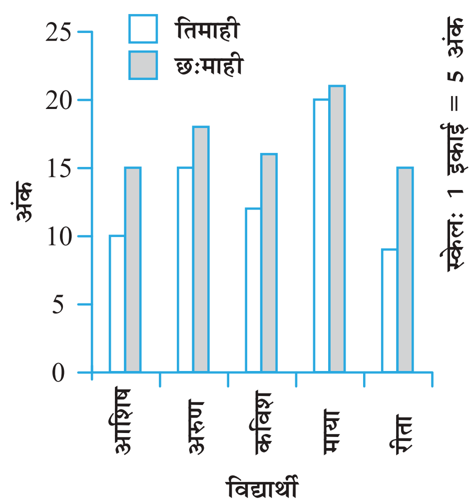
आकृति 3.1

उपरोक्त दंड आलेख (आकृति 3.1) दोनों नगरों के औसत धूप के समय को दर्शाता है। इसमें प्रत्येक महीने के लिए, हमारे पास दो दंड हैं, जिनकी ऊँचाइयाँ प्रत्येक नगर के औसत धूप के घंटों को दर्शाती हैं। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अप्रैल के महीने को छोड़कर, अन्य सभी महीनों में मारगेट में आबेरदीन की अपेक्षा धूप सदैव अधिक रहती है। आप इसी प्रकार का दंड आलेख अपने क्षेत्र या नगर के लिए भी बना सकते हैं।

आइए एक और उदाहरण लें, जो हम से अधिक संबंधित है।

उदाहरण 10 गणित की अध्यापिका यह जानना चाहती है कि तिमाही परीक्षा के बाद, उसके द्वारा पढ़ाई में अपनाई गई नई तकनीक का कोई प्रभाव पड़ा या नहीं। वह सबसे कमजोर 5 बच्चों द्वारा तिमाही परीक्षा (25 में से) और छ:माही परीक्षा (25 में से) में प्राप्त किए अंकों को लेती है, जो इस प्रकार हैं :

विद्यार्थी	आशिष	अरुण	कविश	माया	रीता
तिमाही	10	15	12	20	9
छ:माही	15	18	16	21	15

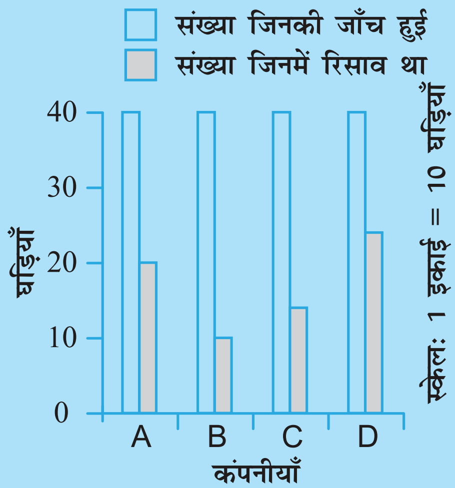


हल पहले वह संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार एक दोहरा दंड आलेख (double bar graph) खींचती है। दंडों को देख कर लगता है कि विद्यार्थियों के प्रदर्शन में बहुत सुधार हुआ है। अत:, वह निर्णय लेती है कि उसे अपनी नई शिक्षण तकनीक जारी रखनी चाहिए।

क्या आप कुछ अन्य स्थितियों के बारे में सोचते हैं, जहाँ आप दोहरे दंड आलेखों का प्रयोग कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. दिया हुआ दंड आलेख (आकृति 3.2), विभिन्न कंपनियों द्वारा बनाई गई जल प्रतिरोधी (Water resistant) घड़ियों की जाँच के लिए किए गए एक सर्वेक्षण को दर्शाता है। इनमें से प्रत्येक कंपनी ने यह दावा किया कि उनकी घड़ियाँ जल प्रतिरोधी हैं। एक जाँच के बाद उपरोक्त परिणाम प्राप्त हुए हैं।
   (a) क्या आप प्रत्येक कंपनी के लिए, रसाव (Leak) वाली घड़ियों की संख्या की, जाँच की गई कुल घड़ियों की संख्या से भिन्न बना सकते हैं?
   (b) इसके आधार पर आप क्या बता सकते हैं कि किस कंपनी की घड़ियाँ बेहतर हैं?



आकृति 3.2

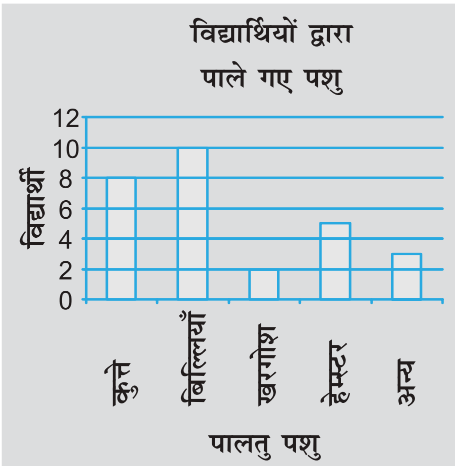
2. वर्षों 1995, 1996, 1997 और 1998 में, अंग्रेज़ी और हिंदी की पुस्तकों की बिक्री नीचे दी गई हैं :

	1995	1996	1997	1998
अंग्रेज़ी	350	400	450	620
हिंदी	500	525	600	650

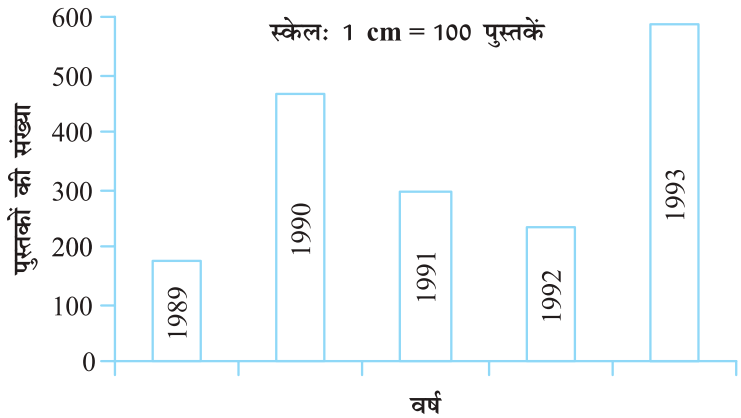
   एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
   (a) किस वर्ष में दोनों भाषाओं की पुस्तकों की बिक्री का अंतर न्यूनतम था?
   (b) क्या आप कह सकते हैं कि अंग्रेज़ी की पुस्तकों की माँग में तेज़ी से वृद्धि हुई है? इसका औचित्य समझाइए।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, आकृति 3.3 में दिए दंड आलेख का प्रयोग कीजिए :
   (a) कौन–सा पालतू पशु अधिक लोकप्रिय है?
   (b) कितने विद्यार्थियों का पालतू पशु कुत्ता है?
2. निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए जो एक पुस्तक भंडार द्वारा 5 क्रमागत वर्षों में बेची गई पुस्तकों की संख्या दर्शाती है, और आगे आने वाले प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
   (i) वर्षों 1989, 1990 और 1992 में से प्रत्येक में लगभग कितनी पुस्तकें बेची गईं?
   (ii) किस वर्ष में लगभग 475 पुस्तकें बेची गईं? किस वर्ष में लगभग 225 पुस्तकें बेची गईं?
   (iii) किन वर्षों में 250 से कम पुस्तकें बेची गईं?
   (iv) क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि आप वर्ष 1989 में बेची गई पुस्तकों का आकलन किस प्रकार करेंगे?



आकृति 3.3



आकृति 3.4

3. छ: विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए:

कक्षा	पाँचवीं	छठी	सातवीं	आठवीं	नौंवी	दसवीं
विद्यार्थियों की संख्या	135	120	95	100	90	80

(a) आप स्केल किस प्रकार चुनेंगे?

(b) निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है? किस कक्षा में न्यूनतम है?

(ii) कक्षा 6 के विद्यार्थियों की संख्या का कक्षा 8 के विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है। एक उपयुक्त स्केल चुनकर एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

विषय	**अंग्रेज़ी**	**हिन्दी**	**गणित**	**विज्ञान**	**सामाजिक विज्ञान**
प्रथम सत्र (अधिकतम अंक 100)	67	72	88	81	73
द्वितीय सत्र (अधिकतम अंक 100)	70	65	95	85	75

(i) किस विषय में विद्यार्थी ने अपने प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार किया है?

(ii) किस विषय में सुधार सबसे कम है?

(iii) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है?

5. किसी कॉलोनी में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार कीजिए :

पसंदीदा खेल	**क्रिकेट**	**बॉस्केट बॉल**	**तैरना**	**हॉकी**	**खेलकूद**
देखना	1240	470	510	430	250
भाग लेना	620	320	320	250	105

(i) एक उपयुक्त स्केल चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए।
इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

(ii) कौन-सा खेल अधिक लोकप्रिय हैं?

(iii) खेलों को देखना अधिक पसंद किया जाता है या उनमें भाग लेना?

6. इस अध्याय के प्रारंभ में, दिए हुए विभिन्न नगरों के न्यूनतम और अधिकतम तापमानों के आँकड़ों (सारणी 3.1) को लीजिए। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दी हुई तिथि पर किस नगर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान का अंतर सबसे अधिक है?

(ii) कौन-सा नगर सबसे गर्म है और कौन-सा नगर सबसे ठंडा है।

(iii) ऐसे दो नगरों के नाम लिखिए, जिनमें से एक का अधिकतम तापमान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम था।

(iv) उस नगर का नाम लिखिए, जिसके न्यूनतम और अधिकतम तापमानों का अंतर सबसे कम है।

3.9 संयोग और प्रायिकता

प्रयास कीजिए

कुछ स्थितियों के बारे में सोचिए, जिनमें कम से कम तीन ऐसी हों जिनका घटित होना निश्चित हो, कुछ ऐसी जिनका घटित होना असंभव हो तथा कुछ ऐसी जो हो भी सकती हों और न भी हो सकती हों, अर्थात् जिनके होने का कुछ संयोग (chance) या संभावना हो।

ये शब्द प्राय: हमारे जीवन में देखने में आते हैं। हम प्राय: कहते हैं, 'आज वर्षा होने की संभावना (या संयोग) नहीं है' तथा यह भी कहते हैं कि 'यह बहुत कुछ संभव है कि भारत विश्व कप जीतेगा।' आइए इन शब्दों को कुछ अधिक समझने का प्रयत्न करें। निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

(i) सूर्य पश्चिम से निकलता है।

(ii) एक चींटी की ऊँचाई 3 m हो जाती है।

(iii) यदि आप एक आयतन वाला घन लेंगे, तो उसकी भुजा भी बड़ी होगी।

(iv) यदि आप बड़े क्षेत्रफल का एक वृत्त लेंगे, तो उस वृत्त की त्रिज्या भी बड़ी होगी।

(v) भारत अगली टेस्ट शृंखला जीतेगा।

यदि आप उपरोक्त कथनों को देखेंगे, तो आप कहेंगे कि पश्चिम से सूर्य का निकलना असंभव (impossible) है, एक चींटी की ऊँचाई 3 m होना भी संभव नहीं है। इसके विपरीत, यदि वृत्त बड़े क्षेत्रफल का है, तो उसकी त्रिज्या बड़ी होना निश्चित (certain) है। यही बात आप घन के बड़े आयतन और उसकी भुजा के बारे में कह सकते हैं। दूसरी ओर, भारत अगली टेस्ट शृंखला जीत भी सकता है और हार भी सकता है। दोनों ही संभव है।

3.9.1 संयोग

यदि आप एक सिक्के को उछालें, तो क्या आप सदैव इसकी सही प्रागुक्ति (prediction) कर सकते हैं कि क्या प्राप्त होगा? प्रत्येक बार सिक्के को उछालकर उससे प्राप्त होने वाले परिणाम की प्रागुक्ति कीजिए। अपने प्रेक्षण निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखिए :

उछाल संख्या	प्रागुक्ति	परिणाम

ऐसा 10 बार करिए। प्राप्त परिणामों (outcomes) को देखिए। क्या आप इनमें कोई पैटर्न देखते हैं? प्रत्येक उछाल के बाद आपको क्या प्राप्त होता है? क्या आपको सदैव चित (head) ही प्राप्त होता है? इन प्रेक्षणों को 10 और उछालों के लिए दोहराइए और प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए।

आप देखेंगे कि ये प्रेक्षण कोई स्पष्ट प्रतिरूप (pattern) नहीं दर्शाते हैं। नीचे दी गई सारणी में, हम सुशीला और सलमा द्वारा 25 उछालों से प्राप्त प्रेक्षणों को दे रहे हैं। यहाँ, H चित को निरूपित करता है तथा T पट (tail) को निरूपित करता है।

उछाल संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
परिणाम	H	T	T	H	T	T	T	H	T	T	H	H	H	H	H
उछाल संख्या	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
परिणाम	T	T	H	T	T	T	T	T	T	T					

ये आँकड़े आपको क्या बताते हैं? क्या आप चित और पट के लिए कोई प्रागुक्तीय प्रतिरूप (predictable pattern) ज्ञात कर सकते हैं? स्पष्ट है, यहाँ चित और पट के आने का कोई निश्चित प्रतिरूप नहीं है। जब आप प्रत्येक बार सिक्के को उछालते हैं, तो प्रत्येक उछाल का परिणाम चित या पट में से कोई भी एक हो सकता है। यह संयोग (chance) की बात है कि एक विशेष उछाल में आपको इनमें से कोई एक प्राप्त हो।

उपरोक्त आँकड़ों में प्राप्त किए गए चितों की संख्या और पटों की संख्या गिनिए। सिक्के को कई बार उछालिए और रिकॉर्ड करते जाइए कि आपको क्या प्राप्त हो रहा है। यह ज्ञात कीजिए कि आपको कितनी बार चित प्राप्त हुआ और कितनी बार पट प्राप्त हुआ।

आपने एक पासे (die) के साथ भी अवश्य खेला होगा। एक पासे में छः फलक (faces) होते हैं। जब आप एक पासे को फेंकते हैं, तो क्या आप प्राप्त होने वाली संख्या की प्रागुक्ति कर सकते हैं?

लूडो (Ludo) या 'साँप और सीढ़ी' का खेल खेलते समय, आपने यह कामना अवश्य की होगी कि एक विशेष फेंक में एक विशेष संख्या परिणाम के रूप में प्राप्त हो।

क्या पासा सदैव आपकी कामनाओं के अनुसार कार्य करता है? एक पासा लीजिए, उसे 150 बार फेंकिए तथा प्राप्त परिणामों को निम्नलिखित सारणी में भरिए :

पासे की लिखित संख्या	मिलान चिह्न	संख्या कितनी बार प्राप्त हुई
1		
2		

प्रत्येक बार परिणाम प्राप्त होने पर, उपयुक्त संख्या के सम्मुख एक मिलान चिह्न (tally mark) लगाइए। उदाहरणार्थ, पहली फेंक (throw) में 5 आने पर 5 के सम्मुख एक मिलान चिह्न लगाइए। अगली बार आपको संख्या 1 प्राप्त होती है। तब, 1 के सम्मुख एक मिलान चिह्न लगाइए। उपयुक्त

संख्याओं के लिए मिलान चिह्न लगाते रहिए। इस प्रक्रिया को 150 बार करिए तथा 150 बार फेंकों के लिए, प्रत्येक परिणाम की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त आँकड़ों से एक दंड आलेख बनाइए, जिसमें यह दर्शाया गया हो कि परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी बार आए हैं।

प्रयास कीजिए

(इसे समूह में कीजिए)

1. एक सिक्के को 100 बार उछालिए और ज्ञात कीजिए कि चित कितनी बार आया है तथा पट कितनी बार आया है।

2. आफताब ने एक पासे को 250 बार फेंका और निम्नलिखित सारणी प्राप्त की:

पासे पर संख्या	मिलान चिह्न
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||
2	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||
4	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||
5	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||
6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

इन आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

3. एक पासे को 100 बार फेंकिए तथा परिणामों को रिकॉर्ड कीजिए। ज्ञात कीजिए कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी-कितनी बार आए हैं।

प्रायकिता क्या है?

जब हम किसी सिक्के को उछालते हैं, तो हम जानते हैं कि इसके दो संभव परिणाम चित या पट हैं। साथ ही, एक पासे को फेंकने पर 6 संभव परिणाम हैं। अपने अनुभव से, हम यह भी जानते हैं कि एक सिक्के के लिए, चित या पट का प्राप्त करना एक समप्रायिक (equally likely) घटना है। हम कहते हैं कि एक चित आने की प्रायिकता (probability) $\frac{1}{2}$ है तथा एक पट आने की प्रायिकता भी $\frac{1}{2}$ है। पासे फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 के आने की संभावनाएँ बराबर हैं। अर्थात् पासे के लिए 6 समप्रायिक संभव परिणाम हैं। हम कहते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक के आने की प्रायिकता $(\frac{1}{6})$ है।

इसके बारे में, हम अगली कक्षाओं में अध्ययन करेंगे। परंतु अब तक जो हमने किया है, उससे स्पष्ट है कि कई संभावनाओं वाली घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में होती है। जिनके

प्रयास कीजिए

ऐसी पाँच स्थितियाँ बनाइए या सोचिए, जिनमें परिणामों के संयोग बराबर न हों, अर्थात् वे समप्रायिक न हों।

घटित होने का कोई संयोग या संभावना नहीं है, उनकी प्रायिकता 0 होती है तथा जिनको निश्चित रूप से घटित होना है, उनकी प्रायिकता 1 होती है।

एक स्थिति दिए रहने पर, हमें विभिन्न संभव परिणामों को समझने तथा प्रत्येक परिणाम के संभावित संयोग के अध्ययन की आवश्यकता होती है। यह संभव है कि सिक्के और पासे की स्थिति के विपरीत ऐसे भी परिणाम हों जिनके घटित होने के संयोग बराबर न हों, अर्थात् वे समप्रायिक न हों। उदाहरणार्थ, यदि एक बर्तन में 15 लाल गेंदे हों और 9 सफ़ेद गेंदे हों और इसमें से एक गेंद बिना देखे निकाली जाती है। तब, लाल गेंद प्राप्त करने का संयोग बहुत अधिक है। क्या आप देख सकते हैं कि क्यों? लाल गेंद प्राप्त करने का संयोग सफ़ेद गेंद प्राप्त करने के संयोग का कितने गुना है? ध्यान दीजिए इन दोनों की प्रायिकताएँ 0 और 1 के बीच में हैं?

प्रश्नावली 3.4

1. बताइए कि निम्नलिखित में किसका होना निश्चित है, किसका होना असंभव है तथा कौन हो भी सकता है, परंतु निश्चित रूप से नहीं :
   (i) आज आप कल से अधिक आयु के हैं।
   (ii) एक सिक्के को उछालने पर चित आएगा।
   (iii) एक पासे को फेंकने पर 8 आएगा।
   (iv) अगली ट्रैफिक लाइट हरी दिखेगी।
   (v) कल बादल घिरे होंगे।
2. एक डिब्बे में 6 कँचे हैं, जिन पर 1 से 6 संख्याएँ अंकित हैं।
   (i) संख्या 2 वाले कँचे को इसमें से निकालने की प्रायिकता क्या है?
   (ii) संख्या 5 वाले कँचे को इसमें से निकालने की प्रायिकता क्या है?
3. यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सी टीम खेल प्रारंभ करेगी, एक सिक्का उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि आपकी टीम खेल प्रारंभ करेगी?

हमने क्या चर्चा की?

1. आँकड़ों के संग्रह, रिकॉर्डिंग और प्रस्तुतीकरण से हमें अपने अनुभवों को संगठित करने तथा आँकड़ों से निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।
2. आँकड़ों को इकट्ठा करने से पहले, हमें यह जान लेना चाहिए कि हम इनका उपयोग किस कार्य में करेंगे।
3. एकत्रित किए गए आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी के रूप में संगठित किए जाने की आवश्यकता होती है, ताकि ये सरलता से समझने के योग्य हों और इनकी व्याख्या की जा सके।

4. औसत एक ऐसी संख्या है, जो दिए हुए प्रेक्षणों के समूह (या आँकड़ों) का प्रतिनिधित्व करता है या उनकी केंद्रीय प्रवृत्ति को दर्शाता है।
5. अंकगणितीय माध्य आँकड़ों का एक प्रतिनिधि मान है।
6. बहुलक केंद्रीय प्रवृत्ति या प्रतिनिधि मान का एक अन्य रूप है। प्रेक्षणों के एक समूह का बहुलक वह प्रेक्षण है जो सबसे अधिक बार आता है।
7. माध्यक भी एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षण के मध्य (बीच) में होता है (उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद) तथा आधे प्रेक्षण इसके ऊपर होते हैं और आधे प्रेक्षण इसके नीचे होते हैं।
8. इकट्ठे किए आँकड़ों को बारंबारता बंटन सारणी की सहायता से चित्रीय रूप से दंड आलेखों के रूप में दर्शाया जा सकता है। दंड आलेख संख्याओं या आँकड़ों का समान चौड़ाई वाले दंडों द्वारा एक चित्रीय निरूपण है।
9. हमने यह भी सीखा है कि एक दोहरा दंड आलेख किस प्रकार खींचा जाता है। यह एक ही दृष्टि में, प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक रहता है।
10. हमारे दैनिक जीवन में, ऐसी स्थितियाँ हैं जो निश्चित रूप से होती हैं, कुछ ऐसी हैं जिनका होना संभव नहीं है तथा कुछ ऐसी हैं जो हो भी सकती हैं और नहीं भी हो सकती। ऐसी स्थिति को सदैव घटित होने का संयोग होता है जो घटित हो भी सकती है या नहीं भी हो सकती है।

सरल समीकरण

4.1 बौद्धिक खेल!

अध्यापिका ने कहा है कि वह गणित का एक नया अध्याय पढ़ाना प्रारंभ करने जा रही हैं और वह है सरल समीकरण। अप्पू, सरिता और अमीना ने कक्षा VI में पढ़े गए बीजगणित वाले अध्याय का पुर्नावलोकन कर लिया है। क्या आपने भी कर लिया है? अप्पू, सरिता और अमीना उत्साहित हैं क्योंकि उन्होंने एक खेल बनाया है, जिसे वे बौद्धिक खेल (mind reader) कहती हैं तथा वे उसे पूरी कक्षा के सम्मुख प्रस्तुत करना चाहती हैं।

अध्यापिका उनके उत्साह की सराहना करती है और उन्हें अपना खेल प्रस्तुत करने के लिए आमंत्रित करती है। अमीना खेल प्रारंभ करती है। वह सारा से कोई संख्या सोचने को कहती है तथा उसे 4 से गुणा करके गुणनफल में 5 जोड़ने को कहती है। इसके बाद वह सारा से इसका परिणाम बताने को भी कहती है। सारा कहती है कि परिणाम 65 है। अमीना तुरंत घोषणा करती है कि सारा द्वारा सोची गई संख्या 15 है। सारा सिर हिलाकर हाँ कहती है। सारा समेत पूरी कक्षा आश्चर्यचकित हो जाती है।

अब अप्पू की बारी है। वह बालू से कोई संख्या सोचने, उसे 10 से गुणा करने और गुणनफल में से 20 घटाने को कहता है। इसके बाद वह बालू से उसका परिणाम बताने को कहता है। बालू कहता है कि यह 50 है। अप्पू तुरंत बालू द्वारा सोची गई संख्या बताता है और कहता है कि वह संख्या 7 है। बालू इसकी पुष्टि करता है।

प्रत्येक व्यक्ति यह जानना चाहता है कि अप्पू, सरिता और अमीना द्वारा प्रस्तुत बौद्धिक खेल किस प्रकार कार्य करता है। क्या आप देख सकते हैं कि यह कैसे कार्य करता है? इस अध्याय और अध्याय 12 को पढ़ने के बाद, आप भली-भाँति यह जान जाएँगे कि यह खेल किस प्रकार कार्य करता है।

4.2 समीकरण बनाना

आइए अमीना का उदाहरण लें। अमीना सारा से कोई संख्या सोचने को कहती है। अमीना संख्या के बारे में कुछ नहीं जानती है। उसके लिए, यह संख्या 1, 2, 3, . . ., 11, . . . , 100, ... में से कुछ भी हो सकती है। आइए इस अज्ञात संख्या को एक अक्षर x से व्यक्त करें। आप x के स्थान पर कोई अन्य अक्षर जैसे y, t इत्यादि का प्रयोग कर सकते हैं। इससे कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि सारा द्वारा सोची गई अज्ञात संख्या के लिए हम कौन-सा अक्षर प्रयोग करते हैं। सारा जब संख्या को 4 से गुणा करती है, तो उसे $4x$ प्राप्त होता है। फिर वह इस गुणनफल में 5 जोड़ती है और $4x + 5$ प्राप्त करती है। $(4x + 5)$ का मान x के मान पर निर्भर करता है। इस प्रकार, यदि $x = 1$ है, तो $4x + 5 = 4 \times 1 + 5 = 9$ है। इसका अर्थ है कि यदि सारा के मस्तिष्क में 1 होता, तो उसके द्वारा प्राप्त परिणाम 9 होता। इसी प्रकार, यदि उसने संख्या 5 सोची होती, तो उसका $x = 5$ के लिए $4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$ । यानी, सारा ने यदि संख्या 5 सोची होती तो उसका परिणाम 25 होता।

सारा द्वारा सोची संख्या ज्ञात करने के लिए, आइए उसके द्वारा प्राप्त उत्तर 65 से विपरीत की ओर कार्य करना प्रारंभ करें। हमें ऐसा x ज्ञात करना है कि

$$4x + 5 = 65 \tag{4.1}$$

इस समीकरण (equation) का हल ही हमें सारा के मन की संख्या को बताएगा।

इस प्रकार, आइए अब अप्पू के उदाहरण पर विचार करें। आइए बालू द्वारा चुनी गई संख्या को y मान लें। अप्पू ने बालू से इस संख्या को 10 से गुणा कर और फिर गुणनफल में से 20 घटाने को कहा था। अर्थात् बालू y से, पहले $10y$ प्राप्त करता है और उसमें से 20 घटा कर $(10y - 20)$ प्राप्त करता है। इसका ज्ञात परिणाम 50 है।

अतः,
$$10y - 20 = 50 \tag{4.2}$$

इस समीकरण का हल ही बालू द्वारा सोची गई संख्या बताएगा।

4.3 जो हमें ज्ञात है उसकी समीक्षा

ध्यान दीजिए कि (4.1) और (4.2) समीकरण हैं। आइए याद करें कि कक्षा VI में हमने समीकरणों के बारे में क्या पढ़ा था। *समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है।* समीकरण (4.1) में, चर x है तथा समीकरण (4.2) में, चर y है।

शब्द **चर (variable)** का अर्थ है, ऐसी कोई वस्तु जो विचरण कर, अर्थात् बदल *सकती हो। एक चर विभिन्न संख्यात्मक मान ले (ग्रहण कर) सकता है, अर्थात्* इसका मान *निश्चित या स्थिर नहीं होता है। चरों को प्राय: अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों x, y, z, l, m, n, p* इत्यादि से व्यक्त किया जाता है। *चरों से हम व्यंजकों (expressions) को बनाते हैं।* ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन जैसी संक्रियाएँ करके प्राप्त किए (बनाए) जाते हैं। x से हमने व्यंजक $(4x + 5)$ बनाया था। इसके लिए, हमने पहले x को 4 से गुणा किया और फिर गुणनफल में 5 जोड़ा था। इसी प्रकार, हमने y से व्यंजक $(10y - 20)$ बनाया था। इसके लिए, हमने y को 10 से गुणा किया और फिर गुणनफल में से 20 को घटाया था। ये सभी व्यंजकों के उदाहरण हैं।

उपरोक्त प्रकार के बनाए गए एक व्यंजक का मान, चर के चुने गए मान पर निर्भर करता है। जैसा कि हम पहले ही देख चुके हैं कि जब $x = 1$ है, तो $4x + 5 = 9$ है; जब $x = 5$ है, तो $4x + 5 = 25$ है इसी प्रकार,

जब $x = 15$, तो $4x + 5 = 4 \times 15 + 5 = 65$ है;

जब $x = 0$, तो $4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5$ है, इत्यादि।

समीकरण (4.1) चर x पर एक प्रतिबंध है। यह बताती है कि व्यंजक $4x + 5$ का मान 65 है। यह प्रतिबंध $x = 15$ होने पर संतुष्ट होता है। संख्या 15 समीकरण $4x + 5 = 65$ का एक हल (solution) है। जब $x = 5$ है, तो $4x + 5 = 25$ है जो 65 के बराबर नहीं है। इस प्रकार, $x = 5$ इस समीकरण का हल नहीं है। इसी प्रकार, $x = 0$ भी इस समीकरण का हल नहीं है। 15 के अतिरिक्त, x का कोई भी मान प्रतिबंध $4x + 5 = 65$ को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रयास कीजिए

व्यंजक $(10y - 20)$ का मान y के मान पर निर्भर करता है। y को पाँच भिन्न-भिन्न मान देकर तथा y के प्रत्येक मान के लिए $(10y - 20)$ का मान ज्ञात करके इसकी पुष्टि कीजिए। $(10y - 20)$ के प्राप्त किए गए विभिन्न मानों से, क्या आप $10y - 20 = 50$ का कोई हल देख रहे हैं? यदि कोई हल प्राप्त नहीं हुआ हे, तो y को कुछ अन्य मान देकर, ज्ञात कीजिए कि प्रतिबंध $10y - 20 = 50$ संतुष्ट होता है या नहीं।

4.4 समीकरण क्या है?

एक समीकरण में, **समता** या **समिका** (equality) का चिह्न सदैव होता है। समता का चिह्न यह दर्शाता है कि इस चिह्न के बाईं ओर के व्यंजक [बायाँ पक्ष (LHS)] का मान चिह्न के दाईं ओर के व्यंजक [दायाँ पक्ष (RHS)] के मान के बराबर है। समीकरण (4.1) में, L.H.S $(4x + 5)$ है तथा RHS 65 है। समीकरण (4.2) में, LHS $(10y - 20)$ तथा RHS 50 है।

> यदि LHS और RHS के बीच में समता चिह्न के अतिरिक्त कोई अन्य चिह्न हो, तो वह एक समीकरण नहीं होती है। इसलिए $4x + 5 > 65$ एक समीकरण नहीं है।
>
> यह कथन हमें बताता है कि $(4x + 5)$ का मान 65 से अधिक है।
>
> इसी प्रकार, $4x + 5 < 65$ भी एक समीकरण नहीं है। यह कथन हमें बताता है कि $(4x + 5)$ का मान 65 से कम है।

समीकरणों में हम प्राय: यह देखते हैं कि RHS केवल एक संख्या है। समीकरण (4.1) में यह 65 है तथा समीकरण (4.2) में यह 50 है। परंतु ऐसा होना सदैव आवश्यक नहीं है। एक समीकरण का दायाँ पक्ष (RHS) चर से संबद्ध एक व्यंजक भी हो सकता है। उदाहरणार्थ, समीकरण

$$4x + 5 = 6x - 25$$

में समता चिह्न के बाईं ओर व्यंजक $4x + 5$ है तथा उसके दाईं ओर व्यंजक $6x - 25$ है।

संक्षिप्त रूप में, एक समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है। प्रतिबंध यह है कि दोनों व्यंजकों के मान बराबर होने चाहिए। ध्यान दीजिए कि इन दोनों व्यंजकों में से कम से कम एक में चर अवश्य होना चाहिए।

हम समीकरणों का एक सरल और उपयोगी गुण देखते हैं। समीकरण $4x + 5 = 65$ वही है जो समीकरण $65 = 4x + 5$ है। इसी प्रकार, समीकरण $6x - 25 = 4x + 5$ वही है जो समीकरण $4x + 5 = 6x - 25$ है। *किसी समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्षों के व्यंजकों को आपस में बदलने पर, समीकरण वही रहती है।* यह गुण बहुधा समीकरणों को हल करने में उपयोगी रहता है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित कथनों को समीकरणों के रूप में लिखिए :

(i) x के तिगुने और 11 का योग 32 है।

(ii) यदि किसी संख्या के 6 गुने में से आप 5 घटाएँ, तो 7 प्राप्त होता है।

(iii) m का एक चौथाई 7 से 3 अधिक है।

(iv) किसी संख्या के एक तिहाई में 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है ।

हल

(i) x का तिगुना $3x$ है।

$3x$ और 11 का योग $3x + 11$ है। यह योग 32 है।

अतः, वांछित समीकरण $3x + 11 = 32$ है।

(ii) आइए मान लें कि यह संख्या z है। z को 6 से गुणा करने पर $6z$ प्राप्त होता है।

$6z$ में से 5 घटाने पर $6z - 5$ प्राप्त होगा। यह परिणाम 7 है।

अतः, वांछित समीकरण $6z - 5 = 7$ है।

(iii) m का एक चौथाई $\frac{m}{4}$ है।

यह 7 से 3 अधिक है। इसका अर्थ है कि अंतर $(\frac{m}{4} \quad 7)$ बराबर 3 है।

अतः, वांछित समीकरण $\frac{m}{4} \quad 7 = 3$ है।

(iv) वांछित संख्या को n मान लीजिए। n का एक तिहाई $\frac{n}{3}$ है।

उपरोक्त एक-तिहाई जमा 5, $\frac{n}{3} + 5$ है। यह 8 के बराबर है ।

अतः, वांछित समीकरण $\frac{n}{3} + 5 = 8$ है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में बदलिए :

(i) $x - 5 = 9$ (ii) $5p = 20$ (iii) $3n + 7 = 1$ (iv) $\frac{m}{5} - 2 = 6$

हल

(i) x में से 5 निकालने पर 9 प्राप्त होता है।

(ii) एक संख्या p का पाँच गुना 20 है।

(iii) 1 प्राप्त करने के लिए n के तीन गुने में 7 जोड़िए।

(iv) किसी संख्या m के $\frac{1}{5}$ वें भाग में से 2 घटाने पर 6 प्राप्त होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य एक महत्वपूर्ण बात यह है कि एक दिए हुए समीकरण को, केवल एक ही नहीं, बल्कि अनेक सामान्य कथनों के रूप दिए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, उपरोक्त समीकरण (i) के लिए आप कह सकते हैं :

x में से 5 घटाइए। आपको 9 प्राप्त होता है।

अथवा संख्या x, 9 से 5 अधिक है।

अथवा 9 संख्या x से 5 कम है।

अथवा x और 5 का अंतर 9 है; इत्यादि।

प्रयास कीजिए

उपरोक्त समीकरणों (ii), (iii) और (iv) में से प्रत्येक के लिए, कम से कम एक अन्य कथन के रूप में लिखिए ।

उदाहरण 3 निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए :

राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। राजू के पिता की आयु 44 वर्ष है। राजू की आयु ज्ञात करने के लिए, एक समीकरण बनाइए (स्थापित कीजिए)।

हल हमें राजू की आयु ज्ञात नहीं है। आइए इसे y वर्ष मान लें। राजू की आयु का तीन गुना $3y$ वर्ष है। राजू के पिता की आयु $3y$ वर्ष से 5 वर्ष अधिक है। अर्थात् राजू के पिता की आयु $(3y + 5)$ वर्ष है। यह भी दिया है कि राजू के पिता की आयु 44 वर्ष है।

अतः,
$$3y + 5 = 44 \qquad (4.3)$$

यह चर y में एक समीकरण है। इसे हल करने पर राजू की आयु ज्ञात हो जाएगी।

उदाहरण 4 एक दुकानदार दो प्रकार की पेटियों में आम बेचता है। ये पेटियाँ छोटी और बड़ी हैं। एक बड़ी पेटी में 8 छोटी पेटियों के बराबर आम और 4 खुले आम आते हैं। प्रत्येक छोटी पेटी में आमों की संख्या बताने वाला एक समीकरण बनाइए। दिया हुआ है कि एक बड़ी पेटी में आमों की संख्या 100 है।

हल मान लीजिए कि एक छोटी पेटी में m आम हैं। एक बड़ी पेटी में m के 8 गुने से 4 अधिक आम हैं। अर्थात् एक बड़ी पेटी में $8m + 4$ आम हैं। परंतु यह संख्या 100 दी हुई है। इस प्रकार,

$$8m + 4 = 100 \qquad (4.4)$$

इस समीकरण को हल करके, आप एक छोटी पेटी के आमों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित सारणी के अंतिम स्तंभ को पूरा कीजिए :

क्रम संख्या	समीकरण	चर का मान	बताइए कि समीकरण संतुष्ट होती है या नहीं (हाँ/नहीं)
(i)	$x + 3 = 0$	$x = 3$	–
(ii)	$x + 3 = 0$	$x = 0$	–
(iii)	$x + 3 = 0$	$x = -3$	–
(iv)	$x - 7 = 1$	$x = 7$	–
(v)	$x - 7 = 1$	$x = 8$	–
(vi)	$5x = 25$	$x = 0$	–
(vii)	$5x = 25$	$x = 5$	–
(viii)	$5x = 25$	$x = -5$	–
(ix)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = -6$	–
(x)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 0$	–
(xi)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 6$	–

2. जाँच कीजिए कि कोष्ठकों में दिये हुए मान, दिए गए संगत समीकरणों के हल हैं या नहीं :

   (a) $n + 5 = 19$ $(n = 1)$ (b) $7n + 5 = 19$ $(n = -2)$ (c) $7n + 5 = 19$ $(n = 2)$

   (d) $4p - 3 = 13$ $(p = 1)$ (e) $4p - 3 = 13$ $(p = -4)$ (f) $4p - 3 = 13$ $(p = 0)$

3. प्रयत्न और भूल विधि से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

   (i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$

4. निम्नलिखित कथनों के लिए समीकरण दीजिए :

   (i) संख्याओं x और 4 का योग 9 है। (ii) y में से 2 घटाने पर 8 प्राप्त होते हैं।

   (iii) a का 10 गुना 70 है। (iv) संख्या b को 5 से भाग देने पर 6 प्राप्त होता है।

   (v) t का तीन-चौथाई 15 है।

   (vi) m का 7 गुना और 7 का योगफल आपको 77 देता है।

   (vii) एक संख्या x की चौथाई ऋण 4 आपको 4 देता है।

   (viii) यदि आप y के 6 गुने में से 6 घटाएँ, तो आपको 60 प्राप्त होता है।

   (ix) यदि आप z के एक-तिहाई में 3 जोड़ें, तो आपको 30 प्राप्त होता है।

5. निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में लिखिए :

(i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$

(v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6. निम्नलिखित स्थितियों में समीकरण बनाइए :

(i) इरफान कहता है कि उसके पास, परमीत के पास जितने कँचे हैं उनके पाँच गुने से 7 अधिक कँचे हैं। इरफान के पास 37 कँचे हैं। (परमीत के कँचों की संख्या को m लीजिए।)

(ii) लक्ष्मी के पिता की आयु 49 वर्ष है। उनकी आयु, लड़की की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। (लक्ष्मी की आयु को y वर्ष लीजिए।)

(iii) अध्यापिका बताती हैं कि उनकी कक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अधिकतम अंक, प्राप्त किए न्यूनतम अंक का दुगुना धन 7 हैं। प्राप्त किए गए अधिकतम अंक 87 हैं। (न्यूनतम प्राप्त किए गए अंकों को l लीजिए।)

(iv) एक समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष कोण प्रत्येक आधार कोण का दुगुना है। (मान लीजिए प्रत्येक आधार कोण b डिग्री है। याद रखिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है।)

4.4.1 एक समीकरण को हल करना

इस समिका पर विचार कीजिए

$$8 - 3 = 4 + 1 \qquad (4.5)$$

समिका (4.5) सत्य है, क्योंकि इसके दोनों पक्ष बराबर हैं (प्रत्येक 5 के बराबर है)।

- आइए दोनों पक्षों में 2 जोड़ें। इसके परिणामस्वरूप, हमें प्राप्त होता है:

  LHS $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$, RHS $= 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7$.

  पुन:, समिका (4.5) सत्य है (अर्थात LHS और RHS समान हैं)।

  इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ें, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

- आइए अब दोनों पक्षों में से 2 घटाइए। इसके परिणामस्वरूप, हमें प्राप्त होता है :

  LHS $= 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3$, RHS $= 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3$.

  पुन:, वह समिका सत्य है।

  इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटाएँ, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

- इसी प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर (non-zero) संख्या से गुणा करें या भाग दें, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

  उदाहरणार्थ, आइए उपरोक्त समिका के दोनों पक्षों को 3 से गुणा करें। हमें प्राप्त होता है :

  LHS $= 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15$, RHS $= 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15$.

  समिका सत्य है।

आइए अब हम उपरोक्त समिका के दोनों पक्षों को 2 से भाग करें ।

$$\text{LHS} = (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{RHS} = (4 + 1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2} = \text{LHS}$$

पुनः, समिका सत्य है।

यदि हम कोई अन्य समिका लें, तो भी हमें यही निष्कर्ष प्राप्त होता है।

मान लीजिए कि हम इस नियम का पालन नहीं करते हैं। विशेष रूप से, मान लीजिए कि हम एक समिका के दोनों पक्षों में भिन्न-भिन्न संख्याएँ जोड़ते हैं। इस स्थिति में, हम देखेंगे कि समिका सत्य नहीं होगी (अर्थात दोनों पक्ष समान नहीं होंगे)। उदाहरणार्थ, आइए समिका (4.5) को पुनः लें :

$$8 - 3 = 4 + 1$$

अब, इसके बाएँ पक्ष में 2 जोड़ें और दाएँ पक्ष में 3 जोड़े। अब नई LHS $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ है तथा नई RHS $= 4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8$ है। अब, समिका सत्य नहीं है, क्योंकि नई LHS और RHS बराबर नहीं हैं।

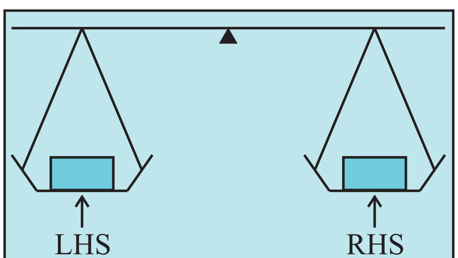
इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में, कोई गणितीय संक्रिया एक ही संख्या के साथ न करें, तो समिका सत्य नहीं होती है।*

समीकरण, एक चरों वाली समिका होती है।

उपरोक्त निष्कर्ष समीकरणों के लिए भी मान्य होते हैं, क्योंकि प्रत्येक समीकरण में चर केवल संख्या ही निरूपित करता है।

प्रायः एक समीकरण को एक तौलने वाली तराजू या तुला (balance) समझा जाता है। एक समीकरण पर एक गणितीय संक्रिया करना इस प्रकार समझना चाहिए, जैसे कि तौलने वाली तराजू के दोनों पलड़ों में बराबर बाँट डालना या उनमें से बराबर बाँट निकाल लेना।

[एक समीकरण एक ऐसी तौलने वाली तराजू समझा जा सकता है, जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखे हों।] इस स्थिति में, तराजू की डंडी ठीक क्षैतिज रहती है। यदि हम दोनों पलड़ों में बराबर बाँट (weights) डालें, तो डंडी अभी भी क्षैतिज ही रहती है। इसी प्रकार, यदि हम दोनों पलड़ों में से बराबर बाँट हटा लें (निकालें), तो भी डंडी क्षैतिज रहती है। इसके विपरीत, यदि हम दोनों पलड़ों में भिन्न बाँट डालें (जोड़ें) या उनमें से भिन्न बाँट निकालें (घटाएँ), तो भी तराजू की डंडी का संतुलन बिगड़ जाता है, अर्थात् डंडी क्षैतिज पर नहीं रहती है।



एक संतुलित समीकरण तराजू जैसी है जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखें हों।

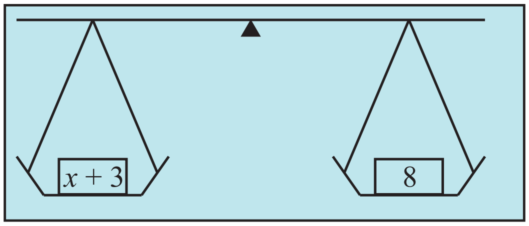
हम यह सिद्धांत एक समीकरण को हल करने में प्रयोग करते हैं। निस्संदेह, यहाँ तराजू काल्पनिक है तथा संख्याओं को बाँटों की तरह भौतिक रूप से संतुलित करने के लिए प्रयोग किया जा सकता। इस सिद्धांत को प्रस्तुत करने का यही मुख्य उद्देश्य है। आइए कुछ उदाहरण लें।

- निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए:

$$x + 3 = 8 \tag{4.6}$$

हम इस समीकरण के दोनों पक्षों में से 3 को घटाते हैं।

नई LHS है : $x + 3 - 3 = x$ तथा नई RHS है : $8 - 3 = 5$



हम 3 को क्यों घटाएँ कोई और संख्या क्यों न घटाएँ? 3 को जोड़ कर देखिए। क्या यह कुछ सहायता करेगा? क्यों नहीं?

ऐसा इसलिए किया है, क्योंकि 3 को घटाने पर L.H.S. में x रह जाता है।

चूँकि इससे संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इसलिए हमें प्राप्त होता है :

नई LHS = नई RHS या $x = 5$

यह वही है, जो हम चाहते हैं। अर्थात् यह समीकरण (4.6) का एक हल है।

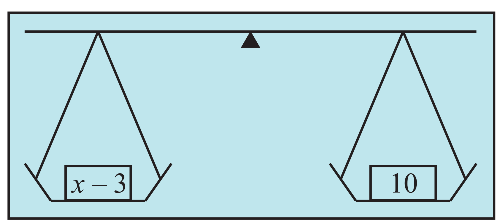
इसकी पुष्टि करने के लिए कि यह सही है या नहीं, हम प्रारंभिक समीकरण में $x = 5$ रखेंगे। हमें LHS $= x + 3 = 5 + 3 = 8$ प्राप्त होती है, जो RHS के बराबर है। यही हल सही होने के लिए आवश्यक है।

समीकरण के दोनों पक्षों में सही गणितीय संक्रिया करने से (अर्थात् 3 घटाने से), हम समीकरण के हल पर पहुँच गए ।

- आइए एक अन्य समीकरण लें :

$$x - 3 = 10 \tag{4.7}$$

यहाँ हमें क्या करना चाहिए? हमें दोनों पक्षों में 3 जोड़ना चाहिए। ऐसा करने से, समीकरण का संतुलन बना रहेगा तथा L.H.S में केवल x रह जाएगा।



नई LHS $= x - 3 + 3 = x$, नई RHS $= 10 + 3 = 13$

अत: $x = 13$ है, जो वांछित हल है।

प्रारंभिक समीकरण (4.7) में $x = 13$ रखने पर, हम इसकी पुष्टि करते हैं कि यह हल सही है :

प्रारंभिक समीकरण की LHS $= x - 3 = 13 - 3 = 10$ है।

जैसा कि वांछनीय है यह, RHS के बराबर है।

- इसी प्रकार, आइए निम्नलिखित समीकरणों को देखें :

$$5y = 35 \tag{4.8}$$

$$\frac{m}{2} = 5 \tag{4.9}$$

पहली स्थिति में, हम दोनों पक्षों को 5 से भाग देंगे। इससे LHS में केवल y रह जाता है।

नई LHS $= \frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y$, नई RHS $= \frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$

अत: $y = 7$

यही समीकरण का वांछित हल है। हम समीकरण (4.8) में $y = 7$ प्रतिस्थापित करके इसकी जाँच कर सकते हैं कि समीकरण संतुष्ट हो जाता है।

दूसरी स्थिति में, हम दोनों पक्षों को 2 से गुणा करते हैं। इससे LHS में केवल m रह जाता है।

नई LHS $= \frac{m}{2} \times 2 = m$. तथा नई RHS $= 5 \times 2 = 10$ है।

अत:, $m = 10$ (यही वांछित हल है। आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि यह हल सही है या नहीं)।

उपरोक्त उदाहरणों से यह देखा जा सकता है कि समीकरण के हल करने के लिए, हमें जिस संक्रिया की आवश्यकता पड़ेगी वह समीकरण पर निर्भर करता है। हमारा प्रयास यह होना चाहिए कि समीकरण में चर पृथक् हो जाए। कभी-कभी ऐसा करने के लिए, हमें एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ सकती हैं। इसको मस्तिष्क में रखते हुए, आइए कुछ और समीकरण हल करें।

उदाहरण 5 हल कीजिए:

(a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

हल

(a) हम समीकरण की LHS में चर n को पृथक् करने के लिए, एक चरणबद्ध विधि से कार्य करते हैं। LHS यहाँ $3n + 7$ है। पहले हम इसमें से 7 घटाएँगे, जिससे $3n$ प्राप्त होगा। इससे अगले चरण में, हम इसे 3 से भाग देंगे, जिससे n प्राप्त होगा। याद रखिए कि हमें समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संक्रिया करनी चाहिए। अत:, दोनों पक्षों में से 7 घटाने पर,

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7 \quad \text{(चरण 1)}$$

या, $3n = 18$

अब दोनों पक्षों को 3 से भाग दीजिए :

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3} \quad \text{(चरण 2)}$$

या, $n = 6$, जो इसका हल है।

(b) यहाँ हमें क्या करना चाहिए? पहले हम दोनों पक्षों में 1 जोड़ते हैं :

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1 \quad \text{(चरण 1)}$$

या $2p = 24$

अब, दोनों पक्षों को 2 से भाग देते हैं : $\frac{2p}{2} = \frac{24}{2}$ (चरण 2)

या $p = 12$, जो इसका हल है।

आपको एक अच्छी आदत विकसित कर लेनी चाहिए, जो यह है कि प्राप्त किए हल की जाँच अवश्य कर लें। यद्यपि हमने यह (a) के लिए नहीं किया है, परंतु आइए इस उदाहरण (b) के लिए ऐसा करें।

आइए इस हल $p = 12$ को समीकरण में रखें ।

$$\text{LHS} = 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1$$
$$= 23 = \text{RHS}$$

इस प्रकार, हल की सत्यता की जाँच हो गई।

उपरोक्त (a) के हल की भी अब आप जाँच कर ही लीजिए ।

अब हम इस स्थिति में हैं कि अप्पू, सरिता और अमीना द्वारा प्रस्तुत किए गए बौद्धिक खेल पर वापस जाएँ और समझें कि उन्होंने अपने उत्तर किस प्रकार ज्ञात किए। इस कार्य के लिए, आइए समीकरणों (4.1) और (4.2) को देखें, जो क्रमशः अमीना और अप्पू के उदाहरणों के संगत हैं।

- पहले निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए: $4x + 5 = 65$. (4.1)

  दोनों पक्षों में से 5 घटाने पर, $4x + 5 - 5 = 65 - 5$.

  अर्थात्, $4x = 60$

  x को पृथक् करने के लिए, दोनों पक्षों को 4 से भाग देने पर, $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

  या $x = 15$, जो वांछित हल है। (जाँच कीजिए कि यह सही है।)

- अब निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए:

  $10y - 20 = 50$ (4.2)

  दोनों पक्षों में, 20 जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

  $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ या $10y = 70$

  दोनों पक्षों को 10 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है : $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$

  या, $y = 7$, जो वांछित हल है। (जाँच कीजिए कि यह सही है।)

आप यह अनुभव करेंगे कि ठीक यही उत्तर अप्पू, सरिता और अमीना ने दिए थे। उन्होंने समीकरण बनाना और फिर उन्हें हल करना सीख लिया था। इसी कारण वे अपना बौद्धिक खेल बनाकर संपूर्ण कक्षा पर अपना प्रभाव डाल पाए। हम इस पर अनुच्छेद 4.7 में वापस आएँगे।

प्रश्नवली 4.2

1. पहले चर को पृथक् करने वाला चरण बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

(a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $x - 1 = 5$

(d) $x + 6 = 2$ (e) $y - 4 = -7$ (f) $y - 4 = 4$

(g) $y + 4 = 4$ (h) $y + 4 = -4$

2. पहले चर को पृथक् करने के लिए प्रयोग किए जाने वाले चरण को बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

(a) $3l = 42$ (b) $\frac{b}{2} = 6$ (c) $\frac{p}{7} = 4$ (d) $4x = 25$

(e) $8y = 36$ (f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$ (g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$ (h) $20t = -10$

3. चर को पृथक् करने के लिए, जो आप चरण प्रयोग करेंगे, उसे बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

(a) $3n - 2 = 46$ (b) $5m + 7 = 17$ (c) $\frac{20p}{3} = 40$ (d) $\frac{3p}{10} = 6$

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $10p = 100$ (b) $10p + 10 = 100$ (c) $\frac{p}{4} = 5$ (d) $\frac{-p}{3} = 5$

(e) $\frac{3p}{4} = 6$ (f) $3s = -9$ (g) $3s + 12 = 0$ (h) $3s = 0$

(i) $2q = 6$ (j) $2q - 6 = 0$ (k) $2q + 6 = 0$ (l) $2q + 6 = 12$

4.5 कुछ और समीकरण

आइए कुछ और समीकरणों को हल करने का अभ्यास करें। इन समीकरणों को हल करते समय, हम एक संख्या (पद) को **स्थानापन्न (transpose)** करने (अर्थात् एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने) के बारे में पढ़ेंगे (सीखेंगे) हम किसी संख्या को, समीकरण के दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में घटाने के एवज में, स्थानापन्न कर सकते हैं।

उदाहरण 6 हल कीजिए : $12p - 5 = 25$ (4.12)

हल

- समीकरण के दोनों पक्षों में 5 जोड़ने पर,

$12p - 5 + 5 = 25 + 5$ या, $12p = 30$

- दोनों पक्षों को 12 से भाग देने पर,

$$\frac{12p}{12} = \frac{30}{12} \quad \text{या} \quad p = \frac{5}{2}$$

जाँच : समीकरण (4.12) की LHS में, $p = \frac{5}{2}$ रखने पर

$$\text{LHS} = 12 \times \frac{5}{2} \quad 5$$
$$= 6 \times 5 - 5$$
$$= 30 - 5 = 25 = \text{RHS}$$

> ध्यान दीजिए कि दोनों पक्षों में 5 जोड़ने का वही अर्थ है, जो (– 5) का पक्ष बदलने का है!
>
> $12p - 5 = 25$
>
> $12p = 25 + 5$
>
> पक्ष बदलने को **स्थानापन्न** करना कहते हैं। स्थानापन्न करने में, संख्या का चिह्न बदल जाता है।

जैसा कि हमने किसी समीकरण को हल करते समय देखा है, सामान्यत: हम समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ते हैं या उनमें से एक ही संख्या को घटाते हैं। *किसी संख्या को स्थानापन्न करना* (अर्थात् संख्या के पक्षों में परिवर्तन करना) *संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में से घटाने जैसा ही है।* ऐसा करने के लिए, उस संख्या का चिह्न बदलना पड़ता है। जो नियम संख्याओं के लिए प्रयोग किया जाता है, वही नियम व्यंजकों के लिए भी प्रयोग किया जाता है। आइए स्थानापन्न के दो और उदाहरण लें।

दोनों पक्षों में जोड़ना या घटाना	**स्थानापन्न करना**
(i) $3p - 10 = 5$	(i) $3p - 10 = 5$
दोनों पक्षों में 10 जोड़िए	LHS से (–10) को स्थानापन्न करना
$3p - 10 + 10 = 5 + 10$	(स्थानापन्न करने पर, – 10 बदल कर + 10 हो जाता है।)
या $3p = 15$	$3p = 5 + 10$ या $3p = 15$
(ii) $5x + 12 = 27$	(ii) $5x + 12 = 27$
दोनों पक्षों में से 12 घटाइए।	+ 12 को स्थानापन्न करना
	(+ 12 स्थानापन्न करने पर, – 12 हो जाता है)
$5x + 12 - 12 = 27 - 12$	$5x = 27 - 12$
या $5x = 15$	या $5x = 15$

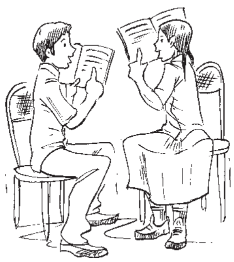
अब हम दो और समीकरणों को हल करेंगे। जैसा कि आप देख सकते हैं, इन समीकरणों में कोष्ठक भी हैं, जिन्हें सर्वप्रथम खोलना पड़ेगा।

उदाहरण 7 हल कीजिए :

(a) $4(m + 3) = 18$ (b) $-2(x + 3) = 8$

हल

(a) $4(m + 3) = 18$



आइए दोनों पक्षों को 4 से विभाजित करें। इससे LHS में से कोष्ठक हट जाएँगे। हमें प्राप्त होता है:

$$m+3=\frac{18}{4} \quad \text{या} \quad m+3=\frac{9}{2}$$

या $\quad m=\frac{9}{2} \quad 3$ (3 को RHS में स्थानापन्न करने पर)

या $\quad m=\frac{3}{2}$ (वांछित हल) $\left(\text{क्योंकि } \frac{9}{2}-3=\frac{9}{2}-\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\right)$

जाँच $\quad$ LHS $= 4\left[\frac{3}{2}+3\right]=4\times\frac{3}{2}+4\times 3=2\times 3+4\times 3$ [$m=\frac{3}{2}$ रखिए]

$= 6 + 12 = 18 =$ RHS

(b) $-2(x+3)=8$

LHS में से कोष्ठकों को हटाने के लिए, हम दोनों पक्षों को -2 से भाग देते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$x+3=-\frac{8}{2} \quad \text{या} \quad x+3=-4$$

या, $x=-4-3$ (3 को RHS में स्थानापन्न करने पर)

या $\quad x=-7 \quad$ (वांछित हल)

जाँच $\quad$ LHS $=-2(-7+3)$

$=-2(-4)$

$=8=$ RHS जो होना चाहिए।

4.6 हल से समीकरण

अतुल सदैव अलग प्रकार से सोचता है। वह किसी विद्यार्थी द्वारा समीकरण हल करने में लिए गए उत्तरोतर चरणों को देखता है। वह सोचता है कि क्यों न इसके विपरीत (उल्टे) पथ का अनुसरण किया जाए।

समीकरण	$\longrightarrow$	हल	(सामान्य पथ)
हल	$\longrightarrow$	समीकरण	(विपरीत पथ)

वह नीचे दिए पथ का अनुसरण करता है :

प्रारंभ कीजिए		$x = 5$		
दोनों पक्षों को 4 से गुणा कीजिए	$\downarrow$	$4x = 20$	$\uparrow$	दोनों पक्षों को 4 से भाग दीजिए
दोनों पक्षों में से 3 घटाइए	$\downarrow$	$4x - 3 = 17$	$\uparrow$	दोनों पक्षों में 3 जोड़िए

इससे एक समीकरण प्राप्त हो जाती है। यदि हम प्रत्येक चरण के लिए, उसके विपरीत पथ का अनुसरण करें। (जैसे दाईं ओर दर्शाया गया है), तो हमें समीकरण का हल प्राप्त हो जाता है।

प्रयास कीजिए

उसी चरण $x = 5$ से प्रारंभ कीजिए और इससे दो भिन्न समीकरण बनाइए। अपनी कक्षा के दो सहपाठियों से इन समीकरणों को हल करने के लिए कहिए। जाँच कीजिए कि क्या उनका हल $x = 5$ है।

हेतल इसमें रुचि लेने लगती है। वह उसी पहले चरण से प्रारंभ करती है और एक अन्य समीकरण बना लेती है।

$$x = 5$$

दोनों पक्षों को 3 से गुणा करने पर, $\quad 3x = 15$

दोनों पक्षों में 4 जोड़ने पर, $\quad 3x + 4 = 19$

$y = 4$ से प्रारंभ कीजिए और इससे दो भिन्न-भिन्न समीकरण बनाइए। अपने तीन मित्रों से भी ऐसा करने को कहिए। क्या उनके समीकरण आपसे भिन्न हैं?

क्या यह अच्छा नहीं है कि आप समीकरणों को केवल हल ही नहीं कर सकते, अपितु उनको बना भी सकते हैं। साथ ही, क्या आपने यह देखा कि एक दी हुई समीकरण का आप केवल एक ही हल प्राप्त करते हैं, लेकिन एक दिए हुए हल से आप अनेक समीकरण बना सकते हैं।

अब सारा यह चाहती है कि पूरी कक्षा यह जान जाए कि वह क्या सोच रही है। वह कहती है, ''मैं हेतल की समीकरण को लेकर उसे एक कथन के रूप में बदलूँगी, जिससे एक पहेली बन जाएगी। उदाहरणार्थ,

कोई संख्या सोचिए, उसे 3 से गुणा कीजिए और गुणनफल में 4 जोड़िए। अब बताइए कि आपने क्या संख्या प्राप्त की है।

यदि योग 19 है, तो हेतल द्वारा प्राप्त किये गए समीकरण से पहेली हल हो जाएगी। वास्तव में, हम जानते हैं कि यह 5 है, क्योंकि हेतल ने इससे प्रारंभ किया था।''

वह अप्पू, सरिता और अमीना की ओर मुख करके पूछती है कि क्या उन्होंने ऐसे ही अपनी पहेली बनाई थी। वे तीनों कहते है, ''हाँ''।

अब हम जान गए हैं कि किस प्रकार अनेक संख्या पहेलियों और अन्य समस्याओं को बनाया जा सकता है।

प्रयास कीजिए

दो संख्या पहेलियों को बनाने का प्रयास कीजिए, एक हल 11 लेकर तथा दूसरा हल 100 लेकर।

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$ (b) $5t + 28 = 10$ (c) $\frac{a}{5} + 3 = 2$ (d) $\frac{q}{4} + 7 = 5$

(e) $\frac{5}{2}x = \quad 10$ (f) $\frac{5}{2}x = \frac{25}{4}$ (g) $7m + \frac{19}{2} = 13$ (h) $6z + 10 = -2$

(i) $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$ (j) $\frac{2b}{3} \quad 5 = 3$

2. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $2(x + 4) = 12$ (b) $3(n - 5) = 21$ (c) $3(n - 5) = - 21$

(d) $- 4(2 + x) = 8$ (e) $4(2 - x) = 8$

3. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $4 = 5(p - 2)$ (b) $- 4 = 5(p - 2)$

(c) $16 = 4 + 3(t + 2)$ (d) $4+5(p - 1) = 34$ (e) $0 = 16 + 4(m - 6)$

4. (a) $x = 2$ से प्रारंभ करते हुए, 3 समीकरण बनाइए।

(b) $x = - 2$ से प्रारंभ करते हुए, 3 समीकरण बनाइए।

4.7 व्यावहारिक स्थितियों में सरल समीकरणों के अनुप्रयोग

हम ऐसे कई उदाहरण देख चुके हैं, जिनमें हमने दैनिक जीवन की भाषा से कथनों को लेकर, उन्हें सरल समीकरणों के रूप में बदला था। हम यह भी सीख चुके हैं कि सरल समीकरणों को किस प्रकार हल किया जाता है। इस प्रकार, अब हम पहेलियों और व्यावहारिक स्थितियों से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए, पूर्णतया समर्थ हो चुके हैं। इसकी विधि यह है कि पहले इन स्थितियों के संगत समीकरणों को बना लिया जाए और फिर इन पहेलियों / समस्याओं के हल प्राप्त करने के लिए प्राप्त समीकरणों को हल कर लिया जाए। हम उसी से प्रारंभ करते हैं, जिसे हम पहले ही देख चुके हैं [उदाहरण 1 (i) और (iii), अनुच्छेद 4.2]

उदाहरण 8 किसी संख्या के तिगुने और 11 का योग 32 है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल

- यदि अज्ञात संख्या को x मान लिया जाए, तो उसका तिगुना $3x$ होगा तथा $3x$ और 11 का योग 32 है। अर्थात् $3x + 11 = 32$.
- इस समीकरण को हल करने के लिए, हम 11 को RHS में स्थानापन्न करते हैं, जिससे हमें प्राप्त होता है :

  $3x = 32 - 11$ या, $3x = 21$

  अब दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है:

  $$x = \frac{21}{3} = 7$$

  यही समीकरण हमें पहले अनुच्छेद 4.2 के उदारहण 1 में प्राप्त हुआ था।

  अत: वांछनीय संख्या 7 है। (हम इसकी जाँच के लिए 7 के तिगुने में 11 जोड़कर देख सकते हैं कि परिणाम 32 आता है)।

उदाहरण 9 वह संख्या ज्ञात कीजिए जिसका एक-चौथाई, 7 से 3 अधिक है।

हल

- आइए अज्ञात संख्या को y लें। इसका एक-चौथाई $\frac{y}{4}$ है।

संख्या $\left(\frac{y}{4}\right)$ संख्या 7 से 3 अधिक है।

अत:, हमें y में निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है : $\frac{y}{4} - 7 = 3$

- इस समीकरण को हल करने के लिए पहले – 7 को RHS में स्थानापन्न कीजिए।

इस प्रकार, $\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10$.

फिर हम दोनों पक्षों को 4 से गुणा करके, प्राप्त करते हैं :

$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4$ या, $y = 40$ (वांछित संख्या)

जाँच y का मान रखने पर,

LHS $= \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 =$ RHS, जो होना चाहिए।

प्रयास कीजिए

(i) जब आप एक संख्या को 6 से गुणा करते हैं और फिर गुणनफल में से 5 घटाते हैं, तो आपको 7 प्राप्त होता है। क्या आप बता सकते हैं कि वह संख्या क्या है?

(ii) वह कौन-सी संख्या है, जिसके एक-तिहाई में 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है?

उदाहरण 10 राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। राजू की आयु ज्ञात कीजिए, यदि उसके पिता की आयु 44 वर्ष है।

हल

- उदाहरण 3 के अनुसार राजू की आयु (y) ज्ञात करने का समीकरण है: $3y + 5 = 44$
- इसे हल करने के लिए, पहले हम 5 को स्थानापन्न करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

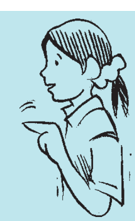
  $3y = 44 - 5 = 39$

  दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है: $y = 13$

  अर्थात् राजू की आयु 13 वर्ष है। (आप अपने उत्तर की जाँच कर सकते हैं।)

प्रयास कीजिए

मापों के अनुसार, दो प्रकार की पेटियाँ हैं, जिनमें आम रखे हुए हैं। प्रत्येक बड़ी पेटी में रखे आमों की संख्या 8 छोटी पेटियों में रखे आमों की संख्या से 4 अधिक हैं। प्रत्येक बड़ी पेटी में 100 आम हैं। प्रत्येक छोटी पेटी में कितने आम हैं?



प्रश्नावली 4.4

1. निम्नलिखित स्थितियों के लिए समीकरण बनाइए और फिर उन्हें हल करके अज्ञात संख्याएँ ज्ञात कीजिए :

(a) एक संख्या के आठ गुने में 4 जोड़िए; आपको 60 प्राप्त होगा।

(b) एक संख्या का $\frac{1}{5}$ घटा 4, संख्या 3 देता है।

(c) यदि मैं किसी संख्या का तीन-चौथाई लेकर इसमें 3 जोड़ दूँ, तो मुझे 21 प्राप्त होते हैं।

(d) जब मैंने किसी संख्या के दुगुने में से 11 को घटाया, तो परिणाम 15 प्राप्त हुआ।

(e) मुन्ना ने 50 में से अपनी अभ्यास-पुस्तिकाओं की संख्या के तिगुने को घटाया, तो उसे परिणाम 8 प्राप्त होता है।

(f) इबेनहल एक संख्या सोचती है। वह इसमें 19 जोड़कर योग को 5 से भाग देती है, उसे 8 प्राप्त होता है।

(g) अनवर एक संख्या सोचता है। यदि वह इस संख्या के $\frac{5}{2}$ में से 7 निकाल दे, तो परिणाम 23 है।

2. निम्नलिखित को हल कीजिए :

(a) अध्यापिका बताती है कि उनकी कक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अधिकतम अंक, प्राप्त किए न्यूनतम अंक का दुगुना जमा 7 है। प्राप्त किए गए अधिकतम अंक 87 हैं। प्राप्त किए गए न्यूनतम अंक क्या हैं?

(b) किसी समद्विबाहु त्रिभुज में आधार कोण बराबर होते हैं। शीर्ष कोण 40° है। इस त्रिभुज के आधार कोण क्या हैं? (याद कीजिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

(c) सचिन द्वारा बनाए गए रनों की संख्या राहुल द्वारा बनाए गए रनों की संख्या की दुगुनी है। उन दोनों द्वारा मिलकर बनाए गए कुल रन एक दोहरे शतक से 2 रन कम हैं। प्रत्येक ने कितने रन बनाए थे?

3. निम्नलिखित को हल कीजिए :

(i) इरफान कहता है कि उसके पास परमीत के पास जितने कँचे हैं उनके पाँच गुने से 7 अधिक कँचे हैं। इरफान के पास 37 कँचे हैं। परमीत के पास कितने कँचे हैं?

(ii) लक्ष्मी के पिता की आयु 49 वर्ष है। उनकी आयु लक्ष्मी की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। लक्ष्मी की आयु क्या है?

(iii) सुंदरग्राम के निवासियों ने अपने गाँव के एक बाग में कुछ पेड़ लगाए। इनमें से कुछ पेड़ फलों के पेड़ थे। उन पेड़ों की संख्या, जो फलों के नहीं थे, फलों वाले पेड़ों की संख्या के तिगुने से 2 अधिक थी। यदि ऐसे पेड़ों की संख्या, जो फलों के नहीं थे, 77 है, तो लगाए गए फलों के पेड़ों की संख्या क्या थी?

4. निम्नलिखित पहेली को हल कीजिए :

मैं एक संख्या हूँ,
मेरी पहचान बताओ!
मुझे सात बार लो,
और एक पचास जोड़ो!
एक तिहरे शतक तक पहुँचने के लिए
आपको अभी भी चालीस चाहिए!

हमने क्या चर्चा की?

1. एक समीकरण, एक चर पर ऐसा प्रतिबंध होता है जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए ।

2. चर का वह मान जिसके लिए समीकरण संतुष्ट होता है, समीकरण का हल कहलाता है ।

3. किसी समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्षों को परस्पर बदलने पर, समीकरण नहीं बदलता ।

4. एक संतुलित समीकरण की स्थिति में यदि हम

(i) दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ें या (ii) दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटाएँ या (iii) दोनों पक्षों को एक ही संख्या से गुणा करें या (iv) दोनों पक्षों को एक ही संख्या से भाग दें तो संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है अर्थात् LHS और RHS के मान समान रहते हैं ।

5. उपरोक्त गुणों द्वारा समीकरण को चरणबद्ध विधि से हल किया जा सकता है। हमें दोनों पक्षों में एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती हैं, जिससे कि दोनों में से एक पक्ष में हमें केवल चर प्राप्त हो। अंतिम चरण समीकरण का हल है।

6. स्थानापन्न का अर्थ है एक पक्ष से दूसरे पक्ष में जाना । किसी संख्या को स्थानापन्न करना, संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में से घटाने के समान ही है। जब आप एक संख्या को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानापन्न करते हैं तो आप उसके चिह्न को बदल देते हैं । उदाहरणार्थ, समीकरण $x + 3 = 8$ में $+ 3$ का स्थानापन्न LHS से RHS करने पर $x = 8 - 3 = 5$ प्राप्त होता है । हम व्यंजकों का भी स्थानापन्न उसी विधि से करते हैं जैसे एक संख्या का स्थानापन्न करते हैं ।

7. हमने व्यावहारिक स्थितियों को, संगत सरल बीजीय व्यंजक के रूप में लिखना भी सीखा।

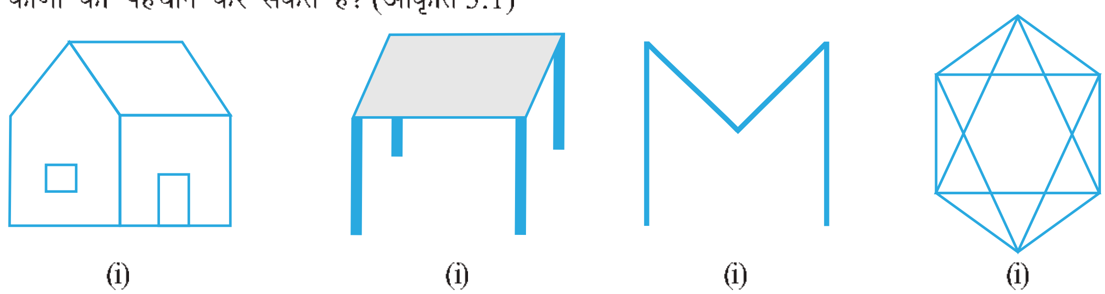
8. हमने यह भी सीखा कि हम किसी समीकरण के हल से प्रारंभ कर, दोनों पक्षों पर समान गणितीय संक्रियाओं की विधि का प्रयोग कर (उदाहरण के लिए दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ना या घटाना) एक समीकरण कैसे बना सकते हैं। साथ ही हमने यह भी सीखा कि हम किसी दिए गए समीकरण का व्यावहारिक स्थिति से संबंध बना सकते हैं और उस समीकरण के लिए कोई व्यावहारिक समस्या या पहेली भी बना सकते हैं ।

अध्याय 5

रेखा एवं कोण

5.1 रेखा

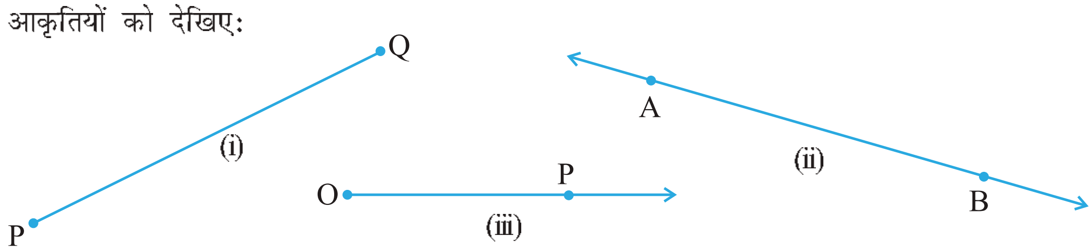
आप पहले से ही जानते हैं कि किसी दिए हुए आकार में विभिन्न रेखाएँ, रेखाखंडों एवं कोणों की पहचान कैसे की जाती है। क्या आप निम्नलिखित आकृतियों में विभिन्न रेखाखंडों एवं कोणों की पहचान कर सकते हैं? (आकृति 5.1)



आकृति 5.1

क्या आप यह भी जान सकते हैं कि निर्मित कोण, न्यून कोण अथवा अधिक कोण अथवा सम कोण हैं?

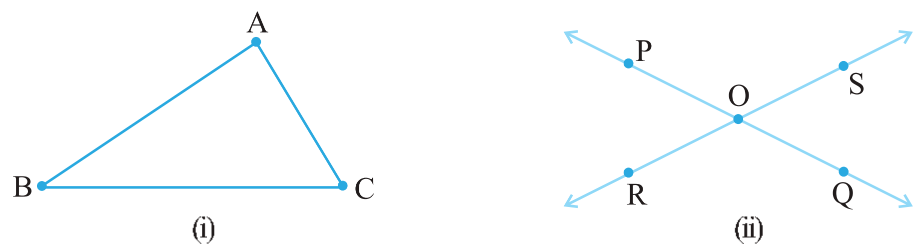
स्मरण कीजिए कि एक **रेखाखंड** के दो अंत **बिंदु** होते हैं। यदि हम इन दो अंत बिंदुओं को अपनी-अपनी दिशाओं में अपरिमित रूप में बढ़ाते हैं तो हमें एक **रेखा** प्राप्त होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक रेखा का कोई अंत बिंदु नहीं होता है। दूसरी तरफ़ स्मरण कीजिए कि किरण का एक अंत बिंदु (नामत: प्रारंभिक बिंदु) होता है। उदाहरणत: नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए:



आकृति 5.2

यहाँ आकृति 5.2 (i) **रेखाखंड**, आकृति 5.2 (ii) **रेखा** एवं **आकृति** 5.2 (iii) **एक किरण**, को दर्शाती है। सामान्यत: एक रेखाखंड PQ को संकेत $\overline{PQ}$, रेखा AB को संकेत $\overleftrightarrow{AB}$ एवं किरण OP को संकेत $\overrightarrow{OP}$, से निर्दिष्ट किया जाता है। अपने दैनिक जीवन से रेखाखंडों एवं किरणों के कुछ उदाहरण दीजिए और उनके बारे में अपने मित्रों से चर्चा कीजिए।

पुन: स्मरण कीजिए कि रेखाएँ अथवा रेखाखंडों के मिलने पर **कोण** निर्मित होता है। उपर्युक्त आकृतियों (आकृति 5.1) में कोनों (corners) को प्रेक्षित कीजिए। जब दो रेखाएँ अथवा रेखाखंड किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं तो इन कोनों का निर्माण होता है। उदाहरणत: नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए:



आकृति 5.3

आकृति 5.3 (i) में रेखाखंड AB एवं BC, कोण ABC का निर्माण करने के लिए, एक दूसरे को बिंदु B पर प्रतिच्छेद करते हैं और रेखाखंड BC एवं AC, कोण ACB का निर्माण करने के लिए एक दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करते हैं इत्यादि। जबकि आकृति 5.3 (ii) में रेखाएँ PQ एवं RS एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं जिससे कोण POS, SOQ, QOR और ROP निर्मित होते हैं। कोण ABC को संकेत ∠ABC द्वारा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार आकृति 5.3 (i) में निर्मित तीन कोण ∠ABC, ∠BCA एवं ∠BAC हैं और आकृति 5.3 (ii) में निर्मित चार कोण ∠POS, ∠SOQ, ∠QOR एवं ∠POR हैं। आप पहले से ही अध्ययन कर चुके हैं कि न्यून कोण, अधिक कोण अथवा सम कोण के रूप में कोणों का वर्गीकरण कैसे किया जाता है।

प्रयास कीजिए

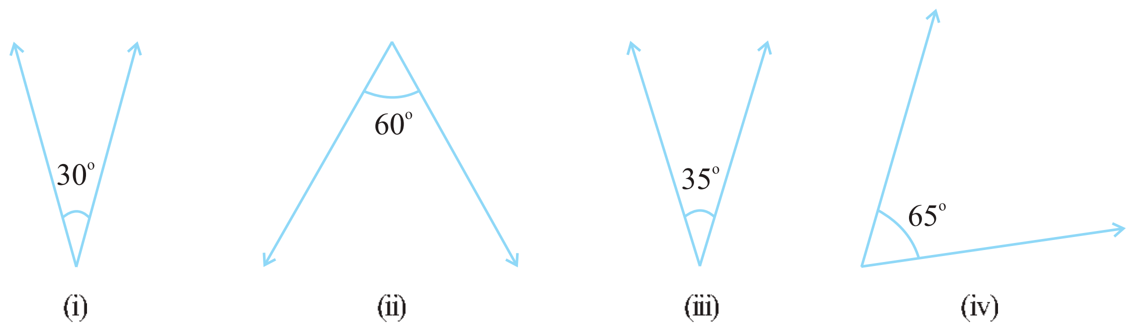
अपने आसपास दस आकृतियों को सूचीबद्ध कीजिए और उनमें पाए जाने वाले न्यून कोणों, अधिक कोणों एवं सम कोणों की पहचान कीजिए।

टिप्पणी कोण ABC के माप के संदर्भ में, m∠ABC को साधारणत: ∠ABC के रूप में लिखेंगे। प्रकरण से यह बात स्पष्ट हो जाएगी कि हम कोण के संदर्भ में अथवा इसके माप के सदर्भ में बात कर रहे हैं।

5.2 संबंधित कोण

5.2.1 पूरक कोण

जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है, तो ये कोण पूरक कोण (complementary angles) कहलाते हैं।



क्या ये दो कोण पूरक कोण हैं? हाँ **आकृति 5.4** क्या ये दो कोण पूरक कोण हैं? नहीं

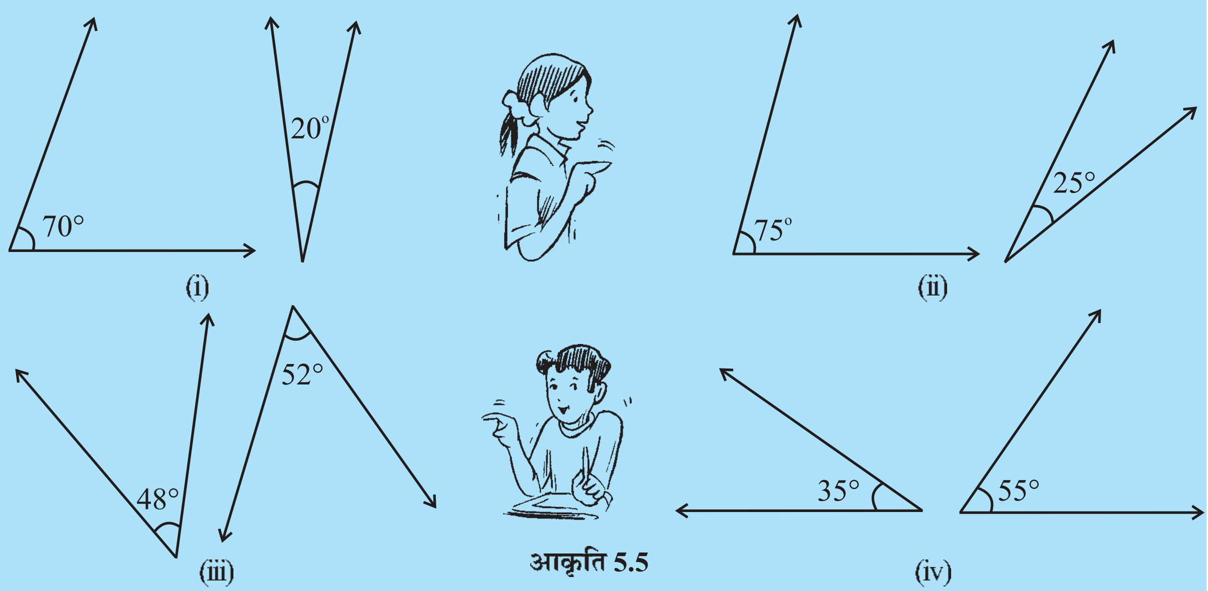
जब दो कोण पूरक होते हैं, तो इनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का **पूरक** कहलाता है। उपर्युक्त आरेख (आकृति 5.4) में "30° का कोण", "60° के कोण" का पूरक है और विलोमत:

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

1. क्या दो न्यून कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
2. क्या दो अधिक कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
3. क्या दो सम कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित कोणों के युग्मों में कौन-से पूरक हैं? (आकृति 5.5)



आकृति 5.5

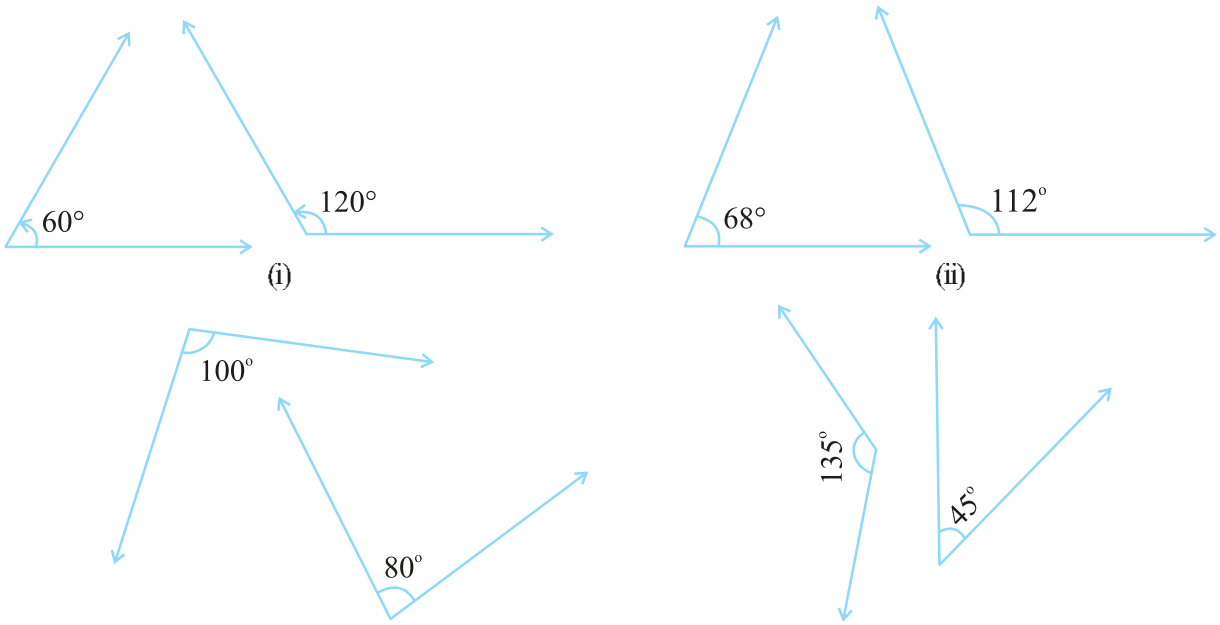
2. निम्नलिखित कोणों में प्रत्येक के पूरक का माप क्या है?

(i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°

3. दो पूरक कोणों के मापों का अंतर 12° है। कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5.2.2 संपूरक कोण

आइए कोणों के निम्नलिखित युग्मों को देखते हैं (आकृति 5.6):



(iii) (iv)

आकृति 5.6

क्या आप देखते हैं कि उपर्युक्त प्रत्येक युग्म में (आकृति 5.6) कोणों के मापों का योग 180° पाया जाता है ? कोणों के ऐसे युग्म **संपूरक कोण (supplementary angles)** कहलाते हैं। जब दो कोण संपूरक होते हैं तो उनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का **संपूरक** कहलाता है।

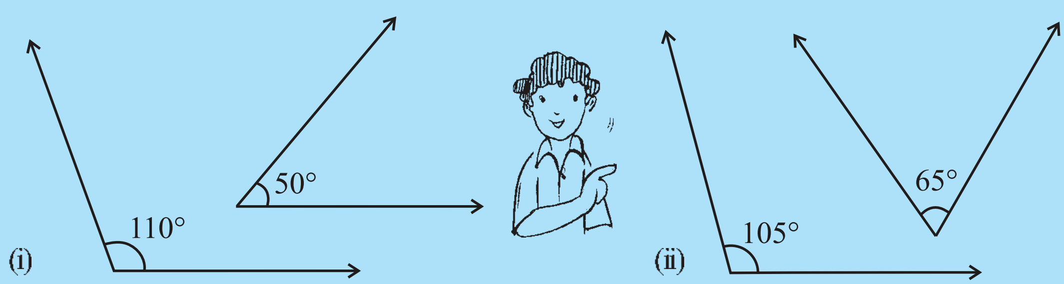
सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

1. क्या दो अधिक कोण संपूरक हो सकते हैं?

2. क्या दो न्यून कोण संपूरक हो सकते हैं? **3.** क्या दो सम कोण संपूरक हो सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. आकृति 5.7 में संपूरक कोणों के युग्म ज्ञात कीजिए :



आकृति 5.7

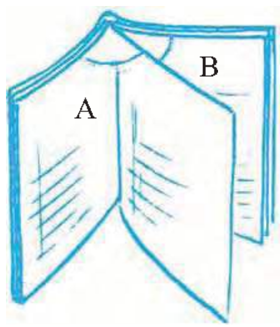
2. निम्नलिखित कोणों में प्रत्येक के संपूरक का माप क्या होगा?

(i) 100° (ii) 90° (iii) 55° (iv) 125°

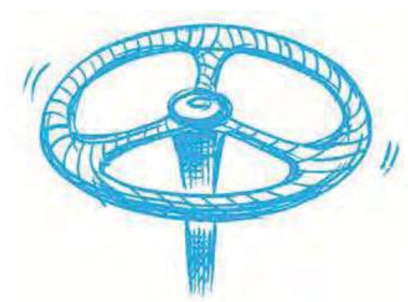
3. दो संपूरक कोणों में बड़े कोण का माप छोटे कोण के माप से 44° अधिक है। कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5.2.3. आसन्न कोण

निम्नलिखित आकृतियों को देखिए :



जब आप एक पुस्तक को खोलते हैं तो यह उपर्युक्त आकृति की तरह दिखाई देती है। A और B में हम कोणों का एक ऐसा युग्म पाते हैं जिसमें एक कोण दूसरे के साथ संलग्न है।



किसी कार के इस स्टीयरिंग व्हील को देखिए। व्हील के केंद्र बिंदु पर तीन कोण पाए जाते हैं जिनमें से प्रत्येक कोण दूसरे के साथ संलग्न पाया जाता है।

आकृति 5.8

दोनों शीर्षों A और B पर, हम पाते हैं कि कोणों का एक युग्म एक दूसरे से संलग्न रखा गया है। ये कोण इस प्रकार हैं कि :

(i) उनका एक उभयनिष्ठ शीर्ष है

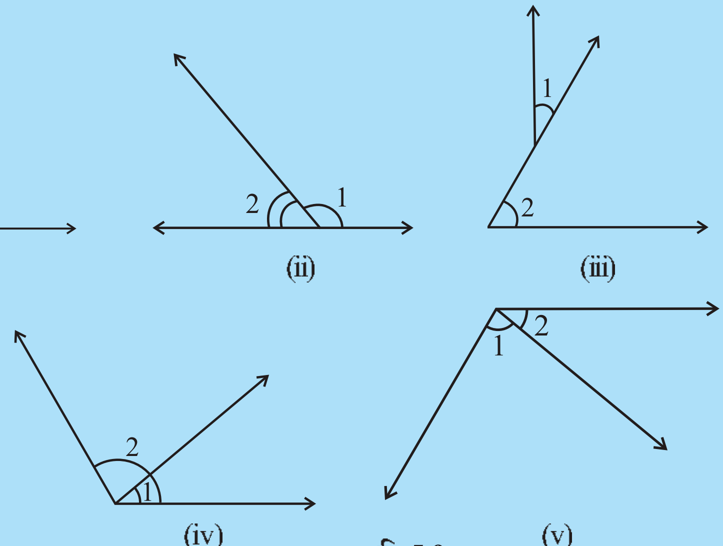
(ii) उनमें एक उभयनिष्ठ भुजा है और

(iii) जो भुजाएँ उभयनिष्ठ नहीं हैं, वे उभयनिष्ठ भुजा के एक-एक तरफ़ हैं।

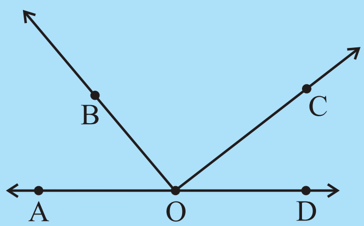
कोणों के ऐसे युग्म **आसन्न कोण (Adjacent angles)** कहलाते हैं। आसन्न कोणों में उभयनिष्ठ शीर्ष एवं उभयनिष्ठ भुजा होती है परंतु कोई भी अंत: बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता है।

प्रयास कीजिए

1. क्या 1 और 2 से अंकित कोण आसन्न हैं? [आकृति 5.9 (i)-(v)] यदि ये आसन्न नहीं हैं तो बताइए, 'क्यों'?



आकृति 5.9



आकृति 5.10

2. आकृति 5.10 में, क्या निम्नलिखित कोण आसन्न हैं?

(a) $\angle AOB$ और $\angle BOC$ (b) $\angle BOD$ और $\angle BOC$

अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

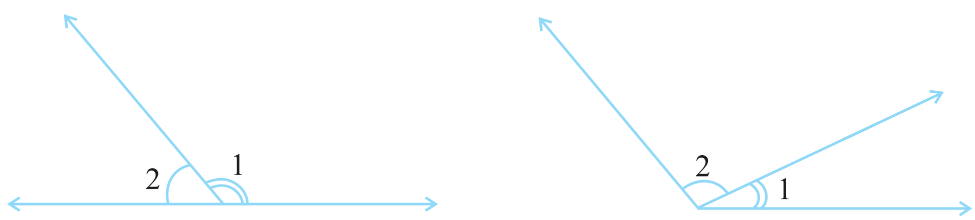
1. क्या दो आसन्न कोण संपूरक हो सकते हैं? **2.** क्या दो आसन्न कोण पूरक हो सकते हैं?

3. क्या दो अधिक कोण आसन्न कोण हो सकते हैं?

4. क्या एक न्यून कोण, अधिक कोण का आसन्न हो सकता है?

5.2.4 रैखिक युग्म

एक रैखिक युग्म (linear pair), ऐसे आसन्न कोणों का युग्म होता है जिनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं, विपरीत दिशा में किरणें होती हैं।



क्या $\angle 1$, $\angle 2$ एक रैखिक युग्म हैं? हाँ — (i)

क्या $\angle 1$, $\angle 2$ एक रैखिक युग्म है? नहीं (क्यों?) — (ii)

आकृति 5.11

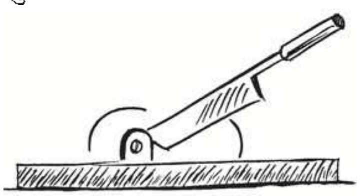
उपर्युक्त आकृति 5.11 (i) में देखिए कि सम्मुख किरणें (जो $\angle 1$ एवं $\angle 2$ की उभयनिष्ठ भुजाएँ नहीं हैं) एक रेखा का निर्माण करती हैं। इस प्रकार $\angle 1 + \angle 2$ का मान 180° हो जाता है।

रैखिक युग्म के कोण संपूरक होते हैं।

क्या आपने अपने आसपास में रैखिक युग्म के मॉडलों पर ध्यान दिया है?

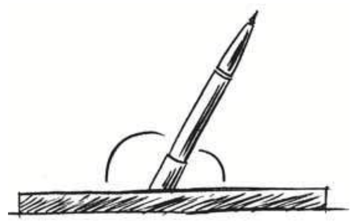
सावधानीपूर्वक नोट कीजिए कि संपूरक कोणों का युग्म, रैखिम युग्म तभी बनाता है, जब प्रत्येक को दूसरे के आसन्न रखा जाए।

क्या आप अपने दैनिक जीवन में रैखिक युग्म के उदाहरण पाते हैं? सब्जी काटने वाले पट को प्रेक्षित कीजिए (आकृति 5.12)। क्या आप कह सकते हैं कि काटने वाला ब्लेड पट के साथ रैखिक युग्म बनाता है?



एक सब्जी काटने वाला पट

काटने वाला ब्लेड, पट के साथ कोणों का एक रैखिक युग्म बनाता है।



एक पेन स्टैंड

पेन, स्टैंड के साथ कोणों का एक रैखिक युग्म बनाता है।

आकृति 5.12

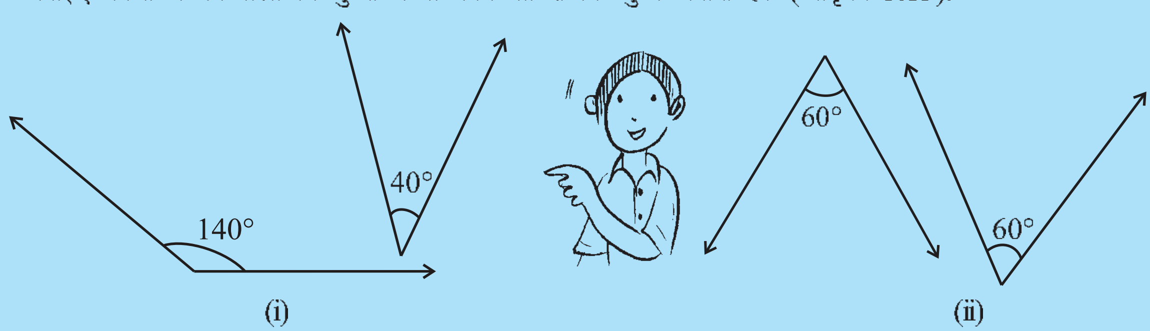
फिर से, पेन स्टैंड देखिए (आकृति 5.12)। क्या आप कह सकते हैं कि पेन, स्टैंड के साथ रैखिक युग्म बनाता है ?

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

1. क्या दो न्यून कोण एक रैखिक युग्म बना सकते हैं?
2. क्या दो अधिक कोण एक रैखिक युग्म बना सकते हैं?
3. क्या दो सम कोण एक रैखिक युग्म बना सकते हैं?

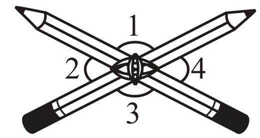
प्रयास कीजिए

बताइए कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से कौन-सा रैखिक युग्म बनाता है? (आकृति 5.13):



आकृति 5.13

5.2.5 उर्ध्वाधर सम्मुख कोण



आकृति 5.14

दो पेंसिल लीजिए और उन्हें मध्य में रबड़ बैंड की सहायता से एक–दूसरे के साथ बाँध दीजिए, जैसा कि आकृति 5.14 में दर्शाया गया है।

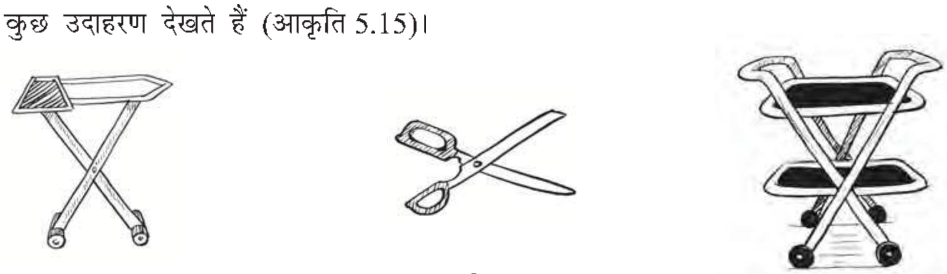
इस प्रकार निर्मित चार कोणों, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ एवं $\angle 4$ को देखिए

$\angle 1$, $\angle 3$ के उर्ध्वाधर सम्मुख है और $\angle 4$, $\angle 2$ के उर्ध्वाधर सम्मुख है।

$\angle 1$ एवं $\angle 3$ को हम उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों (vertically opposite angles) का एक युग्म कहते हैं। क्या आप उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के अन्य युग्म का नाम दे सकते हैं?

क्या $\angle 1$, $\angle 3$ के बराबर दिखाई देता है? क्या $\angle 2$, $\angle 4$ के बराबर दिखाई देता है?

इसको सत्यापित करने से पहले आइए हम उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के लिए वास्तविक जीवन से कुछ उदाहरण देखते हैं (आकृति 5.15)।



आकृति 5.15

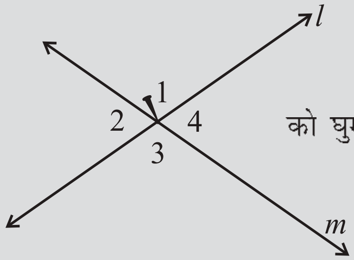
इन्हें कीजिए

किसी एक बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती हुई दो रेखाएँ l और m खींचिए। अब आप $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ एवं $\angle 4$ अंकित कर सकते हैं जैसा कि आकृति 5.16 में दर्शाया गया है।

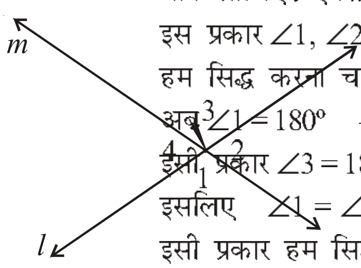
एक पारदर्शी कागज़ के ऊपर इस आकृति की एक अनुरेख प्रतिलिपि लीजिए।

उसको मूल प्रति के ऊपर इस प्रकार रखिए ताकि $\angle 1$ अपनी प्रतिलिपि को ढक ले, $\angle 2$ अपनी प्रतिलिपि को ढक ले, ... इत्यादि।

प्रतिच्छेदन बिंदु पर एक पिन लगाइए। प्रतिलिपि को $180°$ से घुमाइए। क्या रेखाएँ फिर से संपाती हो जाती हैं?



को घुमाकर



को प्राप्त किया जा सकता है।

आकृति 5.16

आप पाते हैं कि $\angle 1$ एवं $\angle 3$ ने अपनी स्थितियाँ परस्पर बदल ली हैं और इसी प्रकार $\angle 2$ एवं $\angle 4$ ने भी अपनी स्थितियाँ परस्पर बदल ली हैं । यह सब रेखाओं की स्थिति को बदले बिना किया गया है। इस प्रकार $\angle 1 = \angle 3$ एवं $\angle 2 = \angle 4$.

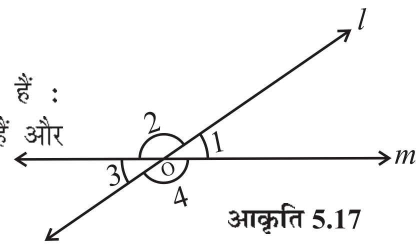
हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि **यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो इस प्रकार बने उर्ध्वाधर सम्मुख कोण समान होते हैं।**

आइए ज्यामिति का उपयोग करते हुए इसे सिद्ध करने का प्रयास करते हैं।

आइए दो रेखाएँ l और m लेते हैं (आकृति 5.17)।

हम इस परिणाम पर तर्कसंगत युक्ति से निम्नलिखित प्रकार से पहुँच सकते हैं :

मान लीजिए l एवं m दो रेखाएँ हैं जो एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं और इस प्रकार $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ एवं $\angle 4$ निर्मित करती हैं।



आकृति 5.17

हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $\angle 1 = \angle 3$ एवं $\angle 2 = \angle 4$

अब $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ($\angle 1$ एवं $\angle 2$ रैखिक युग्म बनाते हैं इसलिए $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$) (i)

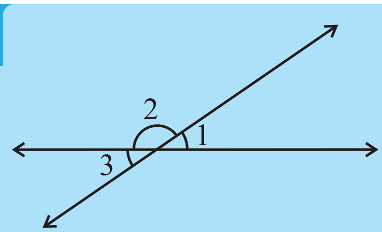
इसी प्रकार $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$ ($\angle 2$, $\angle 3$ रैखिक युग्म बनाते हैं इसलिए $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$) (ii)

इसलिए $\angle 1 = \angle 3$ [(i) और (ii) से]

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle 2 = \angle 4$ (प्रयास कीजिए)।

प्रयास कीजिए

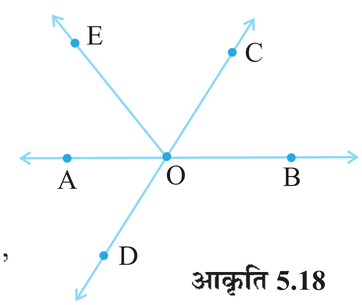
1. दी हुई आकृति में यदि $\angle 1 = 30^\circ$, तो $\angle 2$ एवं $\angle 3$ ज्ञात कीजिए।
2. अपने आसपास से उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों का एक उदाहरण दीजिए।



उदाहरण 1 आकृति 5.18 में निम्नलिखित की पहचान कीजिए:

(i) आसन्न कोणों के पाँच युग्म (ii) तीन रैखिक युग्म

(iii) उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के दो युग्म।



आकृति 5.18

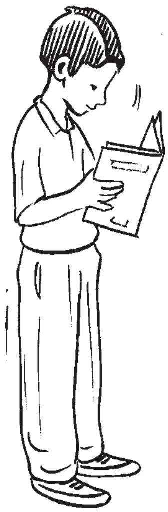
हल

(i) आसन्न कोणों के पाँच युग्म हैं : ($\angle$AOE, $\angle$EOC), ($\angle$EOC, $\angle$COB), ($\angle$AOC, $\angle$COB), ($\angle$COB, $\angle$BOD), ($\angle$EOB, $\angle$BOD)

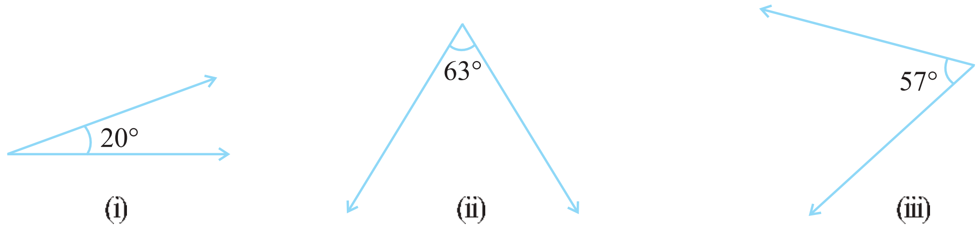
(ii) रैखिक युग्म हैं : ($\angle$AOE, $\angle$EOB), ($\angle$AOC, $\angle$COB), ($\angle$COB, $\angle$BOD)

(iii) उर्ध्वाधर सम्मुख कोण हैं : ($\angle$COB, $\angle$AOD), ($\angle$AOC, $\angle$BOD)

प्रश्नावली 5.1

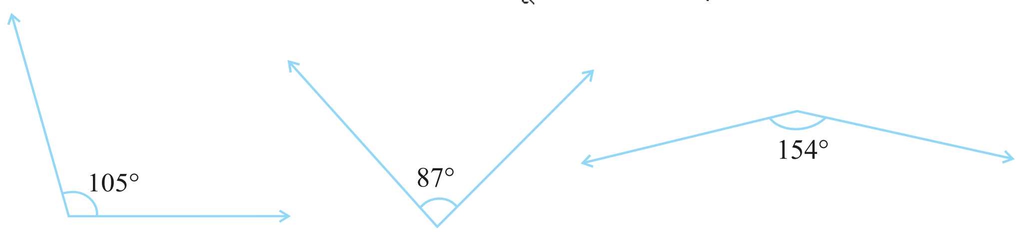


1. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का पूरक ज्ञात कीजिए :



(i) (ii) (iii)

2. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का संपूरक ज्ञात कीजिए।



(i) (ii) (iii)

3. कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से पूरक एवं संपूरक युग्मों की पृथक्-पृथक् पहचान कीजिए :

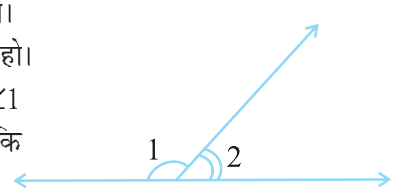
   (i) $65°, 115°$ (ii) $63°, 27°$ (iii) $112°, 68°$

   (iv) $130°, 50°$ (v) $45°, 45°$ (vi) $80°, 10°$

4. ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने पूरक के समान हो।

5. ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने संपूरक के समान हो।

6. दी हुई आकृति में $\angle 1$ एवं $\angle 2$ संपूरक कोण हैं। यदि $\angle 1$ में कमी की जाती है, तो $\angle 2$ में क्या परिवर्तन होगा ताकि दोनों कोण फिर भी संपूरक ही रहें।



7. क्या दो ऐसे कोण संपूरक हो सकते हैं यदि उनमें से दोनों

   (i) न्यून कोण हैं? (ii) अधिक कोण हैं? (iii) सम कोण हैं?

8. एक कोण $45°$ से बड़ा है। क्या इसका पूरक कोण $45°$ से बड़ा है अथवा $45°$ के बराबर है अथवा $45°$ से छोटा है?

9. संलग्न आकृति में :

   (i) क्या $\angle 1$, $\angle 2$ का आसन्न है?

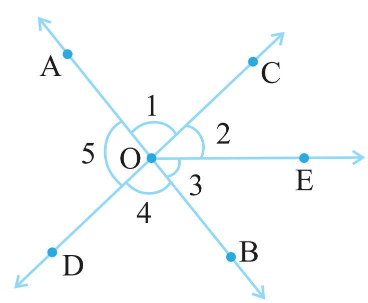
   (ii) क्या $\angle$AOC, $\angle$AOE का आसन्न है?

   (iii) क्या $\angle$COE एवं $\angle$EOD रैखिक युग्म बनाते हैं?

   (iv) क्या $\angle$BOD एवं $\angle$DOA संपूरक है?

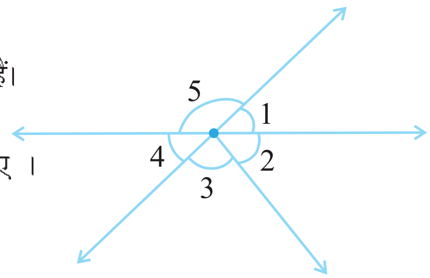
   (v) क्या $\angle 1$ का उर्ध्वाधर सम्मुख कोण $\angle 4$ है?

   (vi) $\angle 5$ का उर्ध्वाधर सम्मुख कोण क्या हैं?

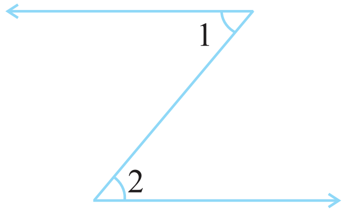


10. पहचानिए कि कोणों के कौन से युग्म :

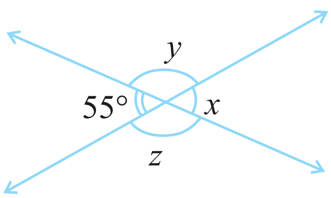
(i) उर्ध्वाधर सम्मुख कोण हैं। (ii) रैखिक युग्म हैं।



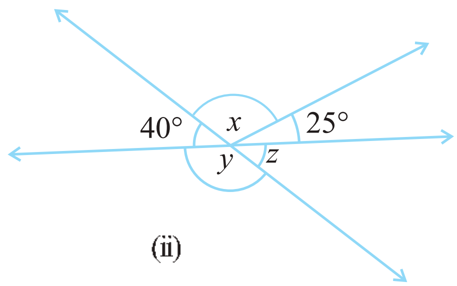
11. निम्नलिखित आकृति में क्या $\angle 1$, $\angle 2$ का आसन्न है? कारण लिखिए ।



12. निम्नलिखित में से प्रत्येक में कोण x, y एवं z के मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)

13. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) यदि दो कोण पूरक हैं, तो उनके मापों का योग ________ है।

(ii) यदि दो कोण संपूरक हैं तो उनके मापों का योग _______ है।

(iii) रैखिक युग्म बनाने वाले दो कोण __________________ होते हैं।

(iv) यदि दो आसन्न कोण संपूरक हैं, तो वे _____________ बनाते हैं।

(v) यदि दो रेखाएँ एक–दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो उर्ध्वाधर सम्मुख कोण हमेशा ________________ होते हैं।

(vi) यदि दो रेखाएँ एक–दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है और यदि उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों का एक युग्म न्यून कोण है, तो उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों का दूसरा युग्म _________ है।

14. संलग्न आकृति में निम्नलिखित कोण युग्मों को नाम दीजिए :

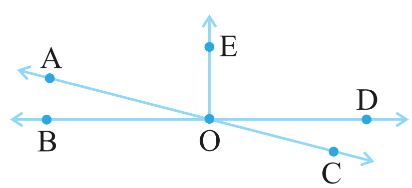
(i) उर्ध्वाधर सम्मुख अधिक कोण

(ii) आसन्न पूरक कोण

(iii) समान संपूरक कोण

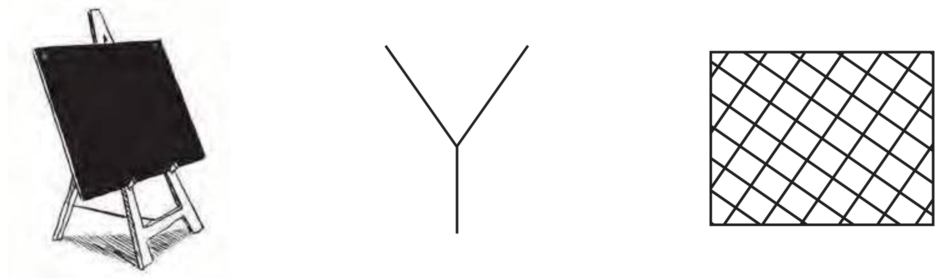
(iv) असमान संपूरक कोण

(v) आसन्न कोण जो रैखिक युग्म नहीं बनाते हैं।

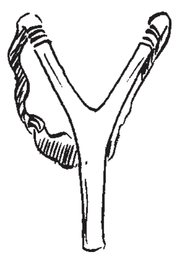


5.3 रेखा युग्म

5.3.1 प्रतिच्छेदी रेखाएँ

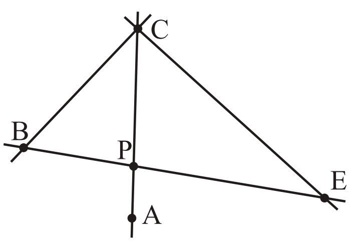


आकृति 5.19



स्टैंड पर रखा हुआ श्यामपट्ट, रेखाखंडों द्वारा निर्मित अक्षर Y और एक खिड़की का जालीदार दरवाज़ा, इन सभी में उभयनिष्ठ क्या हैं? ये प्रतिच्छेदी रेखाओं (intersecting lines) के उदाहरण हैं (आकृति 5.19)। दो रेखाएँ *l* और *m* **प्रतिच्छेद** करती हैं यदि उनमें एक बिंदु उभयनिष्ठ है। यह उभयनिष्ठ बिंदु उनका **प्रतिच्छेद बिंदु** कहलाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए



आकृति 5.20

आकृति 5.20 में, AC और BE, P पर प्रतिच्छेद करती हैं।
AC और BC, C पर प्रतिच्छेद करती हैं। AC और EC, C पर प्रतिच्छेद करती हैं।
प्रतिच्छेदी रेखाखंडों के दस अन्य युग्म ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।
क्या दो रेखाएँ अथवा रेखाखंड आवश्यक रूप से प्रतिच्छेद करने चाहिए?
क्या आप इस आकृति में दो रेखाखंडों के युग्म ज्ञात कर सकते हैं जो प्रतिच्छेदी नहीं है? क्या दो रेखाएँ एक से ज्यादा बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। इसके बारे में विचार कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. अपने आसपास के परिवेश से ऐसे उदाहरण ज्ञात कीजिए जहाँ रेखाएँ सम कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।
2. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित कोणों के माप ज्ञात कीजिए।
3. एक आयत खींचिए और प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित चार शीर्षों के कोणों के माप ज्ञात कीजिए।
4. यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं, तो क्या वे हमेशा एक-दूसरे को सम कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं?

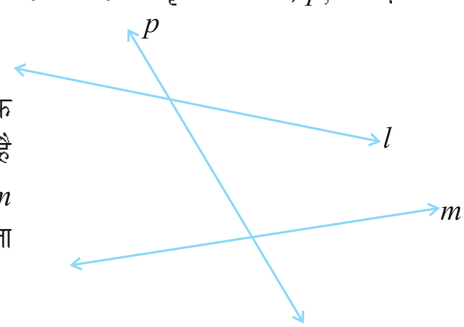
5.3.2 तिर्यक छेदी रेखा

शायद, आपने दो अथवा अधिक सड़कों को पार करते हुए एक सड़क देखी होगी अथवा कई अन्य रेल पटरियों को पार करते हुए एक रेल पटरी देखी होगी। इनसे तिर्यक छेदी रेखा (transversal) का अनुभव प्राप्त होता है (आकृति 5.21)।

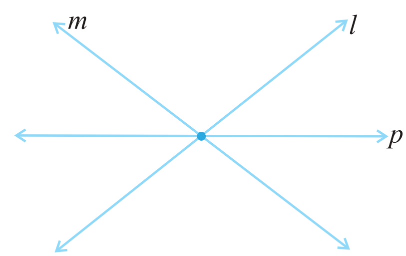
(i) आकृति 5.21 (ii)

एक ऐसी रेखा जो दो अथवा अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, **तिर्यक छेदी रेखा** (transversal) कहलाती है। आकृति 5.22 में, p, रेखाएँ l और m की तिर्यक छेदी रेखा है।

आकृति 5.23 में, p एक तिर्यक छेदी रेखा नहीं है तथापि यह रेखाएँ l और m को काटती है। क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'?



आकृति 5.22



आकृति 5.23

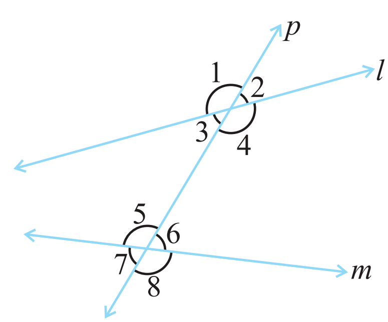
प्रयास कीजिए

1. मान लीजिए दो रेखाएँ दी हुई हैं। इन रेखाओं के लिए आप कितनी तिर्यक छेदी रेखाएँ खींच सकते हैं?
2. यदि एक रेखा तीन रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा है, तो बताइए कितने प्रतिच्छेदन बिंदु हैं।
3. अपने आसपास कुछ तिर्यक छेदी रेखाएँ ढूँढने का प्रयास कीजिए।

5.3.3 तिर्यक छेदी रेखा द्वारा निर्मित कोण

आकृति 5.24 में, आप देखते हैं कि रेखाएँ l एवं m तिर्यक छेदी रेखा p द्वारा काटी जा रही है। इस प्रकार बनने वाले 1 से 8 तक अंकित कोणों के विशिष्ट नाम हैं:

अंत:कोण	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6,$
बाह्य कोण	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
संगत कोणों के युग्म	$\angle 1$ और $\angle 5$, $\angle 2$ और $\angle 6$, $\angle 3$ और $\angle 7$, $\angle 4$ और $\angle 8$.
एकांतर अंत: कोणों के युग्म	$\angle 3$ और $\angle 6$, $\angle 4$ और $\angle 5$
एकांतर बाह्य कोणों के युग्म	$\angle 1$ और $\angle 8$, $\angle 2$ और $\angle 7$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत:कोणों के युग्म	$\angle 3$ और $\angle 5$, $\angle 4$ और $\angle 6$

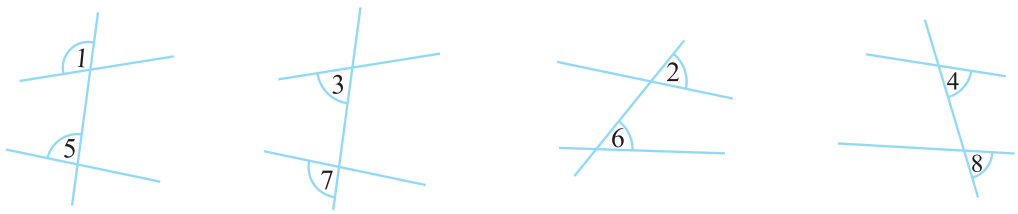


आकृति 5.24

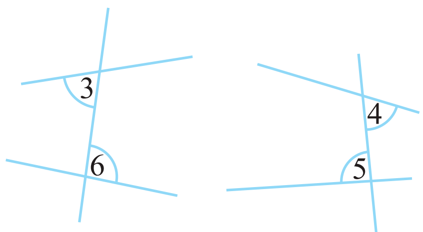
टिप्पणीः आकृति 5.25 में ($\angle 1$ एवं $\angle 5$ जैसे) संगत कोणों में निम्नलिखित सम्मिलित होते हैं :

(i) विभिन्न शीर्ष (ii) तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ बने होते हैं।

(iii) दो रेखाओं के सापेक्ष संगत स्थितियों (ऊपर अथवा नीचे, बायाँ अथवा दायाँ) में होते हैं।



आकृति 5.25



आकृति 5.26

आकृति 5.26 में ($\angle 3$ एवं $\angle 6$ जैसे) अंतः एकांतर कोण

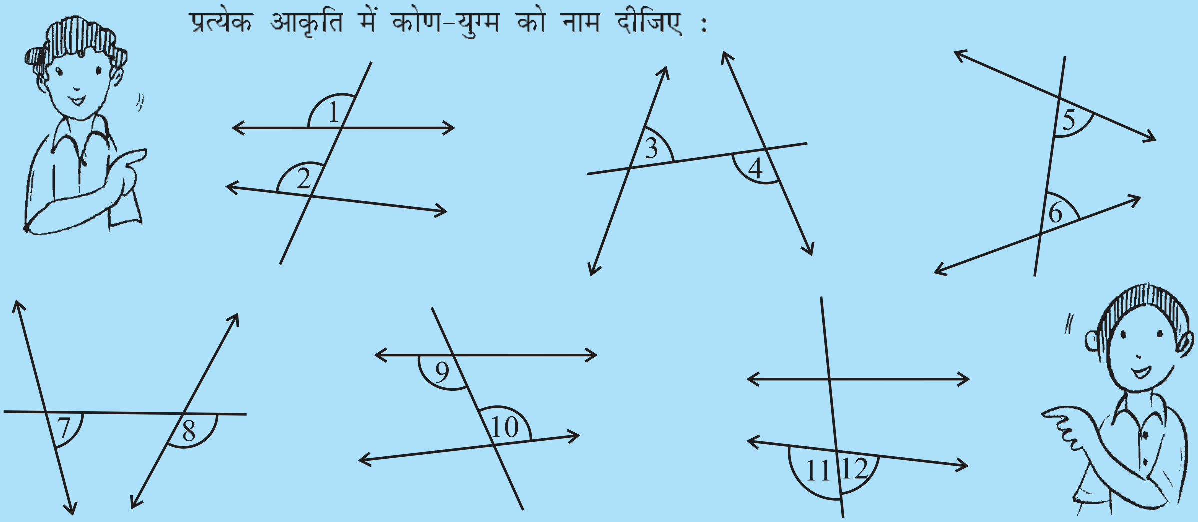
(i) के विभिन्न शीर्ष होते हैं।

(ii) तिर्यक छेदी रेखा के सम्मुख स्थिति पर बने होते हैं।

(iii) दो रेखाओं के "मध्य" स्थित होते हैं।

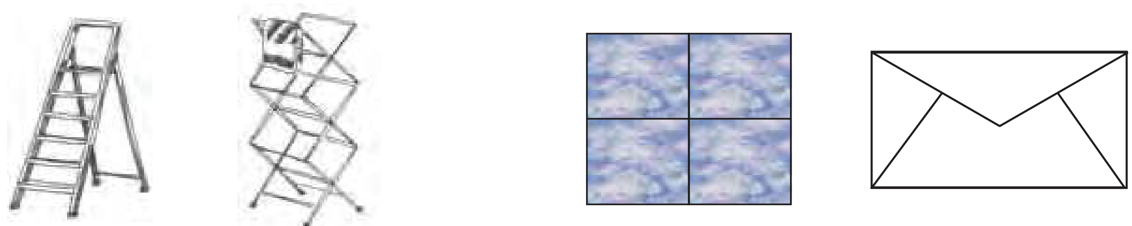
प्रयास कीजिए

प्रत्येक आकृति में कोण–युग्म को नाम दीजिए :



5.3.4 समांतर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा

क्या आपको याद है कि समांतर रेखाएँ क्या हैं । ये किसी तल में ऐसी रेखाएँ होती हैं जो एक–दूसरे से कहीं नहीं मिलती। क्या आप निम्नलिखित आकृतियों में समांतर रेखाओं की पहचान कर सकते हैं? (आकृति 5.27)



आकृति 5.27

समांतर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा से बहुत ही रुचिकर परिणाम प्राप्त होते हैं।

इन्हें कीजिए

एक रेखांकित कागज़ लीजिए। दो मोटी रंगीली समांतर रेखाएँ l और m खींचिए।

रेखाएँ l और m की एक तिर्यक छेदी रेखा t खींचिए। $\angle 1$ और $\angle 2$ को लेबल कीजिए जैसा कि आकृति 5.28(i) में दर्शाया गया है।

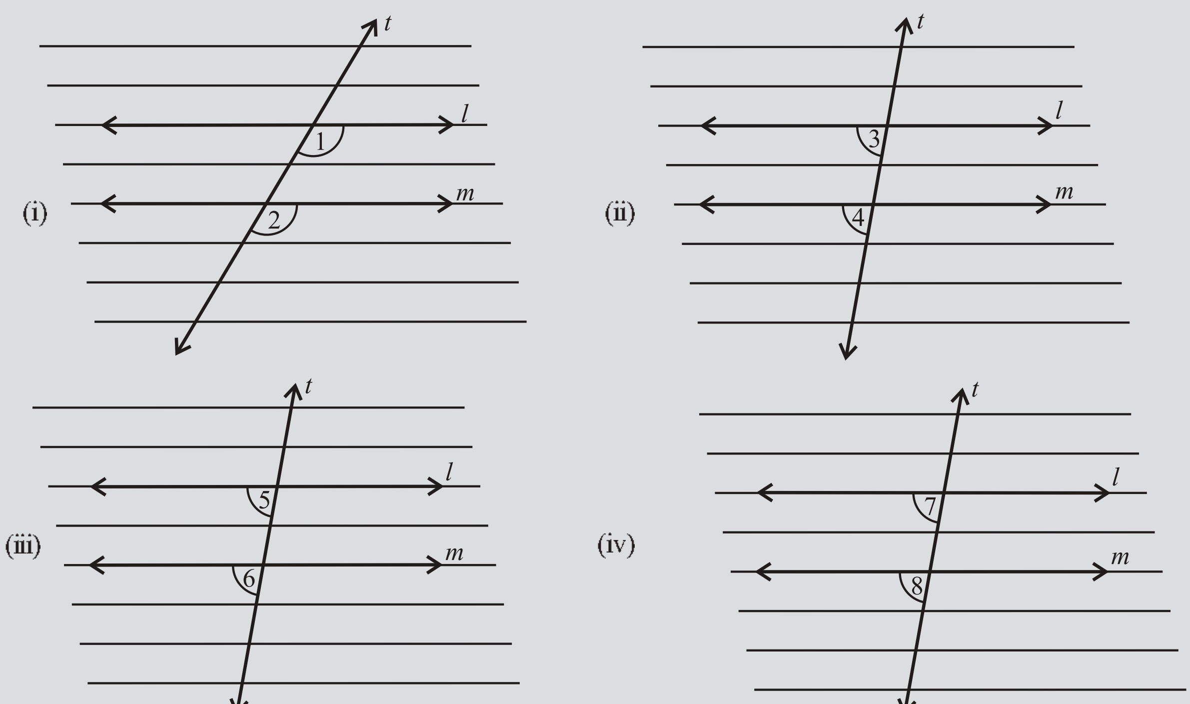
खींची गई आकृति पर एक अनुरेखण कागज़ (ट्रेसिंग पेपर) रखिए। रेखाएँ l, m और t की प्रतिलिपि बनाइए।

ट्रेसिंग पेपर को t के अनु तब तक खिसकाइए जब तक l, m के संपाती न हो जाए।

आप पाते हैं कि प्रतिलिपित आकृति का $\angle 1$, मूल आकृति के $\angle 2$ के संपाती हो जाता है।

वास्तव में आप निम्नलिखित परिणामों को अनुरेखण एवं खिसकाने के क्रियाकलाप से सत्यापित कर सकते हैं।

(i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$



आकृति 5.28

यह क्रियाकलाप निम्नलिखित तथ्य को दृष्टांतित करती है :

> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती है, तो संगत कोणों के प्रत्येक युग्म का माप समान होता है।

इस परिणाम का उपयोग करते हुए हम एक दूसरा रुचिकर परिणाम प्राप्त करते हैं।आकृति 5.29 को देखिए।

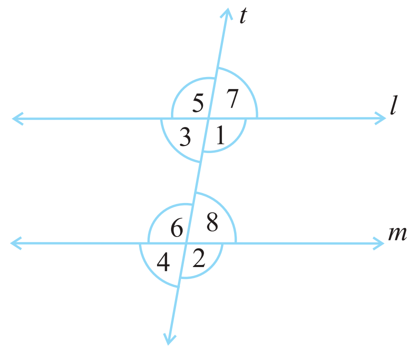
जब समांतर रेखाएँ l और m, रेखा t द्वारा काटी जाती हैं,

तो $\angle 3 = \angle 7$ (उर्ध्वाधर सम्मुख कोण)

परंतु $\angle 7 = \angle 8$ (संगत कोण) इसलिए $\angle 3 = \angle 8$

इसी प्रकार आप दर्शा सकते हैं कि $\angle 1 = \angle 6$. अत: हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है:

> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं, तो अंत: एकांतर कोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है।



आकृति 5.29

यह दूसरा परिणाम हमें एक ओर रुचिकर गुणधर्म की ओर अग्रसर करता है। फिर से आकृति 5.29 में दिए हुए आलेख से, $\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ($\angle 3$ और $\angle 1$ रैखिक युग्म बनाते हैं)

परंतु $\angle 1 = \angle 6$ (अंत: एकांतर कोणों का एक युग्म)

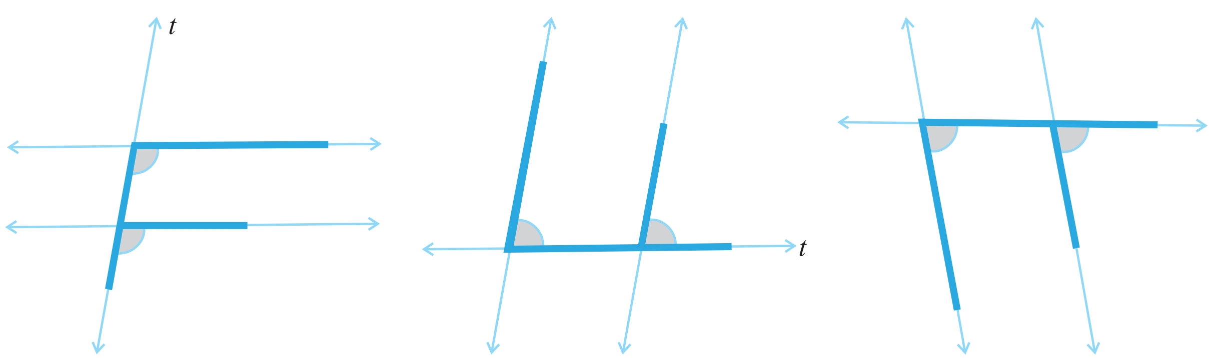
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $\angle 3 + \angle 6 = 180°$।

इसी प्रकार $\angle 1 + \angle 8 = 180°$. इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है :

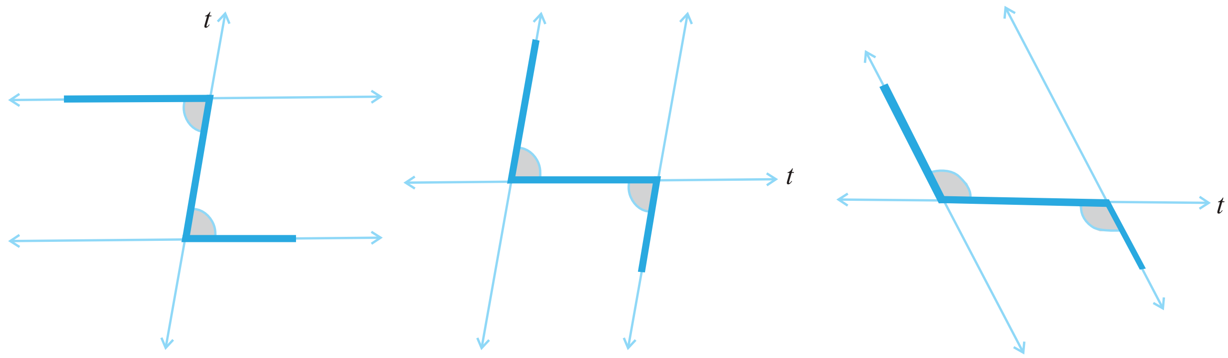
> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं तो तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ को बने अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

सुसंगत आकृतियों को ध्यान में रखते हुए आप इन परिणामों को बहुत आसानी से स्मरण कर सकते हैं:

संगत कोणों के लिए F-आकार को ध्यान में रखिए



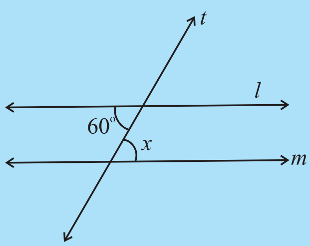
एकांतर कोणों के लिए Z - आकार को ध्यान में रखिए।



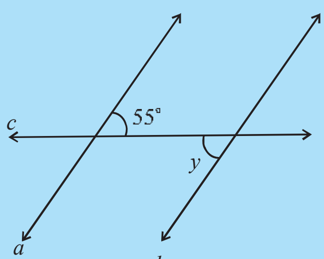
इन्हें कीजिए

समांतर रेखाओं का एक युग्म एवं एक तिर्यक छेदी रेखा खींचिए। कोणों को मापकर उपर्युक्त तीन कथनों का सत्यापन कीजिए।

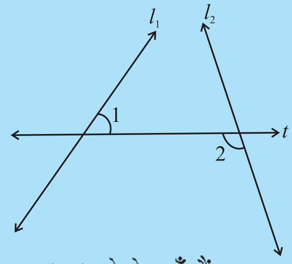
प्रयास कीजिए



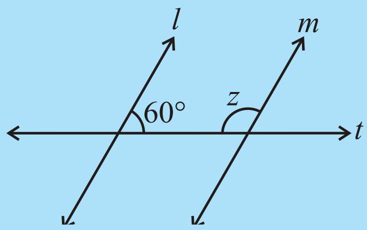
$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है
$\angle x = ?$



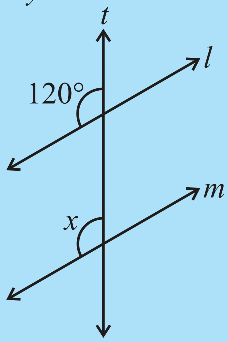
$a \parallel b$,
c एक तिर्यक छेदी रेखा है
$\angle y = ?$



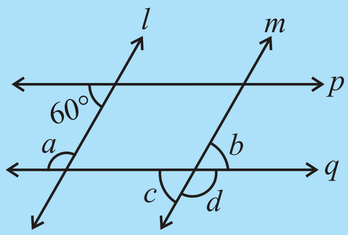
l_1, l_2 दो रेखाएँ हैं,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है।
क्या $\angle 1 = \angle 2$ हैं?



$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है,
$\angle z = ?$



$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है,
$\angle x = ?$

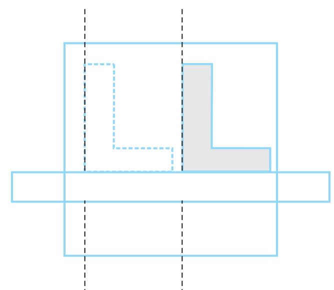


$l \parallel m, p \parallel q$,
a, b, c, d ज्ञात कीजिए

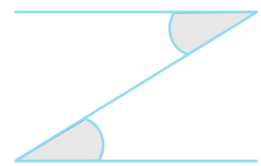
5.4 समांतर रेखाओं की जाँच

यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो आप जानते हैं कि एक तिर्यक छेदी रेखा की सहायता से, समान संगत कोणों का एक युग्म प्राप्त होता है, समान अंत: एकांतर कोणों का युग्म प्राप्त होता है और तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बनें अंत: कोण, जो संपूरक होते हैं।

जब दो रेखाएँ दी हुई हैं तो क्या कोई ऐसी विधि है जिसकी सहायता से यह जाँच की जा सके कि दी हुई रेखाएँ समांतर हैं अथवा नहीं? जीवन से जुड़ी अनेक परिस्थितियों में आपको इस कौशल की आवश्यकता होती है।



आकृति 5.30



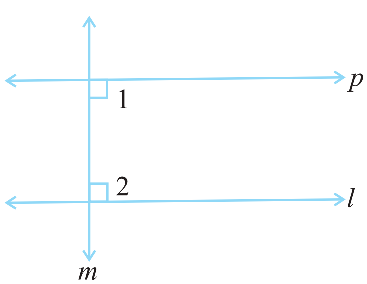
आकृति 5.31

इन खंडों को (आकृति 5.30) खींचने के लिए एक नक्शानवीश, बढ़ई के वर्ग एवं रुलर का प्रयोग करता है। वह दावा करता है कि ये समांतर हैं। कैसे? क्या आप देख पाते हैं कि उसने संगत कोणों को समान रखा है? (यहाँ तिर्यक छेदी रेखा क्या है?)

अत: जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि संगत कोणों के युग्म समान हैं, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

अक्षर Z (आकृति 5.31) को देखिए। यहाँ क्षैतिज खंड समांतर हैं क्योंकि एकांतर कोण समान हैं।

जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि अंत: एकांतर कोणों का युग्म समान है, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।



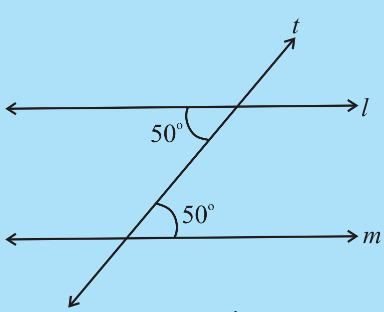
आकृति 5.32

एक रेखा l खींचिए (आकृति 5.32).

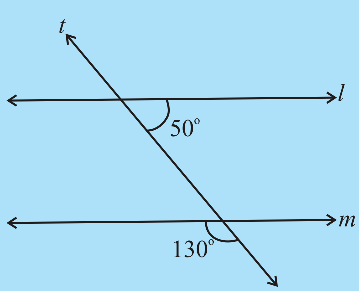
रेखा l के लंबवत् एक रेखा m खींचिए। एक रेखा p इस प्रकार खींचिए ताकि p, m के लंबवत् हो। इस प्रकार p, l लंब पर लंब है। आप पाते हैं $p \parallel l$ कैसे? यह इसलिए है क्योंकि आपने p को इस प्रकार खींचा है कि $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

अत: *जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत: कोणों का युग्म संपूरक है, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।*

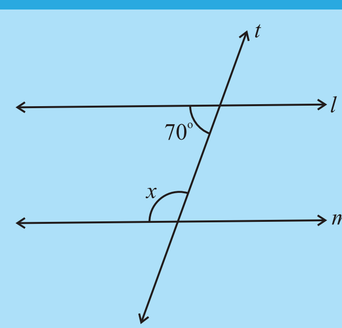
प्रयास कीजिए



क्या $l \parallel m$ है? क्यों



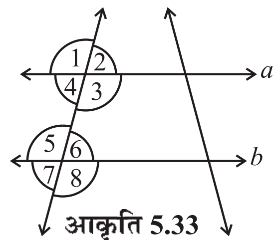
क्या $l \parallel m$ है? क्यों



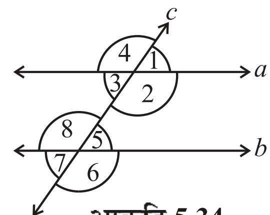
यदि $l \parallel m$, तो x क्या है?

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित कथनों में प्रत्येक कथन में उपयोग किए गए गुणधर्म का वर्णन कीजिए (आकृति 5.33)।
   (i) यदि $a \parallel b$, तो $\angle 1 = \angle 5$
   (ii) यदि $\angle 4 = \angle 6$, तो $a \parallel b$.
   (iii) यदि $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, तो $a \parallel b$

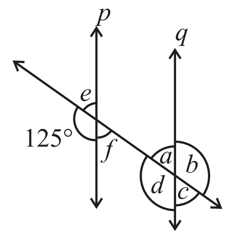


आकृति 5.33

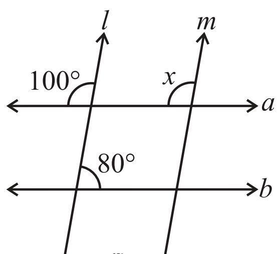


आकृति 5.34

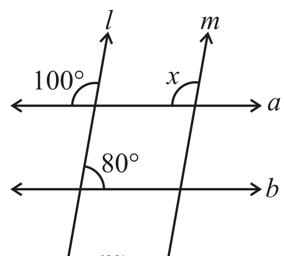
2. आकृति 5.34 में निम्नलिखित की पहचान कीजिए:
   (i) संगत कोणों के युग्म (ii) अंत: एकांतर कोणों के युग्म
   (iii) तिर्यक छेदी रेखा के एक तरफ़ बने अंत:कोणों के युग्म
   (iv) उर्ध्वाधर सम्मुख कोण
3. सलंग्न आकृति में $p \parallel q$। अज्ञात कोण ज्ञात कीजिए।



4. यदि $l \parallel m$ है, तो निम्नलिखित आकृतियों में प्रत्येक में x का मान ज्ञात कीजिए।

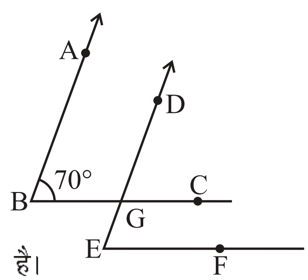


(i)

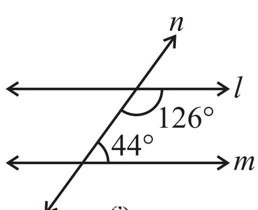


(ii)

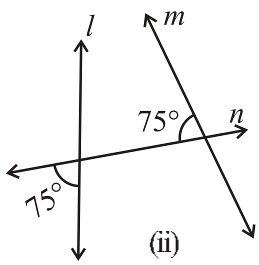
5. दी हुई आकृति में, दो कोणों की भुजाएँ समांतर हैं।
   यदि $\angle ABC = 70°$, तो
   (i) $\angle DGC$ ज्ञात कीजिए।
   (ii) $\angle DEF$ ज्ञात कीजिए।



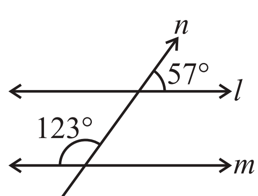
6. नीचे दी हुई आकृतियों में निर्णय लीजिए कि क्या l, m के समांतर है।



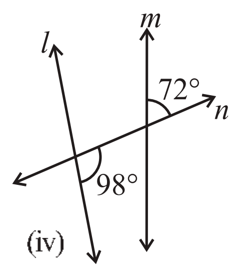
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

हमने क्या चर्चा की?

1. हम स्मरण करते हैं कि
   (i) एक रेखाखंड के दो अंत बिंदु होते हैं।
   (ii) एक किरण का केवल एक अंत बिंदु (इसका शीर्ष) होता है।
   (iii) एक रेखा का किसी भी तरफ़ कोई अंत बिंदु नहीं होता है।

2. एक कोण का निर्माण तब होता है जब दो रेखाएँ (अथवा किरण अथवा रेखाखंड) एक दूसरे को मिलती हैं।

कोण युग्म	प्रतिबंध
दो पूरक कोण	मापों का योग 90° है।
दो संपूरक कोण	मापों का योग 180° है।
दो आसन्न कोण	एक उभयनिष्ठ शीर्ष और एक उभयनिष्ठ भुजा होती है। परंतु कोई उभयनिष्ठ अंतस्थ नहीं होता है।
रैखिक युग्म	आसन्न एवं संपूरक

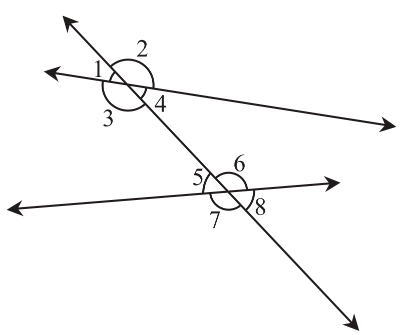
3. जब दो रेखाएँ l और m एक दूसरे से मिलती हैं तो हम कहते हैं कि ये रेखाएँ *प्रतिच्छेद* करती हैं। मिलान बिंदु प्रतिच्छेद बिंदु कहलाता है। ऐसी रेखाएँ जिन्हें कितना भी बढ़ाया जाए, आपस में नहीं मिलती, *समांतर रेखाएँ* कहलाती हैं।

4. (i) जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं (सामान्यत:, अक्षर X की भाँति दिखाई देती हैं) तो हमें सम्मुख कोणों के दो युग्म प्राप्त होते हैं। इन्हें *उर्ध्वाधर सम्मुख कोण* कहा जाता है। इनका माप समान होता है।

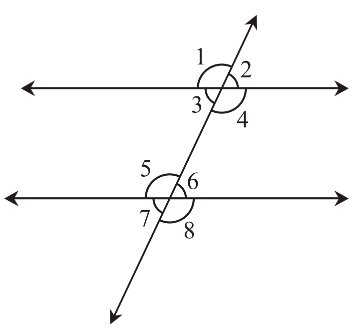
   (ii) दो अथवा अधिक रेखाओं को विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।

   (iii) एक तिर्यक छेदी रेखा आरेख से विभिन्न प्रकार के कोण प्राप्त होते हैं।

   (iv) आकृति में हमें मिलता है

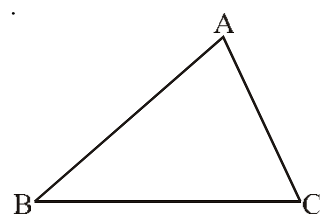


कोणों के प्रकार	दर्शाने वाले कोण
अंत:	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
बाह्य	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
संगत	$\angle 1$ तथा $\angle 5$, $\angle 2$ एवं $\angle 6$, $\angle 3$ तथा $\angle 7$, $\angle 4$ एवं $\angle 8$
अंत: एकांतर	$\angle 3$ तथा $\angle 6$, $\angle 4$ एवं $\angle 5$,
बाह्य एकांतर	$\angle 1$ तथा $\angle 8$, $\angle 2$ एवं $\angle 7$,
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने	$\angle 3$ तथा $\angle 5$, $\angle 4$ एवं $\angle 6$,



   (v) जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो हमें निम्नलिखित रुचिकर संबंध प्राप्त होते है। *संगत कोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है:* $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$
   अंत: एकांतर कोणों के युग्म समान होते हैं: $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$
   तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है: $\angle 3 + \angle 5 = 180°$, $\angle 4 + \angle 6 = 180°$

6



6.1

ΔABC (6.1)

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

$\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$

A, B, C

A $\overline{BC}$ $\overline{AB}$ (i) (ii)

(i)

(ii)

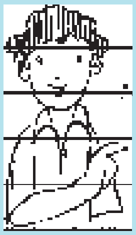
1. ΔABC

2.

(i) ΔPQR Q

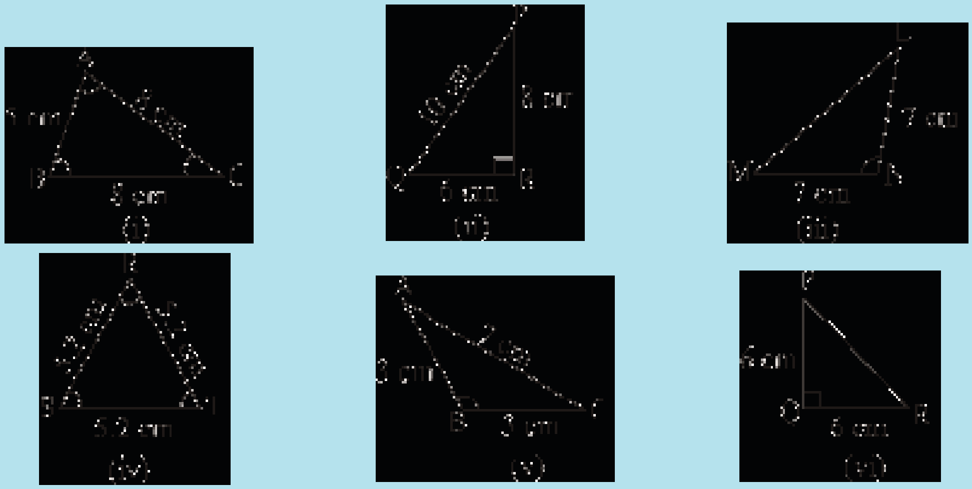
(ii) ΔLMN LM

(iii) ΔRST RT



3. 6.2

(a) (b)

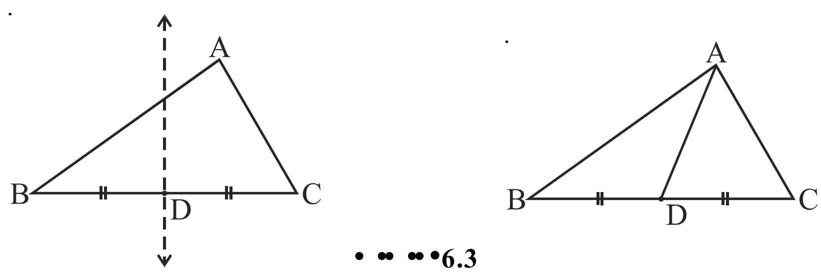


6.2

ABC (6.3) $\overline{BC}$

$\overline{BC}$

$\overline{BC}$ D A D



6.3

AD, $\overline{BC}$ D A

$\overline{AB}$ $\overline{CA}$

1.

2.

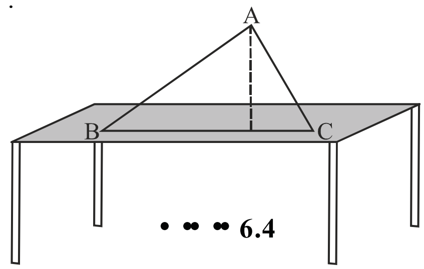
ABC

A $\overline{BC}$

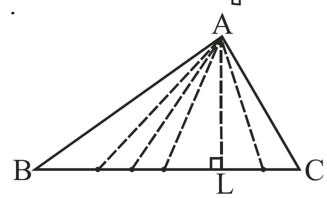
A $\overline{BC}$ 6.5

A $\overline{BC}$

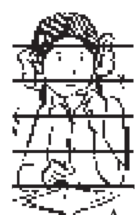
AL



6.4

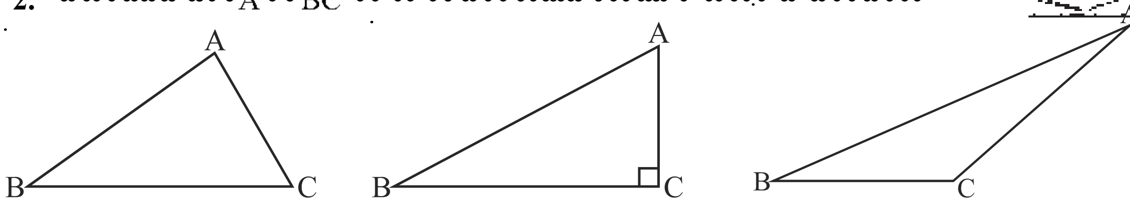


6.5



1.

2. A $\overline{BC}$



(i) (ii) (iii)

6.6

3.

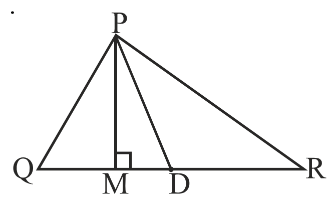
4.

5.

(i) (ii)

(iii)

1. Δ PQR $\overline{QR}$ D



$\overline{PM}$ ________________

PD ________________

QM = MR

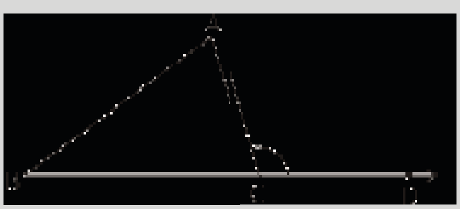
2.

(a) ΔABC BE

(b) ΔPQR PQ PR

(c) ΔXYZ YL

3.



6.7

1. ΔABC $\overline{BC}$ 6.7) C ACD ΔABC ΔABC C

$\angle$BCA $\angle$ACD

$\angle$A $\angle$B ACD (Trace copy) $\angle$A $\angle$B $\angle$ACD

$\angle ACD$

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$?

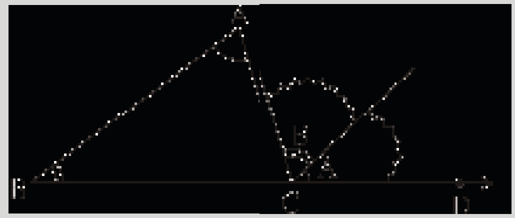
2. ABC

ACD

$\angle ACD$, $\angle A$ $\angle B$

$\angle A + \angle B$ $\angle ACD$

$\angle ACD$ $\angle A + \angle B$

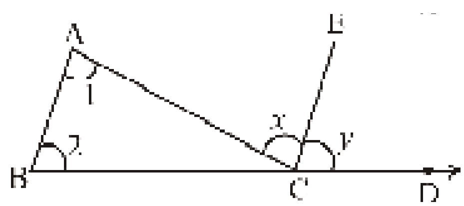


6.8

ΔABC $\angle ACD$

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

C $\overline{BA}$ CE



6.9

(a) $\angle 1 = \angle x$ — $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ $\overline{AC}$

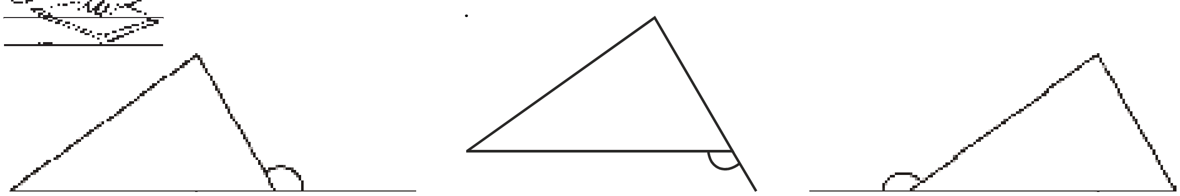
(b) $\angle 2 = \angle y$ — $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ $\overline{BD}$

(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

(d) $\angle x + \angle y = m\angle ACD$ — 6.9

$\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

1.



6.10

2.

3.

6.11 x

$50° + x = 110°$

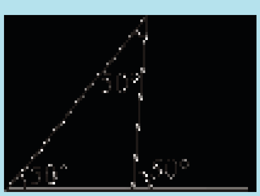
$x = 60°$

6.11

1.

(i) (ii) (iii)

2.

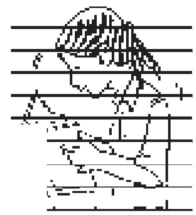


6.12

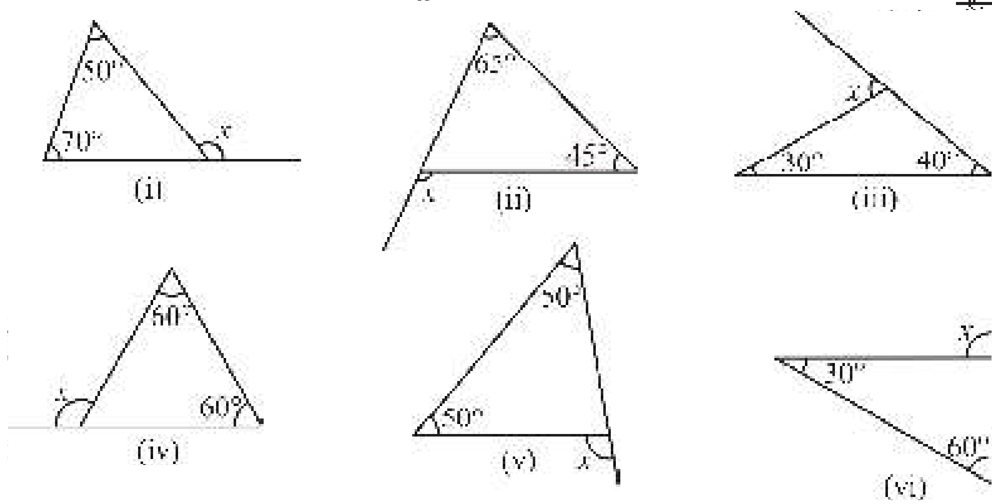
1. 70° 25°

2. 60° 80°

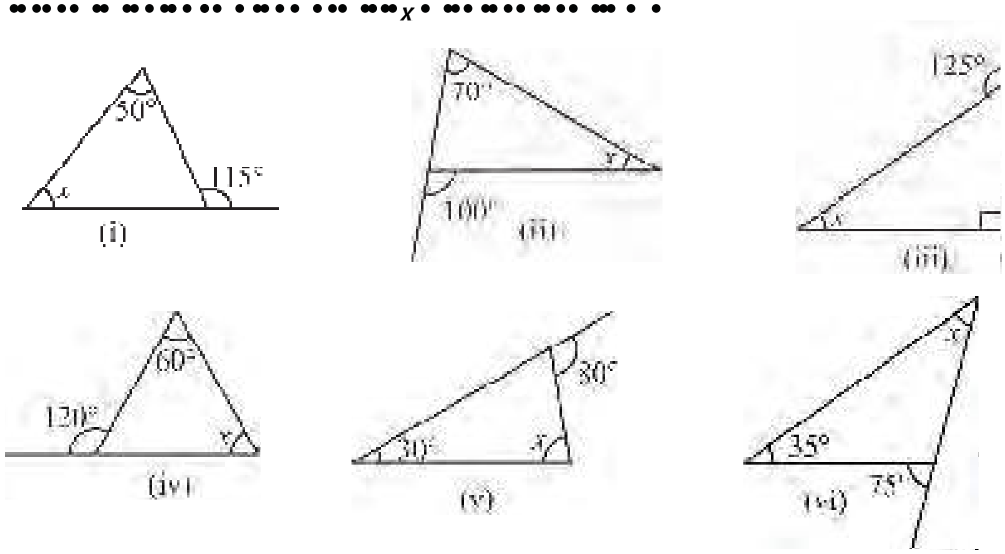
3.



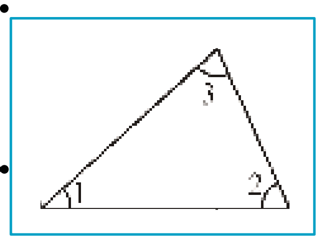
1. *x*



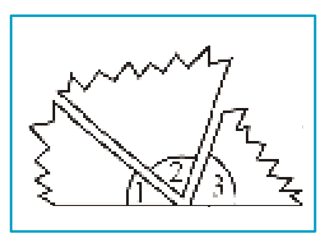
2. *x*



1. 6.13 (i) (ii)



(i)



(ii)

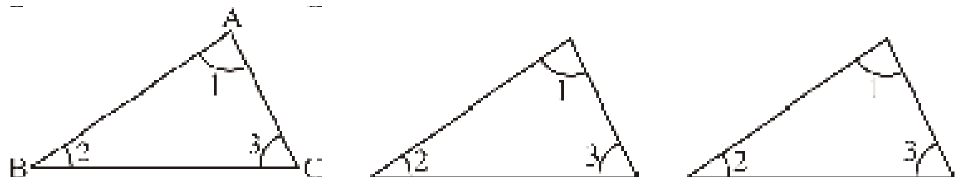
6.13

180°

180°

2. ΔABC

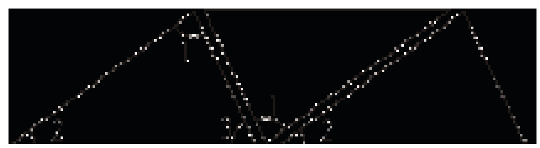
6.14



6.14

6.15

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$



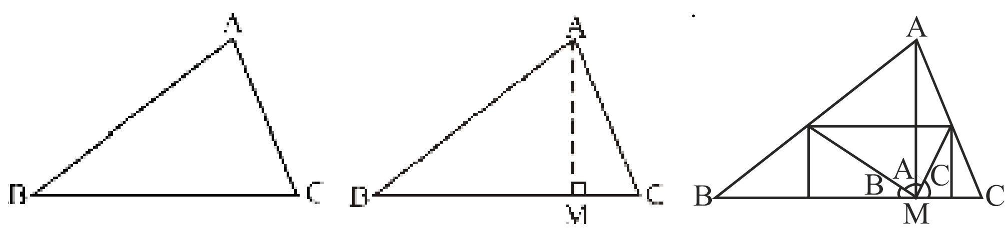
6.15

3.

ΔABC 6.16

A AM

A, B C M



(i) (ii) (iii)

6.16

180°

4. ΔABC, ΔPQR ΔXYZ

Δ		
ΔABC	$m\angle A =$ $m\angle B =$ $m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
ΔPQR	$m\angle P =$ $m\angle Q =$ $m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
ΔXYZ	$m\angle X =$ $m\angle Y =$ $m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

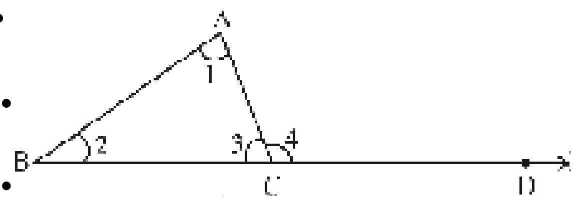
180° (180°)

180°

180°

ΔABC $\angle 1$, $\angle 2$ $\angle 3$

$\angle 4$ $\overline{BC}$ D



6.17

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ $\angle 3$

$\angle 4$ $\angle 3$ 180°

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

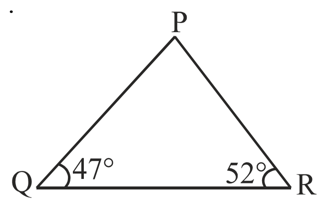
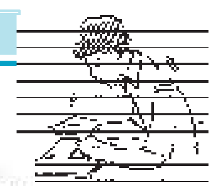


Fig 6.18

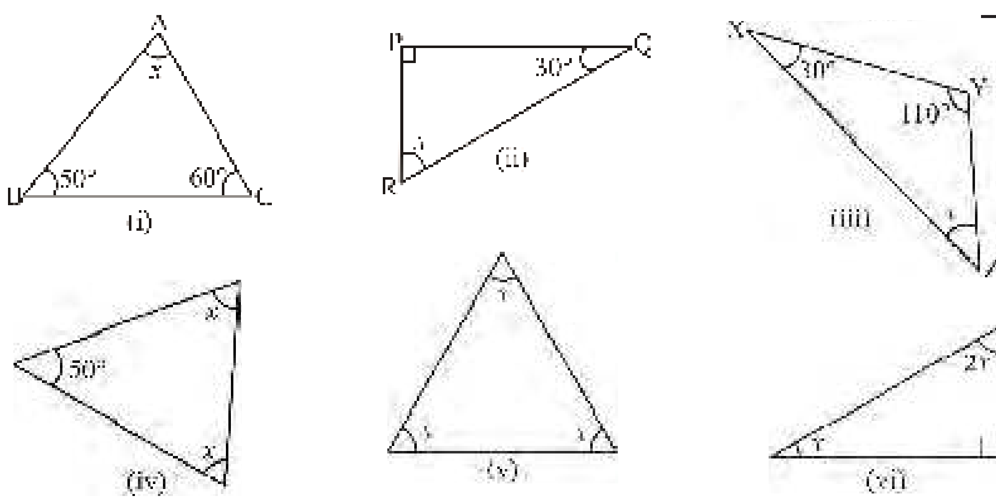
$\angle P$

$m\angle P + 47^\circ + 52^\circ = 180^\circ$

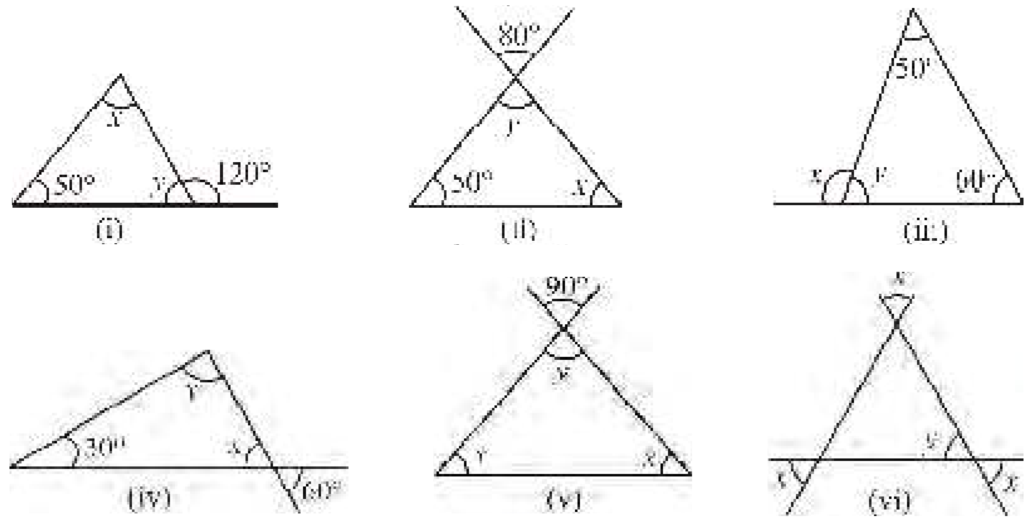
$m\angle P = 180^\circ - 47^\circ - 52^\circ = 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ$

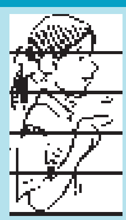


1. x



2. x y



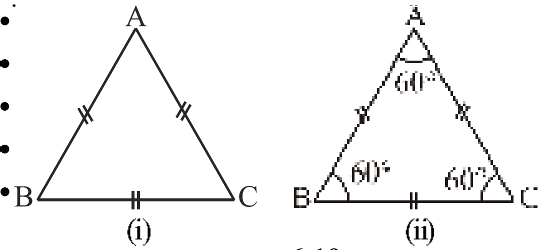


1. 30° 80°
2. 80°
3.

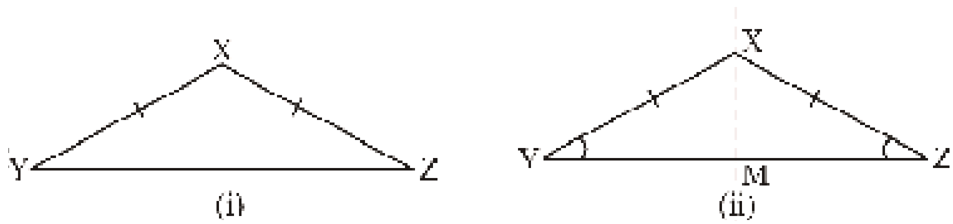
1.
2.
3.
4. 60°
5. 60°
6. 60°

ABC (6.19)

(i) (ii) 60°



6.19

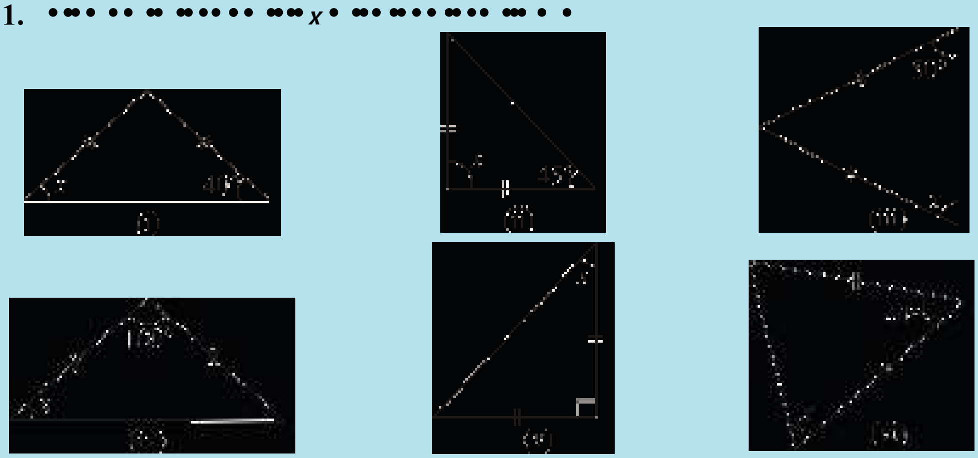


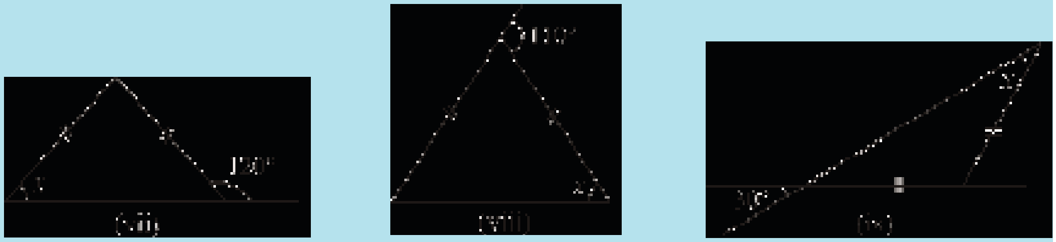
6.20

XYZ, XY = XZ (6.20) Z Y X XM ∠Y ∠Z XY XZ YZ ∠Y ∠Z

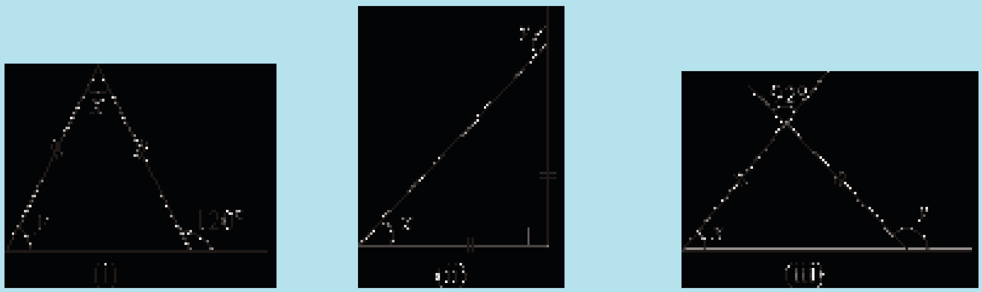
i (ii)

1. x





2. x y



1. A, B C

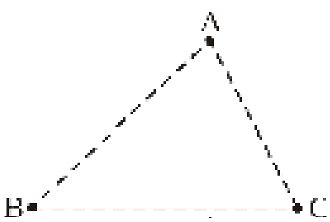
AB, BC AC

A C $\overline{AB}$

$\overline{BC}$ C $\overline{AC}$ C

AC

$\overline{AB}$ $\overline{BC}$)



6.21

$$AB + BC > AC \qquad \text{(i)}$$

B A

$\overline{BC}$ $\overline{CA}$ $\overline{BA}$ B A

$$BC + CA > AB \qquad \text{(ii)}$$

$$CA + AB > BC \qquad \text{(iii)}$$

2.

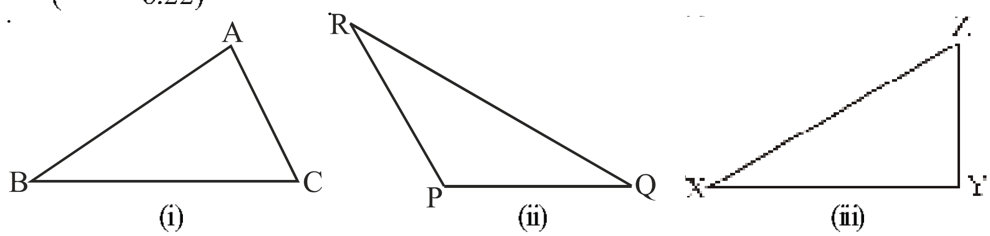
cm cm cm cm cm

[illegible] cm [illegible] cm [illegible] 12 – 6 = 6 cm [illegible] 12 + 6 = 18 cm [illegible]

[illegible]

[illegible]

3. [illegible] ΔABC, ΔPQR [illegible] ΔXYZ [illegible] ([illegible] 6.22) [illegible]



[illegible] **6.22**

[illegible]

Δ [illegible]	[illegible]	[illegible]	
Δ ABC	AB ___	AB – BC < CA ___ + ___ > ___	[illegible]
	BC ___	BC – CA < AB ___ + ___ > ___	[illegible]
	CA ___	CA – AB < BC ___ + ___ > ___	[illegible]
Δ PQR	PQ ___	PQ – QR < RP ___ + ___ > ___	[illegible]
	QR ___	QR – RP < PQ ___ + ___ > ___	[illegible]
	RP ___	RP – PQ < QR ___ + ___ > ___	[illegible]
Δ XYZ	XY ___	XY – YZ < ZX ___ + ___ > ___	[illegible]
	YZ ___	YZ – ZX < XY ___ + ___ > ___	[illegible]
	ZX ___	ZX – XY < YZ ___ + ___ > ___	[illegible]

cm cm

4.5 cm

$4.5 + 5.8 > 10.2?$

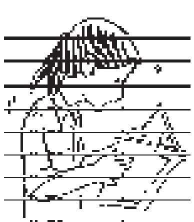
$5.8 + 10.2 > 4.5?$

$10.2 + 4.5 > 5.8?$

cm cm

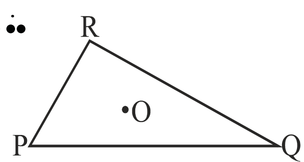
$8 + 6 = 14$ cm

$8 - 6 = 2$ cm

cm cm

1.

(i) 2 cm, 3 cm, 5 cm (ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm

(iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm

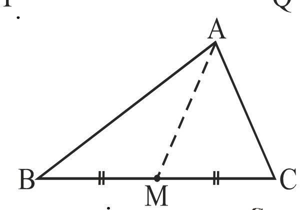


2. PQR O

(i) $OP + OQ > PQ?$

(ii) $OQ + OR > QR?$

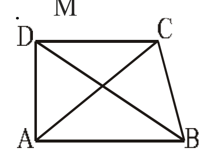
(iii) $OR + OP > RP?$



3. ABC AM

$AB + BC + CA > 2AM$?

(ΔABM ΔAMC)



4. ABCD $AB + BC + CD + DA > AC + BD$?

5. ABCD $AB + BC + CD + DA < 2\,(AC + BD)$?

6. cm cm

1.

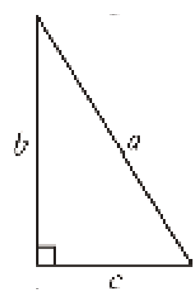
6.23

(legs)

ΔABC (6.23), B AC

$\overline{AB}$ $\overline{BC}$ ABC

a *b* *c*

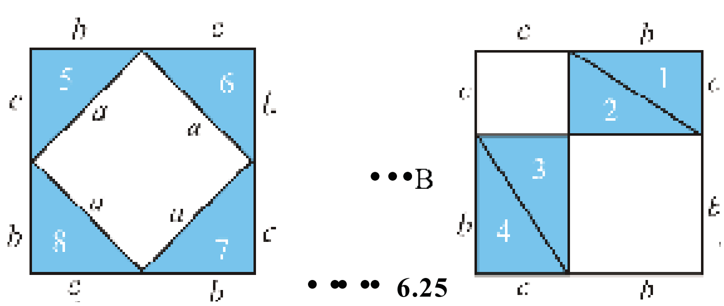


6.24

$b + c$

A B

A



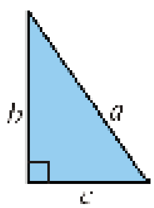
B

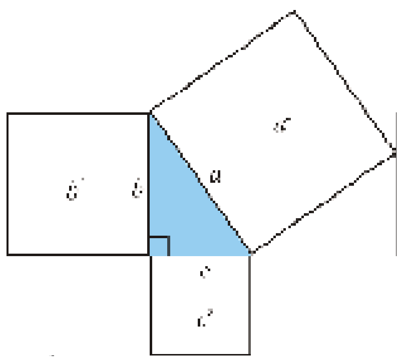
6.25

A = B

A = B

$$a^2 = b^2 + c^2$$



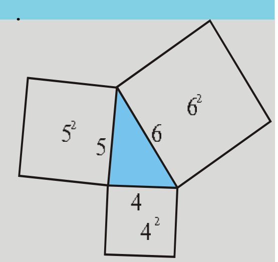


(6.26)

6.26

1. cm cm (6.27)

$4^2 + 5^2 \neq 6^2, 5^2 + 6^2 \neq 4^2$ $6^2 + 4^2 \neq 5^2$



6.27

2. cm cm cm

$4^2 + 5^2 \neq 7^2$

cm, cm cm

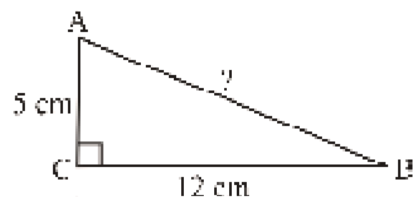
$3^2 = 3 \times 3 = 9;\ 4^2 = 4 \times 4 = 16;\ 5^2 = 5 \times 5 = 25$

$3^2 + 4^2 = 5^2$

cm

ΔABC C AC = 5 cm BC = 12 cm, AB

(6.28)

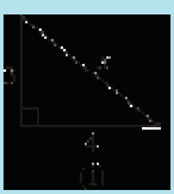


6.28

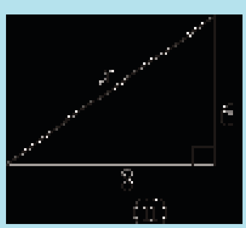
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

$AB^2 = 13^2$, $AB = 13$ AB 13 cm

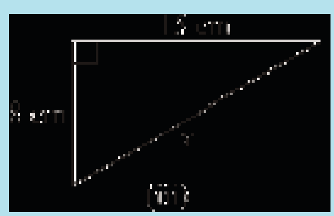
x



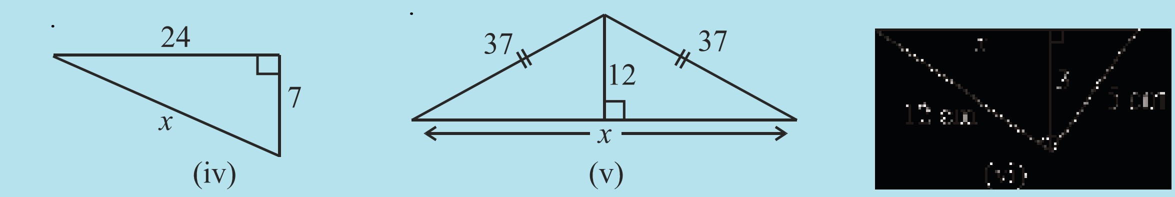
(i)



(ii)

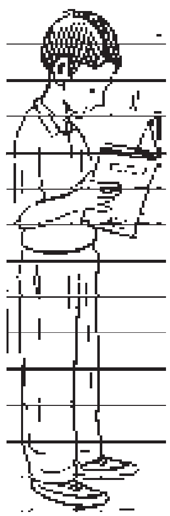


(iii)

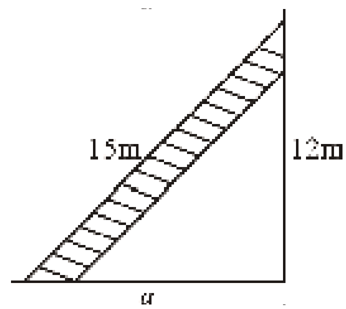


6.29

1. PQR P PQ = 10 cm PR = 24 cm QR



2. ABC C
AB = 25 cm AC = 7 cm BC

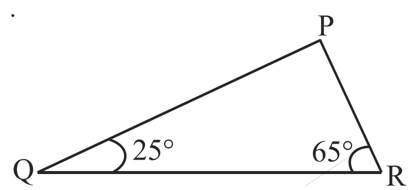


3. m m

4.
   (i) 2.5 cm, 6.5 cm, 6 cm
   (ii) 2 cm, 2 cm, 5 cm
   (iii) 1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm

5. m m

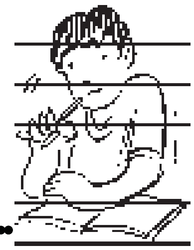
6. PQR $\angle Q = 25^\circ$ $\angle R = 65^\circ$.
   (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
   (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
   (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. cm cm

8. cm cm

[illegible]



1. [illegible] PQR [illegible] P [illegible]
2. [illegible] ABC [illegible] B [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]

   [illegible]
6. [illegible]

   [illegible] 180° [illegible]
7. [illegible] 60° [illegible]
8. [illegible]

9. [illegible]

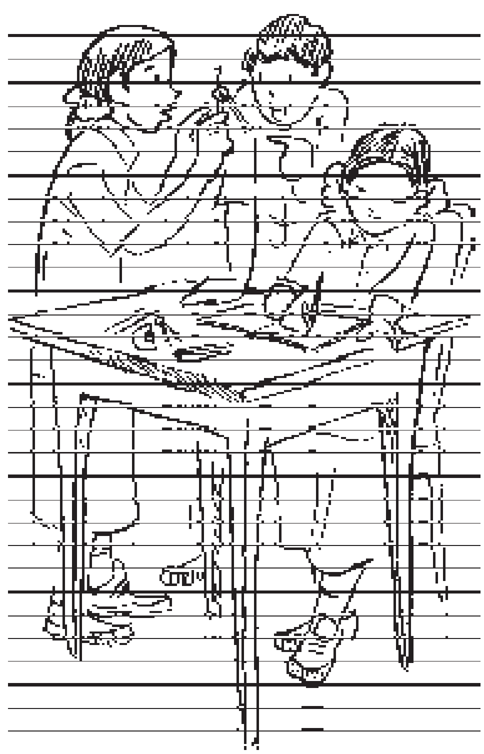
(i) [illegible]

(ii) [illegible]

10. [illegible]

11. [illegible]

[illegible]



अध्याय 7

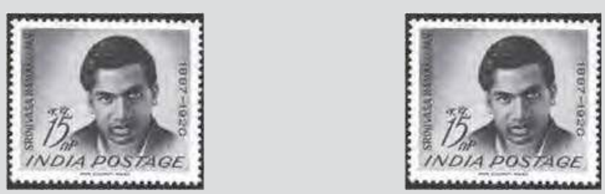
त्रिभुजों की सर्वांगसमता

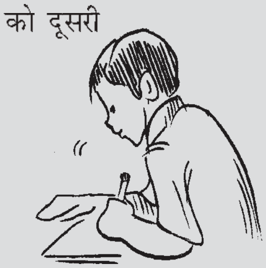
7.1 भूमिका

अब आप एक बहुत ही महत्त्वपूर्ण ज्यामितीय संकल्पना 'सर्वांगसमता' को सीखने जा रहे हैं। विशेषकर, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में बहुत कुछ पढ़ेंगे। सर्वांगसमता को समझने के लिए, हम कुछ क्रियाकलाप करेंगे।

इन्हें कीजिए

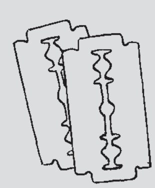
एक ही प्रकार (denomination) की दो टिकटें लीजिए (आकृति 7.1)। एक टिकट को दूसरी पर रखिए। आप क्या देखते हैं ?



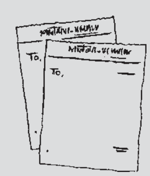


आकृति 7.1

एक टिकट दूसरे को पूर्णतया ढक लेती है। इसका अर्थ यह है कि दोनों टिकटें एक ही आकार और एक ही माप की हैं। ऐसी वस्तुएँ सर्वांगसम कहलाती हैं। आपके द्वारा प्रयोग की गई दोनों टिकटें एक दूसरे के सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम वस्तुएँ एक दूसरे की हू-ब-हू प्रतिलिपियाँ होती हैं।



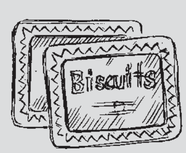
(i)



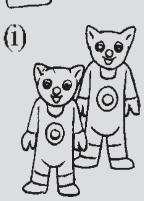
(ii)

क्या अब, आप, बता सकते हैं कि निम्न वस्तुएँ सर्वांगसम हैं या नहीं?

1. एक ही कंपनी के शेविंग ब्लेड [आकृति 7.2 (i)]
2. एक ही लेटर पैड की शीटें [आकृति 7.2 (ii)]
3. एक ही पैकट के बिस्कुट [आकृति 7.2 (iii)]
4. एक ही साँचे से बने खिलौने [आकृति 7.2 (iv)]



(iii)

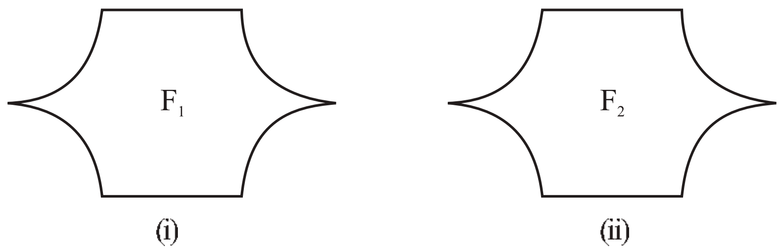


आकृति 7.2 (iv)

दो वस्तुओं के सर्वांगसम होने के संबंध को **सर्वांगसमता** कहते हैं। इस अध्याय में, हम केवल तल में बनी आकृतियों की चर्चा करेंगे यद्यपि सर्वांगसमता एक साधारण विषय है जिसका उपयोग हम त्रिआयामी (3-Dimensional) आकारों के लिए भी करते हैं। अब हम तल में बनी ऐसी आकृतियों की सर्वांगसमता का विधिपूर्वक अर्थ जानने की कोशिश करेंगे जिन्हें हम पहले से जानते हैं।

7.2 तल-आकृतियों की सर्वांगसमता

यहाँ दी गई दो आकृतियों को देखिए (आकृति 7.3)। क्या ये आकृतियाँ सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.3

आप अध्यारोपण विधि का प्रयोग कर सकते हैं। इनमें से एक का अक्स (trace-copy) बनाकर दूसरी आकृति पर रखते हैं। यदि ये आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं तो वे सर्वांगसम कहलाती हैं। दूसरे ढंग से, आप इनमें से एक आकृति को काट कर उसे दूसरी आकृति पर रख सकते हैं। लेकिन सावधान! जिस आकृति को आपने काटा है (या अक्स बनाया है) उसे मोड़ने या फैलाने की आपको छूट नहीं है।

आकृति 7.3 में, यदि आकृति F_1, आकृति F_2 के सर्वांगसम है तो हम लिखेंगे $F_1 \cong F_2$.

7.3 रेखाखंडों में सर्वांगसमता

दो रेखाखंड कब सर्वांगसम होते हैं? नीचे दिए गए रेखाखंडों के दो युग्मों को देखिए।

आकृति 7.4

प्रत्येक रेखाखंड युग्म के लिए अक्स प्रतिलिपि बनाकर अध्यारोपण विधि का प्रयोग कीजिए [आकृति 7.4(i)] $\overline{CD}$ का अक्स बनाकर इसे $\overline{AB}$ पर रखें। आप देखेंगे कि $\overline{CD}$ $\overline{AB}$ को पूर्णतया ढक लेता है और C, A पर तथा D, B पर स्थित है। अत: हम कह सकते हैं कि दोनों रेखाखंड सर्वांगसम हैं और हम लिखेंगे $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

आकृति 7.4 (ii) के रेखाखंड युग्म के लिए इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप क्या देखते हैं? ये रेखाखंड सर्वांगसम नहीं हैं। यह आपने कैसे जाना? क्योंकि जब एक रेखाखंड को दूसरे रेखाखंड पर रखा जाता है तो वे एक दूसरे को पूर्णतया नहीं ढकते हैं।

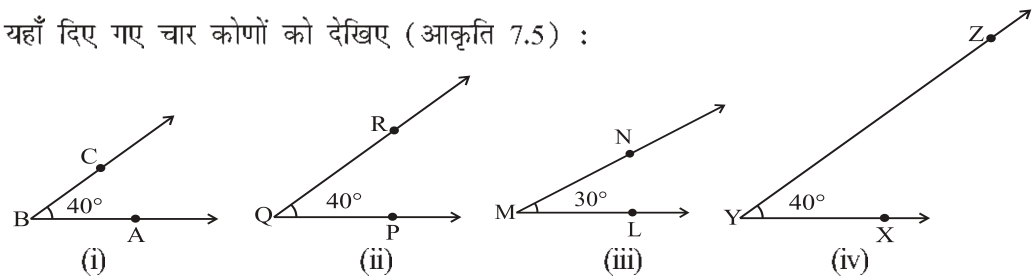
आकृति 7.4 (i) में आपने देखा होगा कि रेखाखंडों के युग्म का एक दूसरे के साथ सुमेलन (matching) होता है क्योंकि उनकी लंबाई बराबर है परंतु आकृति 7.4 (ii) में ऐसी स्थिति नहीं है।

> यदि दो रेखाखंडों की लंबाई समान (यानी बराबर) है तो वे सर्वांगसम होते हैं। यदि दो रेखाखंड सर्वांगसम हैं तो उनकी लंबाइयाँ समान होती हैं।

ऊपर दिए गए तथ्य को ध्यान में रखते हुए, जब दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं तो हम कहते हैं कि रेखाखंड बराबर हैं; और हम लिखते हैं $AB = CD$। (हमारा वास्तव में अर्थ है कि $\overline{AB} \cong \overline{CD}$)।

7.4 कोणों की सर्वांगसमता

यहाँ दिए गए चार कोणों को देखिए (आकृति 7.5) :



आकृति 7.5

$\angle PQR$ का अक्स बनाइए और इससे $\angle ABC$ को ढकने का प्रयास कीजिए। इसके लिए, सबसे पहले Q को B पर और $\overline{QP}$ को पर रखिए। कहाँ पर आएगा ? यह के ऊपर होगा।

इस प्रकार, $\angle PQR$ का सुमेलन $\angle ABC$ से होता है।

इस सुमेलन में $\angle ABC$ और $\angle PQR$ सर्वांगसम हैं।

(ध्यान दीजिए कि इन दोनों सर्वांगसम कोणों की माप समान है)

हम लिखते हैं $\quad \angle ABC \cong \angle PQR \quad$ (i)

या $\quad m\angle ABC = m\angle PQR$ (इस स्थिति में माप 40° है)

अब आप $\angle LMN$ का अक्स बनाइए और इसे $\angle ABC$ पर रखिए। M को B पर तथा को पर रखिए। क्या , पर आता है ? नहीं, इस स्थिति में ऐसा नहीं होता है। आपने देखा कि $\angle ABC$ और $\angle LMN$ एक दूसरे को पूर्णतया नहीं ढकते हैं। इसलिए वे सर्वांगसम नहीं हैं। (ध्यान दीजिए, इस स्थिति में $\angle ABC$ और $\angle LMN$ की माप बराबर नहीं है)

$\angle XYZ$ और $\angle ABC$ के बारे में आप क्या कहेंगे। आकृति 7.5 (iv) में किरण और क्रमश: किरण और से अधिक लंबी प्रतीत होती है। इसके आधार पर आप सोच सकते हैं कि $\angle ABC$, $\angle XYZ$ से छोटा है। परंतु याद रखिए कि आकृति में किरण केवल दिशा को ही प्रदर्शित करती है न कि लंबाई को। आप देखेंगे कि ये दोनों कोण भी सर्वांगसम हैं।

हम लिखते हैं $\quad \angle ABC \cong \angle XYZ \quad$ (ii)

या $\quad m\angle ABC = m\angle XYZ$

(i) और (ii) को ध्यान में रखते हुए, हम यह भी लिख सकते हैं :

$$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$$

यदि दो कोणों की माप समान हो तो वे सर्वांगसम होते हैं। यदि दो कोण सर्वांगसम हैं तो उनकी माप भी समान होती है।

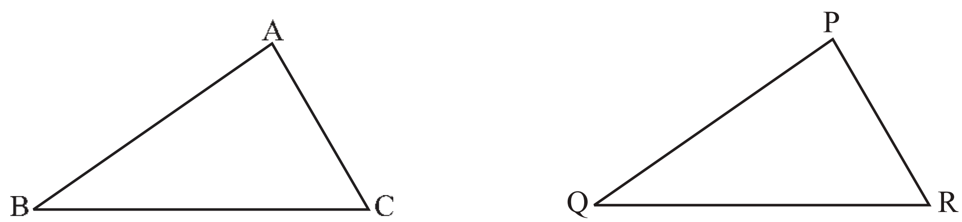
कोणों की सर्वांगसमता पूर्णतया उनके मापों की समानता के ऊपर निर्भर करती है जैसाकि रेखाखंडों की स्थिति में बताया गया है। इस प्रकार, यह कहना कि दो कोण सर्वांगसम हैं, हम कई बार केवल यही कहते हैं कि कोण बराबर हैं; और हम लिखते हैं:

$\angle ABC = \angle PQR$ (अर्थात $\angle ABC \cong \angle PQR$).

7.5 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

हमने देखा कि दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं जब उनमें से एक, दूसरे की प्रतिलिपि हो। इसी प्रकार, दो कोण सर्वांगसम होते हैं यदि उनमें से एक, दूसरे की प्रतिलिपि हो। हम इस संकल्पना को अब त्रिभुजों के लिए भी देखते हैं।

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि वे एक दूसरे की प्रतिलिपियाँ हों और एक को दूसरे के ऊपर रखे जाने पर, वे एक दूसरे को आपस में पूर्णतया ढक लें।



(i) (ii)

आकृति 7.6

ΔABC और ΔPQR समान आकार एवं समान आमाप के हैं। ये सर्वांगसम हैं। अतः इनको निम्नलिखित प्रकार से दर्शाएँगे :

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR.$$

इसका अर्थ यह है कि यदि आप ΔPQR को ΔABC पर रखते हैं, तो P, A के ऊपर; Q, B के ऊपर और R, C के ऊपर आता है। इसी प्रकार , $\overline{AB}$ के अनुदिश; $\overline{QR}$, $\overline{BC}$ के अनुदिश तथा $\overline{PR}$, $\overline{AC}$ के अनुदिश आते हैं। यदि दिए गए सुमेलन (correspondence) में दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो उनके संगत भाग (अर्थात् कोण और भुजाएँ) समान होते हैं। अतः इन दोनों सर्वांगसम त्रिभुजों में, हमें प्राप्त होता है :

संगत शीर्ष	:	A और P, B और Q, C और R.
संगत भुजाएँ	:	$\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ और $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ और $\overline{PR}$.
संगत कोण	:	$\angle A$ और $\angle P$, $\angle B$ और $\angle Q$, $\angle C$ और $\angle R$.

यदि आप ΔPQR को ΔABC पर इस प्रकार से आरोपित करते हैं कि P, B के ऊपर रखें तो क्या दूसरे शीर्ष भी यथायोग्य सुमेलित होंगे? *ऐसा होना आवश्यक नहीं है*? आप त्रिभुजों की अक्स प्रतिलिपियाँ लीजिए और यह ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। यह दर्शाता है कि त्रिभुजों की

सर्वांगसमता के बारे में चर्चा करते समय न केवल कोणों की माप और भुजाओं की लंबाइयाँ महत्त्व रखती हैं, परंतु शीर्षों का सुमेलन भी उतना ही महत्त्व रखता है। ऊपर दी गई स्थिति में, सुमेलन है :

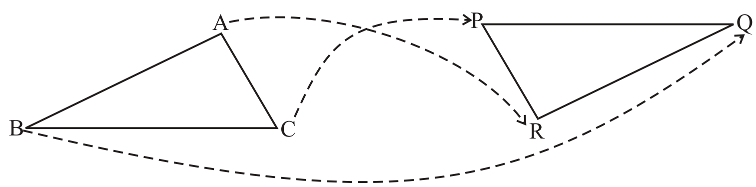
$$A \leftrightarrow P, \quad B \leftrightarrow Q, \quad C \leftrightarrow R$$

हम इसे, इस प्रकार भी लिख सकते हैं $ABC \leftrightarrow PQR$

उदाहरण 1 यदि ΔABC और ΔPQR सुमेलन $ABC \leftrightarrow RQP$ के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो ΔABC के वे भाग लिखिए जो निम्न के संगत हों

(i) $\angle P$ (ii) $\angle Q$ (iii) $\overline{RP}$

हल इस सर्वांगसमता को अच्छे ढंग से समझने के लिए, आइए हम एक आकृति (आकृति 7.7) का प्रयोग करते हैं।



आकृति 7.7

यहाँ सुमेलन $ABC \leftrightarrow RQP$ है। अर्थात् $A \leftrightarrow R$; $B \leftrightarrow Q$; $C \leftrightarrow P$.

अतः (i) $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{CB}$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ (iii) $\overline{RP} \leftrightarrow \overline{AB}$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

जब दो त्रिभुज, मान लीजिए ABC और PQR, दिए हुए हों तो उनमें आपस में कुल छः संभव सुमेलन होते हैं। उनमें से दो सुमेलन ये हैं :

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ और (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

दो त्रिभुजों के कट-आउट (cutouts) का प्रयोग करके अन्य चार सुमेलनों को ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी सुमेलन सर्वांगसमता दर्शाते हैं? इसके बारे में विचार कीजिए।

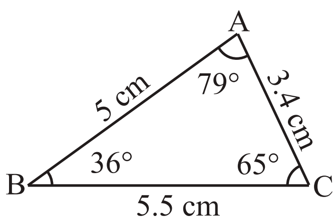
प्रश्नावली 7.1

1. निम्न कथनों को पूरा कीजिए :
   (a) दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं यदि ____________।
   (b) दो सर्वांगसम कोणों में से एक की माप $70°$ है, दूसरे कोण की माप ____________ है।
   (c) जब हम $\angle A = \angle B$ लिखते हैं, हमारा वास्तव में अर्थ होता है ____________।
2. वास्तविक जीवन से संबंधित सर्वांगसम आकारों के कोई दो उदाहरण दीजिए।
3. यदि सुमेलन $ABC \leftrightarrow FED$ के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta FED$ तो त्रिभुजों के सभी संगत सर्वांगसम भागों को लिखिए।
4. यदि $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ हो, तो ΔBCA के उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हो :

   (i) $\angle E$ (ii) $\overline{EF}$ (iii) $\angle F$ (iv) $\overline{DF}$

त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध

हम अपने दैनिक जीवन में त्रिभुजाकार संरचनाओं और नमूनों का प्राय: प्रयोग करते हैं। अत: यह ज्ञात करना लाभकारी होगा कि दो त्रिभुजाकार आकृतियाँ कब सर्वांगसम होंगी। यदि आपकी नोटबुक में दो त्रिभुज बने हैं और आप प्रमाणित करना चाहते हैं कि क्या वे सर्वांगसम हैं तब आप हर बार उनमें से एक को काटकर दूसरे पर रखने (आरोपण) वाली विधि का प्रयोग नहीं कर सकते हैं। इसके बदले यदि हम सर्वांगसमता को सटीक मापों द्वारा निश्चित कर सकें तो यह अधिक उपयोगी होगा। चलिए ऐसा करने का प्रयत्न करें।



आकृति 7.8
अप्पू द्वारा निर्मित त्रिभुज

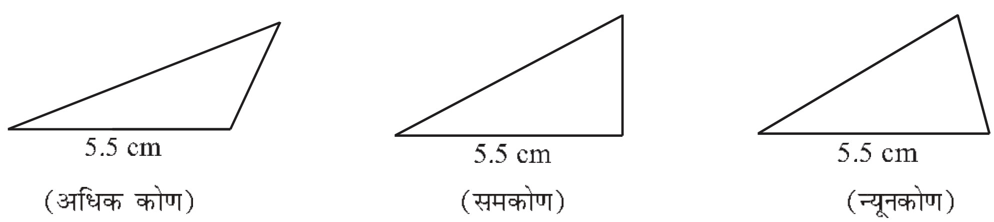
एक खेल

अप्पू और टिप्पू एक खेल खेलते हैं। अप्पू ने एक त्रिभुज ABC(आकृति 7.8) बनाया। उसने प्रत्येक भुजा की लंबाई और इसके प्रत्येक कोण की माप को ध्यान में रख लिया। टिप्पू ने यह सब ध्यान से नहीं देखा। अप्पू, टिप्पू को चुनौती देता है कि क्या वह कुछ दी सूचनाओं के आधार पर उसके ΔABC की प्रतिलिपि बना सकता है? अप्पू द्वारा दी गई सूचनाओं का प्रयोग करके टिप्पू ΔABC के सर्वांगसम एक त्रिभुज बनाने का प्रयास करता है। खेल आरंभ होता है। सावधानी से उनके वार्तालाप और उनके खेल का अवलोकन कीजिए।

SSS खेल

अप्पू : ΔABC की एक भुजा 5.5 cm है।

टिप्पू : इस सूचना से, मैं अनेक त्रिभुजों को बना सकता हूँ (आकृति 7.9)। लेकिन यह आवश्यक नहीं कि वे ΔABC की प्रतिलिपि हों। मैं जो त्रिभुज बनाता हूँ वह त्रिभुज अधिक कोण (obtuse angled) या समकोण (Right angled) या न्यून कोण (acute angled) हो सकता है। यहाँ पर कुछ उदाहरण दिए गए हैं :



आकृति 7.9

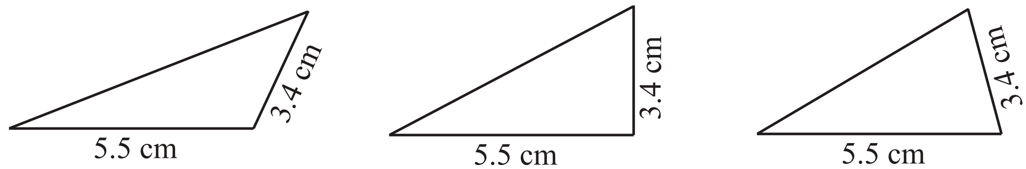
मैंने अन्य भुजाओं के लिए स्वेच्छा से लंबाइयों का प्रयोग किया। इससे मुझे 5.5 cm लंबाई के आधार वाले कई त्रिभुज मिलते हैं।

अत: दी गई केवल एक ही भुजा की लंबाई से ΔABC की प्रतिलिपि बनाना, मेरे लिए संभव नहीं।

अप्पू : अच्छा। मैं तुम्हें एक और भुजा की लंबाई दूँगा। ΔABC की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 5.5 cm और 3.4 cm हैं।

टिप्पू : यह सूचना भी त्रिभुज बनाने के लिए पर्याप्त नहीं है। मैं इस दी गई सूचना से बहुत से त्रिभुज बना सकता हूँ जो ΔABC की प्रतिलिपि नहीं होंगे।

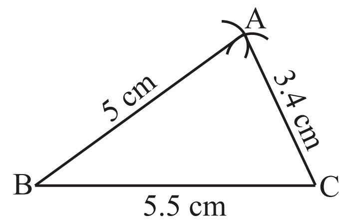
यहाँ पर कुछ त्रिभुज दिए गए हैं जो मेरी बात का समर्थन करते हैं,



आकृति 7.10

आपके त्रिभुज जैसी प्रतिलिपि कोई भी नहीं बना सकता यदि केवल दो भुजाओं की लंबाइयाँ दी गई हों।

अप्पू : ठीक है ! मैं तुम्हें त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप देता हूँ। ΔABC में, मेरे पास $AB = 5$ cm, $BC = 5.5$ cm और $AC = 3.4$ cm है।



आकृति 7.11

टिप्पू : मैं सोचता हूँ कि त्रिभुज बनाना अब संभव होना चाहिए। मैं अब कोशिश करता हूँ। सबसे पहले मैं एक खाका (कच्ची) आकृति बनाता हूँ जिससे मैं आसानी से लंबाइयाँ याद रख सकूँ। मैं 5.5 cm $\overline{BC}$ खींचता हूँ।

'B' को केंद्र लेकर, मैं 5 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचता हूँ। बिंदु 'A' इस चाप पर कहीं स्थित होना चाहिए। 'C' को केंद्र लेकर 3.4 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचता हूँ। बिंदु 'A' इस चाप पर भी होना चाहिए। अर्थात्, 'A' बिंदु खींची गई दोनों चापों पर स्थित है। अर्थात् 'A' दोनों चापों का प्रतिच्छेदी बिंदु है।

मैं अब बिंदुओं A, B और C की स्थिति जानता हूँ। अहा! मैं इन्हें मिलाकर ΔABC प्राप्त कर सकता हूँ। (आकृति 7.11)

अप्पू : बहुत अच्छा ! अत: एक दिए हुए ΔABC की प्रतिलिपि बनाने के लिए (अर्थात् ΔABC के सर्वांगसम) हमें तीनों भुजाओं की लंबाइयों की आवश्यकता होती है। क्या हम इस स्थिति को भुजा-भुजा-भुजा (side-side-side) प्रतिबंध कह सकेंगे?

टिप्पू : क्यों न हम इसे संक्षेप में, SSS प्रतिबंध कहें।

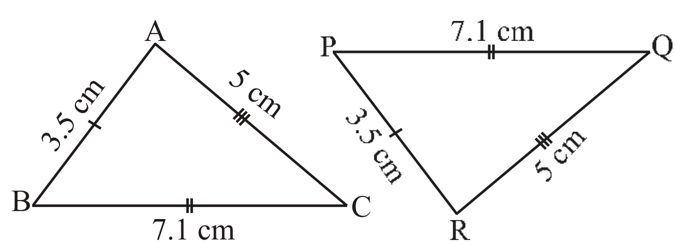
> **SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध**
>
> यदि दिए गए सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमश: किसी दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उदाहरण 2 त्रिभुज ABC और PQR में $AB = 3.5$ cm, $BC = 7.1$ cm, $AC = 5$ cm, $PQ = 7.1$ cm, $QR = 5$ cm, और $PR = 3.5$ cm है (आकृति 7.1)। जाँचिए कि क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं ? यदि हाँ, तो सुमेलन संबंध को सांकेतिक रूप में लिखिए।

हल यहाँ, $AB = RP\ (= 3.5 \text{ cm})$,

$BC = PQ\ (= 7.1 \text{ cm})$

$AC = QR\ (= 5 \text{ cm})$



आकृति 7.12

यह दर्शाता है कि पहले त्रिभुज की तीनों भुजाएँ, दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हैं। अतः SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। ऊपर दी गई तीनों समानता वाले संबंधों से, यह आसानी से देखा जा सकता है कि $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow P$ और $C \leftrightarrow Q$.

अतः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

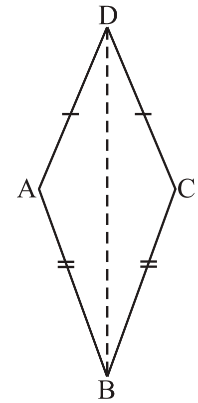
महत्त्वपूर्ण जानकारी : सर्वांगसम त्रिभुजों के नामों में अक्षरों का क्रम संगत संबंधों को दर्शाता है। इस प्रकार, जब आप $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$, लिखते हैं, आपको ज्ञात हो जाता है कि A, R पर; B, P पर; C, Q पर; $\overline{AB}$, $\overline{RP}$ की दिशा में; $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ की दिशा में तथा $\overline{AC}$, $\overline{RQ}$ की दिशा में है।

उदाहरण 3 आकृति 7.13 में, AD = CD और AB = CB है।

(i) ΔABD और ΔCBD में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? क्यों या क्यों नहीं?

(iii) क्या BD, $\angle ABC$ को समद्विभाजित करता है? कारण बताइए।



आकृति 7.13

हल

(i) ΔABD और ΔCBD में, बराबर भागों के तीन युग्म निम्नलिखित हैं :

AB = CB (दिया गया है)

AD = CD (दिया गया है)

और BD = BD (दोनों में उभयनिष्ठ)

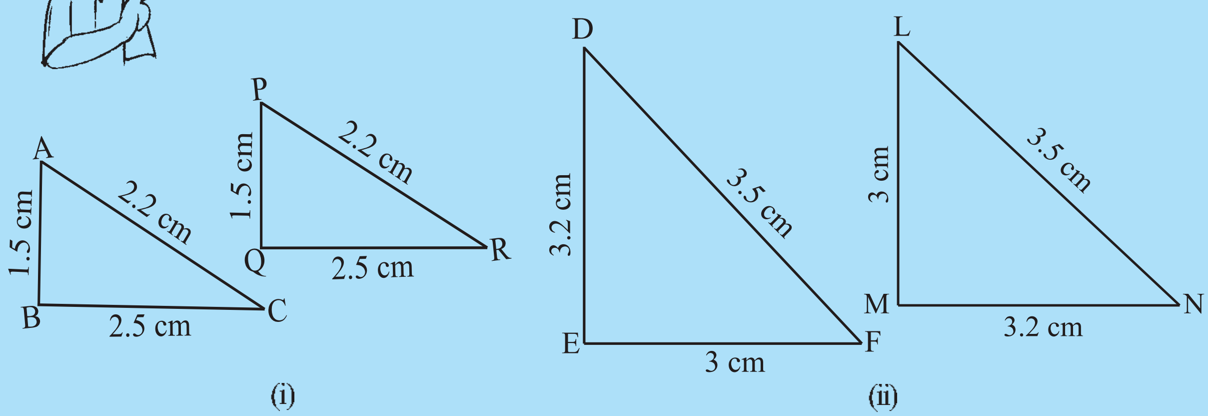
(ii) ऊपर दिए गए (i) से, $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध)

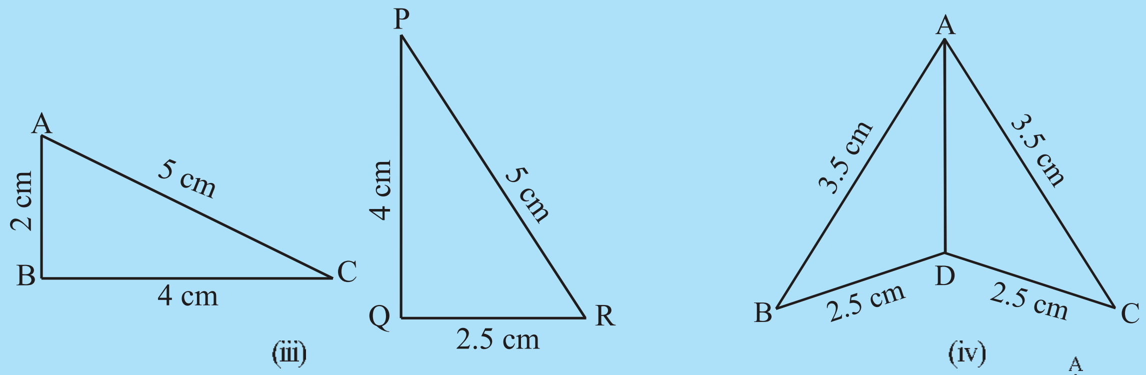
(iii) $\angle ABD = \angle CBD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अतः BD, $\angle ABC$ को समद्विभाजित करता है।

प्रयास कीजिए

1. आकृति 7.14 में, त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाइयाँ दर्शाई गई हैं। SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज-युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए :





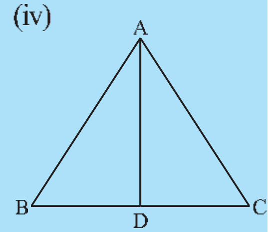
आकृति 7.14

2. आकृति 7.15 में AB = AC और D, $\overline{BC}$ का मध्य बिंदु है।

(i) ΔADB और ΔADC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है? कारण दीजिए।

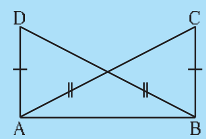
(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों?



आकृति 7.15

3. आकृति 7.16 में, AC = BD और AD = BC है। निम्नलिखित कथनों में कौन-सा कथन सत्य है?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$



आकृति 7.16

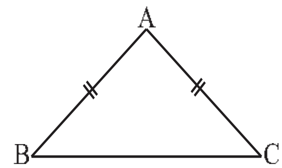
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC (आकृति 7.17) है। ΔABC की एक अक्स प्रतिलिपि लीजिए और इसे भी ΔABC का नाम दीजिए

(i) ΔABC और ΔACB में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?



आकृति 7.17

अप्पू और टिप्पू अब पिछले खेल में कुछ परिवर्तन करके पुनः खेलते हैं।

SAS खेल

अप्पू : अब मैं त्रिभुजों की प्रतिलिपि बनाने वाले खेल के नियमों में परिवर्तन करता हूँ।

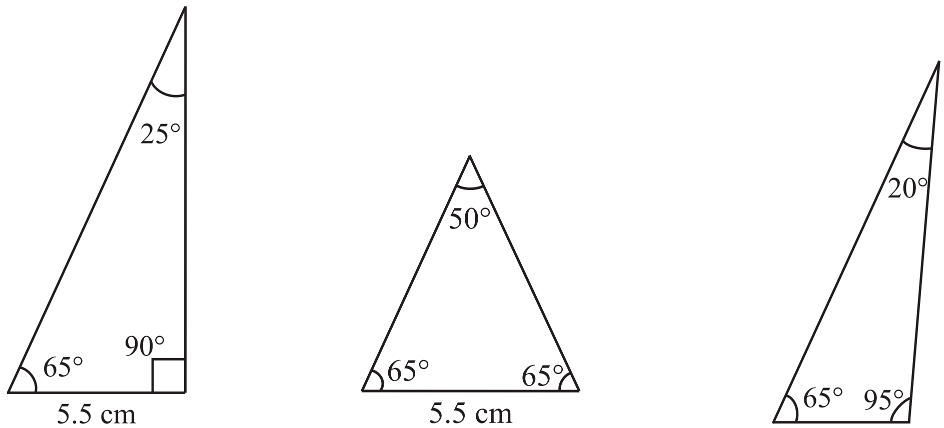
टिप्पू : ठीक है, करिए।

अप्पू : आप पहले से जान चुके हैं कि त्रिभुज की केवल एक भुजा की लंबाई का दिया जाना ही पर्याप्त नहीं होता है।

टिप्पू : हाँ।

अप्पू : उस स्थिति में, मैं कहता हूँ कि ΔABC में एक भुजा 5.5 cm और एक कोण $65°$ का है।

टिप्पू : यह, फिर त्रिभुज बनाने के लिए पर्याप्त नहीं है। मैं ऐसे बहुत सारे त्रिभुजों को बना सकता हूँ जो आपकी सूचना को संतुष्ट करते हों, परंतु वे ΔABC की प्रतिलिपि न हों। उदाहरण के लिए, मैंने कुछ त्रिभुजों को यहाँ पर दिया है (आकृति 7.18)।



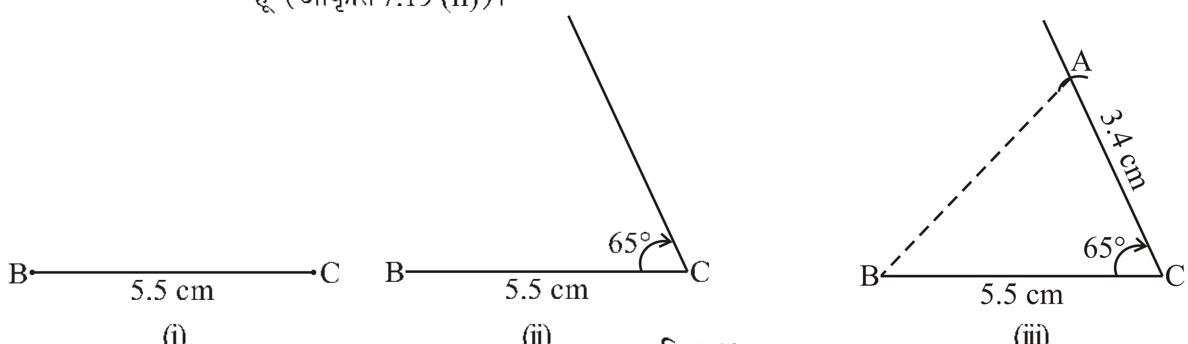
आकृति 7.18

अप्पू : अतः, हम क्या करें?

टिप्पू : हमें और सूचना की आवश्यकता है।

अप्पू : तब, मैं अपने पहले वाले कथन में परिवर्तन करता हूँ। ΔABC में, दो भुजाओं की लंबाई 5.5 cm और 3.4 cm है, तथा इन भुजाओं के अंतर्गत 65° का कोण है।

टिप्पू : यह सूचना मेरी सहायता करेगी। मैं कोशिश करता हूँ। मैं पहले 5.5 cm लंबाई वाला रेखाखंड BC खींचता हूँ (आकृति 7.19 (i))। अब मैं 'C पर 65° का कोण बनाता हूँ (आकृति 7.19 (ii))।



आकृति 7.19

हाँ, मुझे बिंदु A प्राप्त हो गया। यह C से खींची गई इस कोणीय भुजा की दिशा में, C से 3.4 cm की दूरी पर स्थित होना चाहिए। C को केंद्र लेकर, मैं 3.4 cm की एक चाप खींचता हूँ। यह कोण की भुजा को A पर काटता है। अब मैं AB को मिलाता हूँ और ΔABC को प्राप्त करता हूँ (आकृति 7.19 (ii))।

अप्पू : आपने यहाँ भुजा-कोण-भुजा का उपयोग किया है जहाँ कोण भुजाओं के बीच में स्थित है।

टिप्पू : हाँ। हम इस प्रतिबंध को क्या नाम देंगे?

अप्पू : यह SAS प्रतिबंध है, क्या आप समझ गए हैं?

टिप्पू : हाँ। अवश्य।

SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध

यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो ये त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

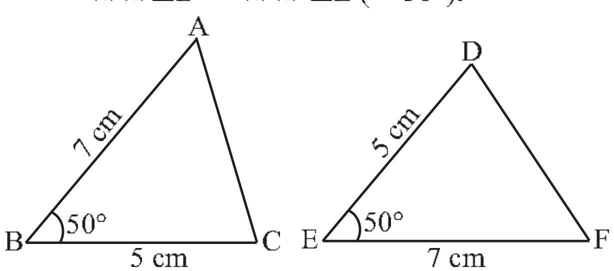
उदाहरण 4 दो त्रिभुजों के कुछ भागों की निम्न माप दी गई है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके जाँच कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं ? यदि त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए ।

	ΔABC	ΔDEF
(a)	AB = 7 cm, BC = 5 cm, $\angle B = 50°$	DE = 5 cm, EF = 7 cm, $\angle E = 50°$
(b)	AB = 4.5 cm, AC = 4 cm, $\angle A = 60°$	DE = 4 cm, FD = 4.5 cm, $\angle D = 55°$
(c)	BC = 6 cm, AC = 4 cm, $\angle B = 35°$	DF = 4 cm, EF = 6 cm, $\angle E = 35°$

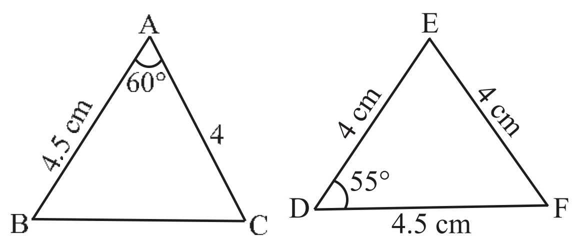
(यह हमेशा बहुत उपयोगी होगा कि पहले एक खाका (कच्ची) आकृति को बनाकर उनकी मापों को अंकित कर दिया जाए और उसके बाद प्रश्न को देखा जाए)।

हल

(a) यहाँ, AB = EF (= 7 cm), BC = DE (= 5 cm) और अंतर्गत $\angle B$ = अंतर्गत $\angle E$ (= 50°).



आकृति 7.20



आकृति 7.21

इस प्रकार , $A \leftrightarrow F$ $B \leftrightarrow E$ और $C \leftrightarrow D$.

अत:, $\Delta ABC \cong \Delta FED$ (SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत) (आकृति 7.20)

(b) यहाँ, AB = FD और AC = DE है (आकृति 7.21)।

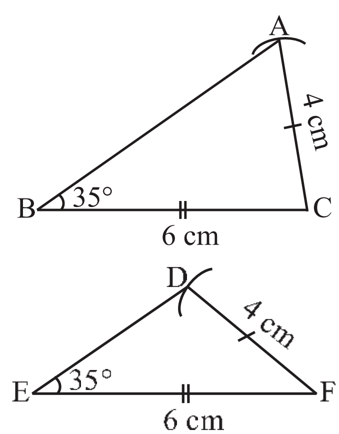
परंतु अंतर्गत $\angle A \neq$ अंतर्गत $\angle D$; अत: हम नहीं कह सकते हैं कि त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

(c) यहाँ, BC = EF, AC = DF और $\angle B = \angle E$.

परंतु $\angle B$ भुजाओं AC और BC का अंतर्गत कोण नहीं है।

इसी प्रकार, $\angle E$ भुजाओं EF और DF का अंतर्गत कोण नहीं है।

अत: यहाँ पर SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग नहीं कर सकते हैं और हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं।



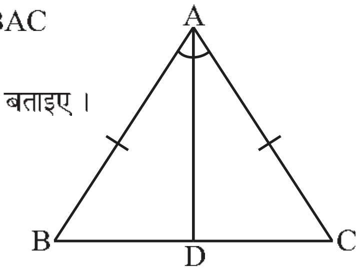
आकृति 7.22

उदाहरण 5 आकृति 7.23 में, AB = AC है और AD, ∠BAC का समद्विभाजक है।

(i) त्रिभुज ADB और ADC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या ΔADB ≅ ΔADC ? कारण दीजिए।

(iii) क्या ∠B = ∠C ? कारण दीजिए।



आकृति 7.23

हल

(i) बराबर भागों के तीन युग्म निम्न हैं :

AB = AC (दिया गया है)

∠BAD = ∠CAD (AD, ∠BAC को समद्विभाजित करता है) और AD = AD (उभयनिष्ठ)

(ii) हाँ, ΔADB ≅ ΔADC (SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत)

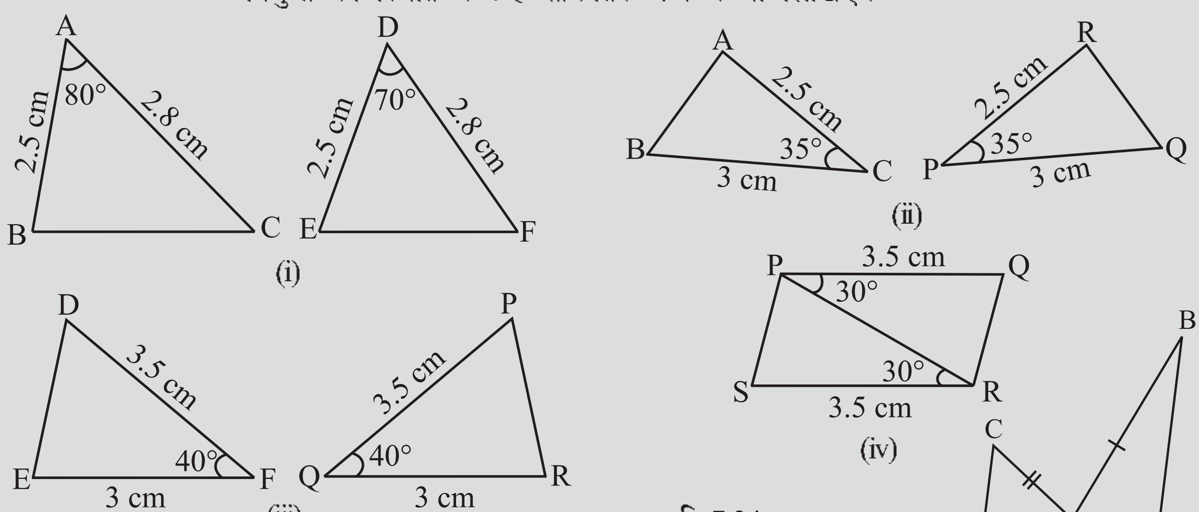
(iii) ∠B = ∠C (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इन्हें कीजिए

1. ΔDEF की भुजाओं $\overline{DE}$ और $\overline{EF}$ का अंतर्गत कोण कौन-सा है ?

2. SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप ΔPQR ≅ ΔFED स्थापित करना चाहते हैं। यह दिया गया है कि PQ = FE और RP = DF है। सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए अन्य किस तथ्य या सूचना की आवश्यकता होगी ?

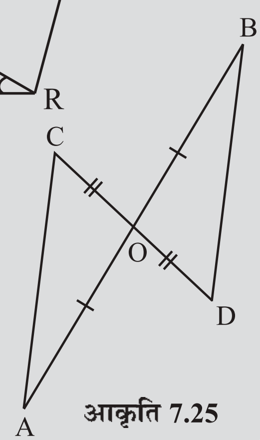
3. आकृति 7.24 में, त्रिभुजों के युग्मों में कुछ भागों की माप अंकित की गई है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके, इनमें वे युग्म छाँटिए जो सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में उन्हें सांकेतिक रूप में भी लिखिए।



आकृति 7.24

4. आकृति 7.25 में, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ एक दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं।

   (i) दोनों त्रिभुजों AOC और BOD में बराबर भागों के तीन युग्मों को बताइए।



आकृति 7.25

(ii) निम्न कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

(a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$

(b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

ASA खेल

क्या आप अप्पू के त्रिभुज को बना सकते हैं, यदि आप जानते हैं :

(i) इसके केवल एक कोण को ?

(ii) इसके केवल दो कोणों को ?

(iii) दो कोणों और कोई एक भुजा को ?

(iv) दो कोण ओर उनके बीच की भुजा को ?

उपरोक्त प्रश्नों के हल निकालने के प्रयास हमें निम्न प्रतिबंध से अवगत कराते हैं ।

ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध :
यदि एक सुमेलन में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा, किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

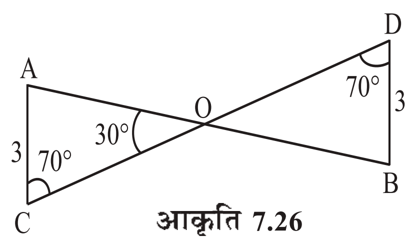
उदाहरण 6 ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ स्थापित करना है यदि यह दिया गया है कि $BC = RP$। इस सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए अन्य किन तथ्यों की आवश्यकता है ?

हल ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध के लिए हमें दो दिए कोणों के साथ अंतर्गत भुजाओं BC और RP की आवश्यकता है। अत: अन्य आवश्यक तथ्य निम्न हैं :

$\angle B = \angle R$

और $\angle C = \angle P$

उदाहरण 7 आकृति 7.26 में, क्या आप ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ है ?



आकृति 7.26

हल दो त्रिभुजों AOC और BOD में, $\angle C = \angle D$ (प्रत्येक $70°$)

और $\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: $\angle A = 180° - (70° + 30°) = 80°$

(त्रिभुज के कोणों का योग गुणधर्म का प्रयोग)

इसी प्रकार $\angle B = 180° - (70° + 30°) = 80°$

अत: हमारे पास, $\angle A = \angle B$, $AC = BD$ और $\angle C = \angle D$ है।

अब, $\angle A$ और $\angle C$ के अंतर्गत भुजा AC तथा $\angle B$ और $\angle D$ के अंतर्गत भुजा BD है ।

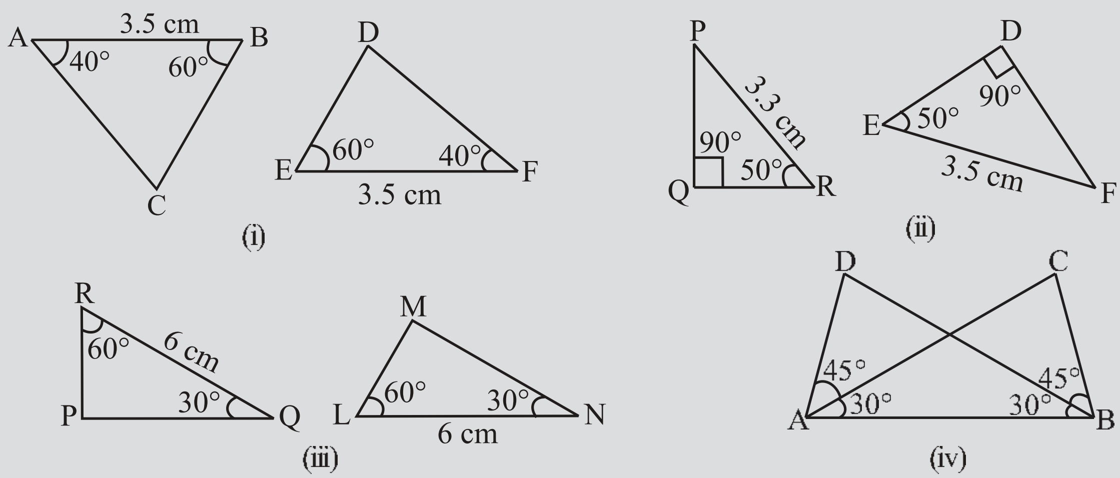
अत: ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध से, $\Delta AOC \cong \Delta BOD$.

टिप्पणी

यदि एक त्रिभुज के दो कोण दिए हुए हों तो आप त्रिभुज के तीसरे कोण को हमेशा ज्ञात कर सकते हैं। अत: जब एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और एक भुजा के बराबर हो, तब आप इसे 'दो कोणों और अंतर्गत भुजा' वाली सर्वांगसमता में रूपांतरित कर सकते हैं और तब सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग कर सकते हैं।

इन्हें कीजिए

1. ΔMNP में कोणों, M तथा N के अंतर्गत भुजा क्या है ?
2. ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ स्थापित करना चाहते हैं। आपको दिया गया है कि $\angle D = \angle M$ और $\angle F = \angle P$। इस सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए और कौन-से तथ्य की आवश्यकता है ? (खाका आकृति बनाकर कोशिश कीजिए)।
3. आकृति 7.27 में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप अंकित की गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कौन-से त्रिभुजों के युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए।

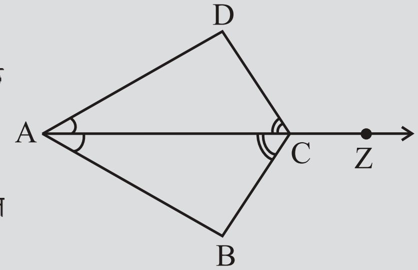


आकृति 7.27

4. दो त्रिभुजों के कुछ भागों की निम्न माप दी गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके जाँचिए कि क्या ये दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं। सर्वांगसमता की स्थिति में उत्तर को सांकेतिक रूप में भी लिखिए।

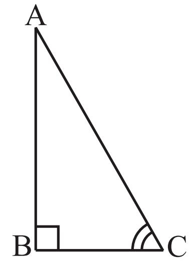
	ΔDEF	ΔPQR
(i)	$\angle D = 60^\circ$, $\angle F = 80^\circ$, $DF = 5$ cm	$\angle Q = 60^\circ$, $\angle R = 80^\circ$, $QR = 5$ cm
(ii)	$\angle D = 60^\circ$, $\angle F = 80^\circ$, $DF = 6$ cm	$\angle Q = 60^\circ$, $\angle R = 80^\circ$, $QP = 6$ cm
(iii)	$\angle E = 80^\circ$, $\angle F = 30^\circ$, $EF = 5$ cm	$\angle P = 80^\circ$, $PQ = 5$ cm, $\angle R = 30^\circ$

5. आकृति 7.28 में, किरण AZ, $\angle DAB$ तथा $\angle DCB$ को समद्विभाजित करती है।
   (i) त्रिभुजों BAC और DAC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।
   (ii) क्या $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ हैं ? कारण दीजिए।
   (iii) क्या $AB = AD$ है ? अपने उत्तर का उचित कारण दीजिए।
   (iv) क्या $CD = CB$ है ? कारण दीजिए।



आकृति 7.28

7.7 समकोण त्रिभुजों में सर्वांगसमता



आकृति 7.29

दो समकोण त्रिभुजों की स्थिति में सर्वांगसमता को यथायोग्य विशेष ध्यान देना होता है। ऐसे त्रिभुजों में, दो समकोण पहले ही बराबर होते हैं। अत: सर्वांगसमता प्रतिबंध आसान हो जाता है।

क्या आप एक ΔABC बना सकते हैं जिसमें $\angle B = 90°$ हो (आकृति 7.29 में दिखाया गया) यदि :

(i) केवल भुजा BC ज्ञात हो ? (ii) केवल $\angle C$ का पता हो ?

(iii) $\angle A$ और $\angle C$ की जानकारी हो ? (iv) भुजा AB और BC की जानकारी हो ?

(v) कर्ण AC और AB या BC में से एक भुजा की जानकारी हो ?

इनकी खाका आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि (iv) और (v) त्रिभुज बनाने में आपकी सहायता करते हैं। परंतु स्थिति (iv) साधारणतया SAS प्रतिबंध ही है। स्थिति (v) कुछ नयी है। यह निम्न प्रतिबंध की ओर अग्रसर करता है।

> **RHS** सर्वांगसमता प्रतिबंध
> यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हम इसें RHS सर्वांगसमता क्यों कहते हैं? इसके बारे में सोचिए।

उदाहरण 8 त्रिभुजों के युग्मों के कुछ भागों के निम्न माप दिए गए हैं। RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए कि क्या ये त्रिभुज युग्म सर्वांगसम हैं या नहीं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में भी लिखिए :

	ΔABC	ΔPQR
(i)	$\angle B = 90°$, AC = 8 cm, AB = 3 cm	$\angle P = 90°$, PR = 3 cm, QR = 8 cm
(ii)	$\angle A = 90°$, AC = 5 cm, BC = 9 cm	$\angle Q = 90°$, PR = 8 cm, PQ = 5 cm

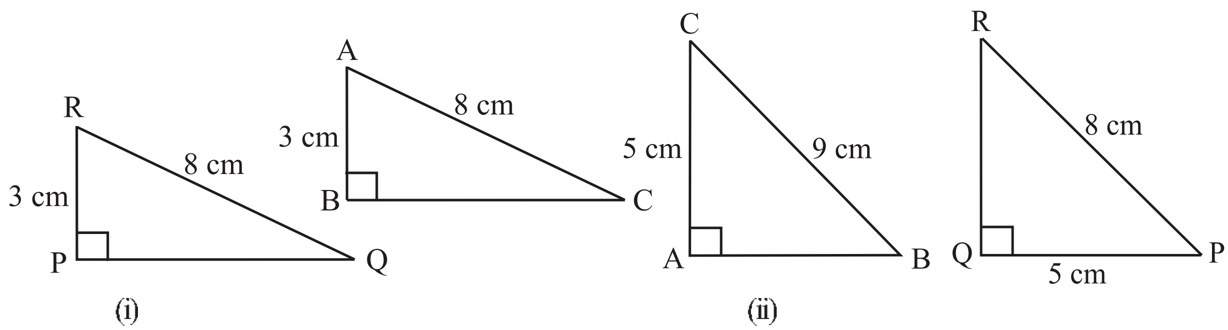
हल

(i) यहाँ, $\angle B = \angle P = 90°$,

कर्ण AC = कर्ण RQ (= 8 cm) और

भुजा AB = भुजा RP (= 3 cm)

अत: $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत). [आकृति 7.30(i)]



आकृति 7.30

(ii) यहाँ, $\angle A = \angle Q (= 90^\circ)$ और
भुजा AC = भुजा PQ (= 5 cm)
लेकिन कर्ण BC $\neq$ कर्ण PR [आकृति 7.30 (ii)]
अत: त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

उदाहरण 9 आकृति 7.31 में, DA $\perp$ AB, CB $\perp$ AB और AC = BD है।

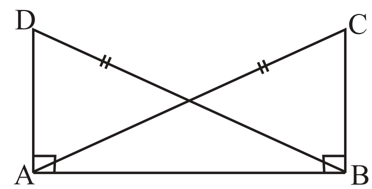


Fig 7.31

(a) ΔABC और ΔDAB में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(b) निम्न में कौन-सा कथन सत्य है?
(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

हल बराबर भागों के तीन युग्म ये हैं :

$\angle ABC = \angle BAD$ (= 90°)
AC = BD (दिया गया है)
AB = BA (उभयनिष्ठ भुजा)

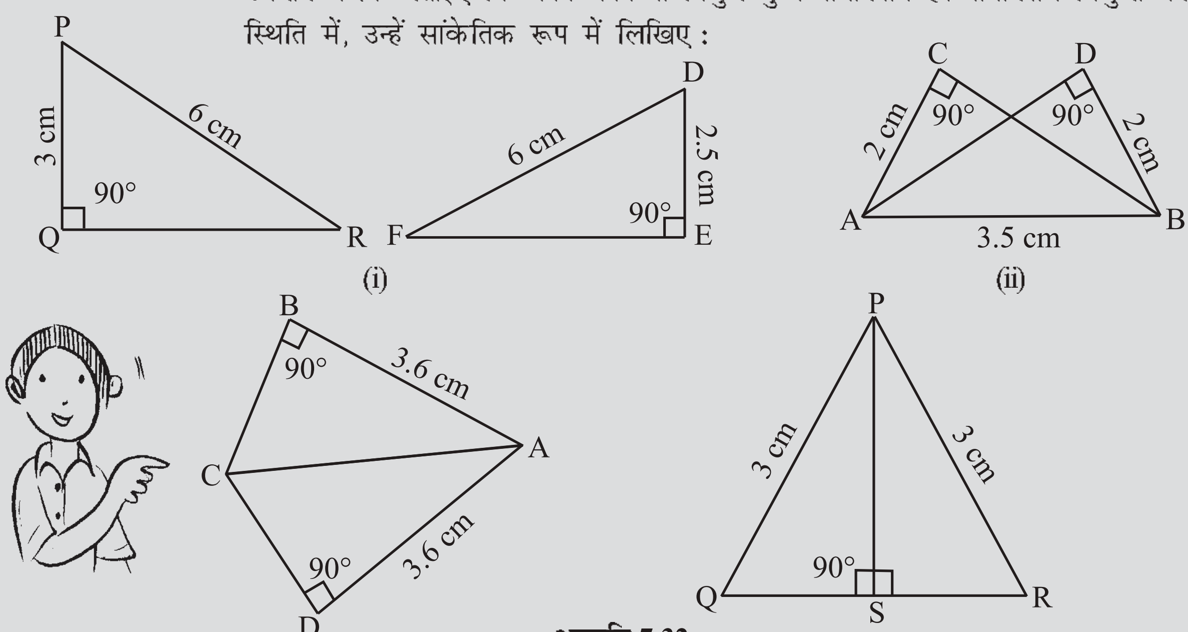
अत: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से)

इसलिए कथन (i) सत्य है।

कथन (ii) सत्य नहीं है क्योंकि शीर्षों में सुमेलन सही नहीं है।

इन्हें कीजिए

1. आकृति 7.32 में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप दी गई है। RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में, उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए :



आकृति 7.32

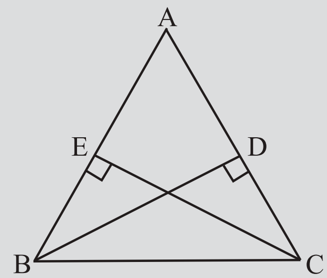
2. RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ स्थापित करना है। यदि यह दिया गया हो कि $\angle B = \angle P = 90°$ और $AB = RP$ है तो अन्य किस और सूचना की आवश्यकता है ?

3. आकृति 7.33 में, BD और CE, ΔABC के शीर्ष लंब हैं और $BD = CE$.

(i) ΔCBD और ΔBCE में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?

(iii) क्या $\angle DCB = \angle EBC$ है ? क्यों या क्यों नहीं ?



आकृति 7.33

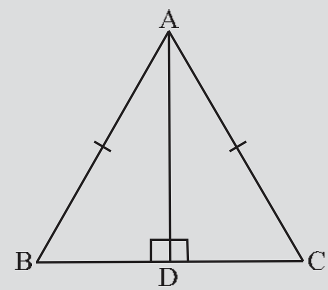
4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ और AD इसका एक शीर्षलंब है (आकृति 7.34)।

(i) ΔADB और ΔADC में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है ? क्यों या क्यों नहीं ?

(iv) क्या $BD = CD$ है ? क्यों या क्यों नहीं ?



आकृति 7.34

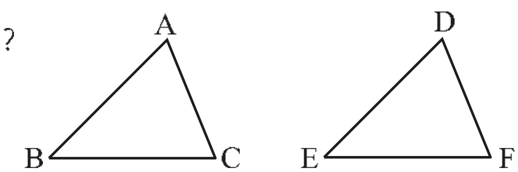
अब हम अभी तक देखे गए प्रतिबंधों पर आधारित कुछ उदाहरणों और प्रश्नों को देखेंगे।

प्रश्नावली 7.2

1. निम्न में आप कौन से सर्वांगसम प्रतिबंधों का प्रयोग करेंगे ?

(a) **दिया है :** $AC = DF$, $AB = DE$, $BC = EF$

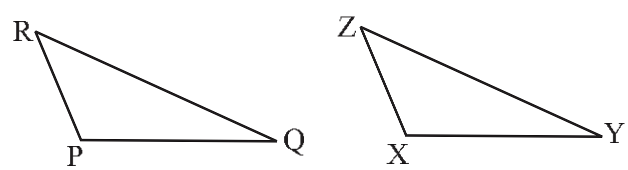
इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(b) **दिया है :** $ZX = RP$, $RQ = ZY$

$\angle PRQ = \angle XZY$

इसलिए, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

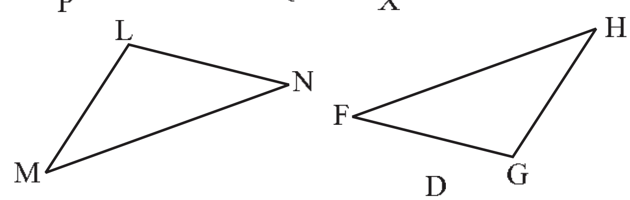


(c) **दिया है :** $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

$ML = FG$

इसलिए, $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

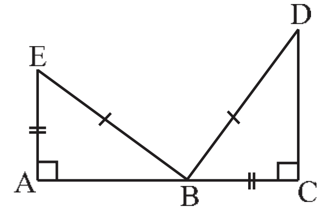


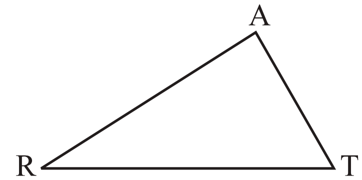
(d) **दिया है :** $EB = DB$

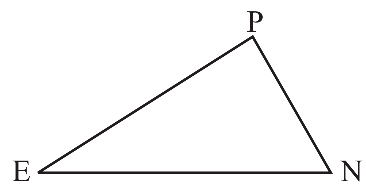
$AE = BC$

$\angle A = \angle C = 90°$

इसलिए, $\Delta ABE \cong \Delta CDB$







2. आप $\Delta ART \cong \Delta PEN$ दर्शाना चाहते हैं,

(a) यदि आप SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करें तो आपको दर्शाने की आवश्यकता है :

(i) AR = (ii) RT = (iii) AT =

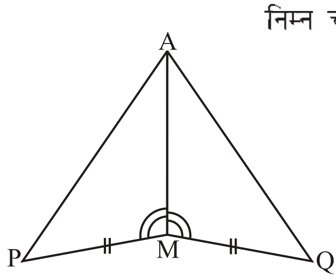
(b) यदि यह दिया गया है कि $\angle T = \angle N$ और आपको SAS प्रतिबंध का प्रयोग करना है, तो आपको आवश्यकता होगी :

(i) RT = और (ii) PN =

(c) यदि यह दिया गया है कि AT = PN और आपको ASA प्रतिबंध का प्रयोग करना है तो आपको आवश्यकता होगी :

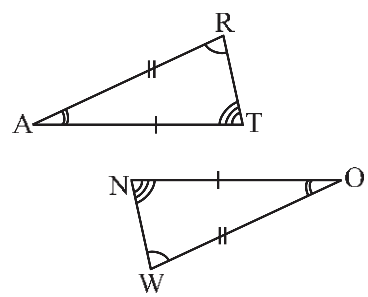
(i) ? = (ii) ? =

3. आपको $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ दर्शाना है।
निम्न चरणों में, रिक्त कारणों को भरिए।



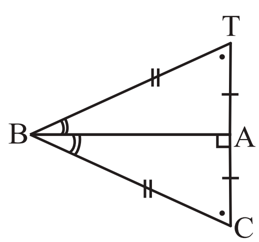
क्रम	कारण
(i) PM = QM	(i) ...
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ...
(iii) AM = AM	(iii) ...
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ...

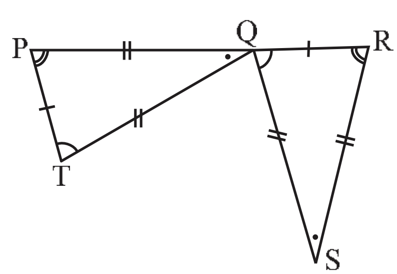
4. ΔABC में, $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$ और $\angle C = 110°$
ΔPQR में, $\angle P = 30°$, $\angle Q = 40°$ और $\angle R = 110°$
एक विद्यार्थी कहता है कि AAA सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है। क्या यह कथन सत्य है ? क्यों या क्यों नहीं ?



5. आकृति में दो त्रिभुज ART तथा OWN सर्वांगसम हैं जिनके संगत भागों को अंकित किया गया है। हम लिख सकते हैं $\Delta RAT \cong$?

6. कथनों को पूरा कीजिए :





$\Delta BCA \cong$? $\Delta QRS \cong$?

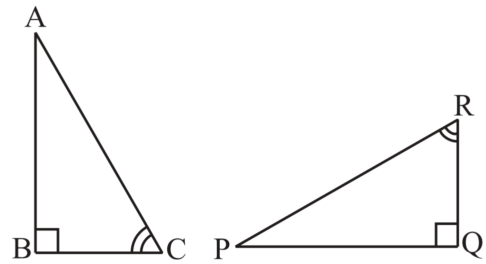
7. एक वर्गांकित शीट पर, बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों को इस प्रकार बनाइए कि

(i) त्रिभुज सर्वांगसम हो।

(ii) त्रिभुज सर्वांगसम न हो।

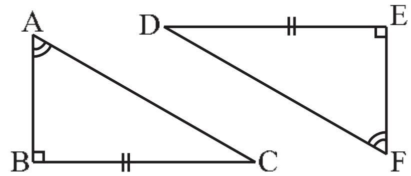
आप उनके परिमाप के बारे क्या कह सकते हैं?

8. आकृति में एक सर्वांगसम भागों का एक अतिरिक्त युग्म बताइए जिससे ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम हो जाएँ। आपने किस प्रतिबंध का प्रयोग किया?



9. चर्चा कीजिए, क्यों?

$\Delta ABC \cong \Delta FED$.



ज्ञानवर्धक क्रियाकलाप (Enrichment Activity)

हमने देखा कि अध्यारोपण तल-आकृतियों की सर्वांगसमता को जाँचने की एक उपयोगी विधि है। हमने रेखाखंडों, कोणों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंधों का वर्णन किया। अब आप इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियों के लिए प्रयत्न कर सकते हैं।

1. अलग-अलग माप के वर्गों के कट-आउट (cutout) सोचिए। अध्यारोपण विधि का प्रयोग वर्गों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध ज्ञात करने के लिए कीजिए। कैसे "सर्वांगसम भागों" की संकल्पना सर्वांगसम के अंतर्गत उपयोग होती है? क्या यहाँ संगत भुजाएँ हैं? क्या यहाँ संगत विकर्ण हैं?
2. यदि आप वृत्त लेते हैं तो क्या होता है? दो वृत्तों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध क्या है? क्या, आप फिर अध्यारोपण विधि का प्रयोग कर सकते हैं, पता लगाइए।
3. इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियाँ, जैसे समषट्भुज इत्यादि के लिए प्रयत्न कीजिए।
4. एक त्रिभुज की दो सर्वांगसम प्रतिलिपियाँ लीजिए। कागज को मोड़कर पता लगाइए कि क्या उनके शीर्षलंब बराबर हैं। क्या उनकी माध्यिकाएँ समान हैं ? आप उनके परिमाप तथा क्षेत्रफलों के बारे में क्या कह सकते हैं?

हमने क्या चर्चा की?

1. सर्वांगसम वस्तुएँ एक दूसरे की प्रतिलिपियाँ होती हैं।

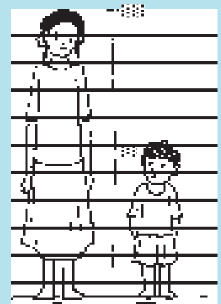
2. अध्यारोपण विधि तल-आकृतियों की सर्वांगसमता की जाँच करती है।

3. दो तल आकृतियाँ, माना, F_1 और F_2 सर्वांगसम होती हैं यदि F_1 की अक्स-प्रतिलिपि F_2. को पूर्णतया ढक लेती है। हम इसे $F_1 \cong F_2$ के रूप में लिखते हैं।

4. दो रेखाखंड, माना, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$, सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाइयाँ बराबर हों। हम इसे $\overline{AB}$ $\overline{CD}$ के रूप में लिखते हैं। यद्यपि, साधारणतया इसे $\overline{AB} = \overline{CD}$ लिखते हैं।

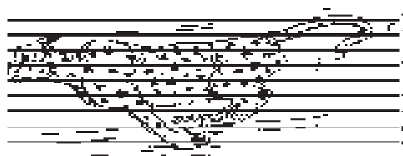
5. दो कोण, माना, $\angle ABC$ और $\angle PQR$, सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी माप बराबर हो। हम इसे $\angle ABC \cong \angle PQR$ या $m\angle ABC = m\angle PQR$. के रूप में लिखते हैं। यद्यपि, अभ्यास में इसे साधारणतया $\angle ABC = \angle PQR$ के रूप में लिखते हैं।
6. दो त्रिभुजों की SSS सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ किसी दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हो।
7. दो त्रिभुजों की SAS सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण, दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो।
8. दो त्रिभुजों की ASA सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो।
9. दो त्रिभुजों की RHS सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो।
10. दो त्रिभुजों में AAA सर्वांगसमता नहीं होती है।
    यह आवश्यक नहीं है कि बराबर संगत कोणों के दो त्रिभुज सर्वांगसम हों। ऐसे सुमेलनों में, इनमें से एक, दूसरे की बढ़ी हुई प्रतिलिपि हो सकती है। (वे सर्वांगसम होंगे यदि वे एक दूसरे की एक जैसी प्रतिलिपि हो)।

8.1



$\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3}$



km

km

$\frac{1}{6}$

cm cm

$= 150:100 = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}$ 3:2

1 3 km m

3 km = 3 × 1000 m = 3000 m

km m, m m

8.2

2

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$

$\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$ $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

3

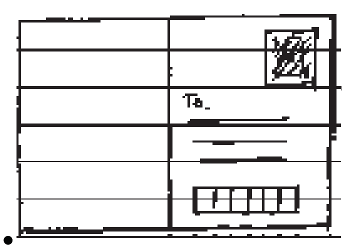
	8	2
	4	2

$= 8 : 2 = 4 : 1$

$= 4 : 2 = 2 : 1$

$4 : 1 > 2 : 1$ ($\frac{4}{1} > \frac{2}{1}$)

VI



cm cm

$4.5 : 3.0 \quad \frac{4.5}{3.0} \quad \frac{45}{30} \quad \frac{3}{2}$

4 km cm cm

2 cm 1000 km

$= x$ km

$1000 : x = 2 : 2.5$

$\frac{1000}{x} = \frac{2}{2.5}$

$\frac{1000 \times x \times 2.5}{x} = \frac{2}{2.5} \times x \times 2.5$

$1000 \times 2.5 = x \times 2$

$x = 1250$

$= 1250$ km

1 cm $= \frac{1000}{2}$ km

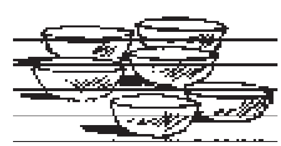
2.5 cm $= \frac{1000}{2} \times 2.5$ km

2.5 cm $= \frac{1000}{2} \times 2.5$ km

1250 km

1 cm km

5



$= \frac{90}{6}$

$= \frac{90}{6} \times 10 = 150$

6 km

$=$ km

$= \frac{150}{25}$ km

$= \frac{150}{25}$ 30 km $= 180$ km

(km/h)

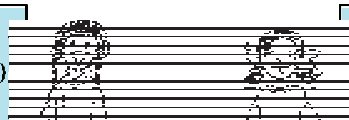
8.1

1.
   (a)
   (b) kg g
   (c) m cm
   (d)
2.
3. = 570 = 1660 = 3 km^2 = 2 km^2,
   (i) km^2
   (ii)

8.3

320/400

80



300/360

83.3

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

8.3.1 [illegible]

> [illegible] (percent) [illegible] 'percentum' [illegible]

[illegible] % [illegible] % [illegible]

$1\% = \frac{1}{100}$ = [illegible]

[illegible]

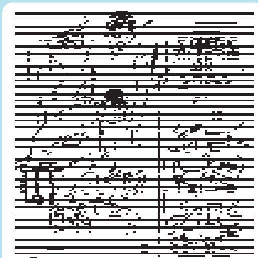
[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 [illegible]
[illegible]	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 [illegible]
[illegible]	35	35	----	----	----
[illegible]	25	--------	----	----	----
[illegible]	**100**				

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
110 cm	22		
120 cm	25		
128 cm	32		
130 cm	21		
[illegible]	**100**		



2. [illegible]
[illegible] 2 : 20; [illegible] 3 : 30; [illegible] 4 : 28; [illegible] 5 : 14; [illegible] 6 : 8
[illegible]

[illegible]

[illegible] (beads) [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}$ $\frac{100}{100}$ $\frac{40}{100}$	40%
[illegible]	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}$ $\frac{100}{100}$ $\frac{60}{100}$	60%
[illegible]	**20**			

[illegible] $\frac{100}{100}$ [illegible]

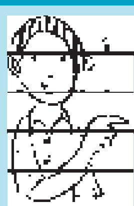
$\frac{8}{20}$ 100

= 40 ( ) = 40%

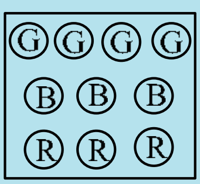
$\frac{8}{20}$ $\frac{8 \quad 5}{20 \quad 5}$

$= \frac{40}{100} = 40\%$

$\frac{5}{5}$



1. (chips)



(G)				
(B)				
(R)				

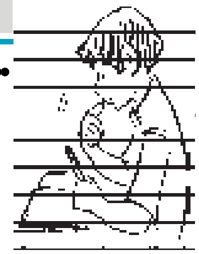
2.

[illegible]

[illegible]

1. [illegible] gm [illegible]

.78 [illegible] | [illegible] | 78% [illegible]
.21 [illegible] | | 21% [illegible]
.01 [illegible] | | 1% [illegible]



2. [illegible]

$\frac{3}{5}$ [illegible] | 60% [illegible]

$\frac{2}{5}$ [illegible] | 40% [illegible]

8.3.2 [illegible]

[illegible]

[illegible] 7 $\frac{1}{3}$ [illegible]

[illegible] [illegible] $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{3} \times 100\%$

$$= \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

[illegible] 8 25 [illegible] 15 [illegible]

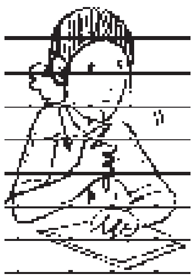
[illegible] 25 [illegible] 15 [illegible]

[illegible] $= \frac{15}{25} \times 100 = 60$ [illegible] 60% [illegible]

[illegible] 9 $\frac{5}{4}$ [illegible]

[illegible] [illegible] $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 100\% = 125\%$

[illegible]



(i) (cake) 50%

(cake) 100%

(cake) 150%

(ii) 50% ?

100% ?

150% ?

8.3.3

10

(a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\,\%$

$= \dfrac{75}{100} \times 100\,\% = 75\%$

(b) $0.09 = \dfrac{9}{100} = 9\,\%$

(c) $0.2 = \dfrac{2}{10} \times 100\% = 20\,\%$

1.

(a) $\dfrac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\dfrac{49}{50}$

(d) $\dfrac{2}{2}$ (e) 0.05

2. (i)

(ii)

(iii)

(iv)

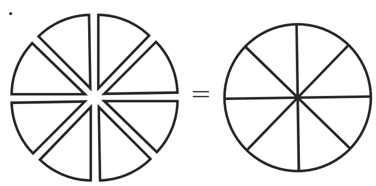
8.3.4 [illegible]

[illegible]

[illegible]	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
[illegible]	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$					
[illegible]	0.01	0.10					

[illegible]

[illegible] % [illegible]



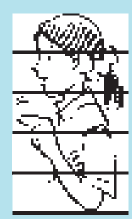
[illegible] % [illegible]

[illegible] % = [illegible] %.

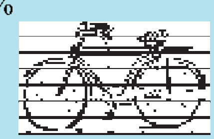
[illegible]

1. 35% + ________% = 100%,   64% + 20% + _________ % = 100%

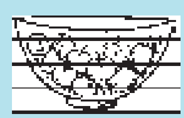
   45% = 100% – __________ %,   70% = ______% – 30%



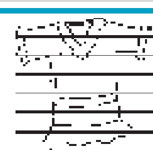
2. [illegible] 65% [illegible]

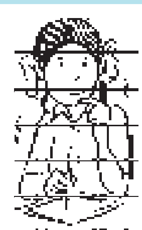


3. [illegible] % [illegible] % [illegible]



[illegible]

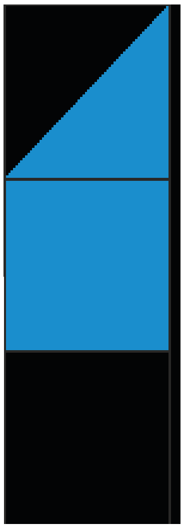




[illegible] 20%, [illegible] 50%, [illegible] 30% [illegible]

8.3.5

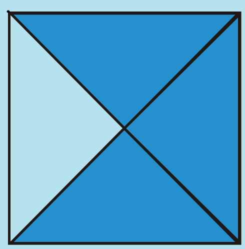
11



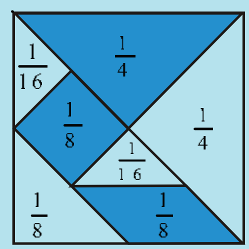
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\times 100\,\% \quad 50\,\%$$

%

(i)



(ii)



8.4

8.4.1

– 5%

– 10%

– 20%

5% $\frac{5}{100}$

8.4.2

12

$$40 \text{ of } 25\% = \frac{25}{100} \times 40 = 10$$

$= 25$

$$= \frac{25}{100} \times 40 = 10$$

1.

(a) 164 50% (b) 12 75% (c) 64 $12\frac{1}{2}\%$

2. %

13

% % %

$25\% = 20$

P

P of $25\% = 20$

$\frac{25}{100}$ P 20

$\frac{P}{4}$ 20 $P = 20 \times 4$

$P = 80$

100 25

20

$\frac{100}{25}$ 20 = 80

•• •• •• ••• •

•1. 9 •• ••••••• ••25% ••• 2. 15•• ••••••• ••75% •••

•••••• •• 8.2

1. ••••••••••• ••• ••••••••••• •••

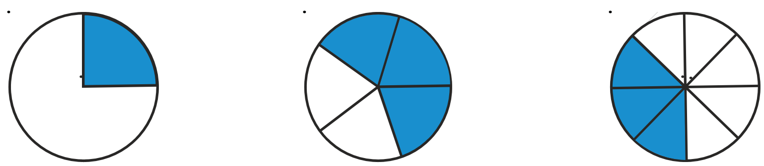
(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$

2. ••••••••• •••••••• ••••••••••• ••

(a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35

3. • ••••• ••••• •• •• ••• ••• •••••••••••••••••••• •••••• ••• ••• •• •

•• ••• ••••••••••••••



(i) (ii) (iii)

4. • •••• ••• •••

(a) 250 • ••15% (b) 1 ••••• ••1%

(c) 2500 • ••20% (d) 1 •• •••• ••75%

5. ••••••••••• ••• •••••

(a) ••• ••5%, 600 •• (b) ••• ••12%, 1080••• (c) ••• ••40%, 500 km••

(d) ••• ••70% 14•• •••••• (e) ••• ••8%, 40 • ••••••

6. •••••••••••• •• ••••••••• • ••••••••••• •• •••• •••••••• •• •• ••

• •••••• •••••

(a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%

7. •• ••••••30% • ••• ••40% •••••••••••••••• ••••••• •• •••••••• ••••••

8. •• • ••••••• ••15,000 ••••• •• •• •60% •••••••••••••••••• ••••• •• ••• ••••

•• ••••••••••••••••• ••••••••• •• •••••••• ••••••• •••• ••••• ••••••••

•• •••••••• ••••••••••••• •••

9. •••• •••••••••••400 •••• •••••••••••••••••••••••••••• ••10% •••••••• •

•••••• ••••••

10. •• •••••••• ••••••••••• ••••(season) ••20 •• ••• •••••••••••••••••

25% •• •• ••••• •••••••• •• ••••••• •••••••

8.4.3

14

$= 2 : 1$

$2 + 1 = 3$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$ $100\,\%$ $\frac{200}{3}$ $66\frac{2}{3}\,\%$

$\frac{1}{3}$ $100\,\%$ $\frac{100}{3}$ $33\frac{1}{3}\,\%$

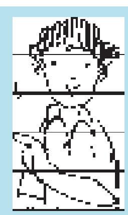
15

$2 : 3 : 5$

$2 + 3 + 5 = 10.$

$\frac{2}{10} \times 100\,\%$ $20\,\%$
$\frac{3}{10} \times 100\,\%$ $30\,\%$
$\frac{5}{10} \times 100\,\%$ $50\,\%$

$\frac{2}{10}$	250	$= 50$
$\frac{3}{10}$	250	75
$\frac{5}{10}$	250	125



1. 15 $20\,\%$ $80\,\%$
2. $2 : 3 : 4$

8.4.4

10 %

16

= 6 – 4 = 2.

$$= \frac{\quad}{\quad}\times 100$$

$$= \frac{\quad}{\quad}\times 100 = \frac{2}{4}\times 100 = 50$$

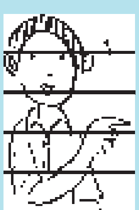
17

= = 150

= = 150 – 100 = 50

$$= \frac{\quad}{\quad}\times 100 = \frac{50}{150}\quad 100\quad 33\frac{1}{3}\%$$

$33\frac{1}{3}\%$



1.

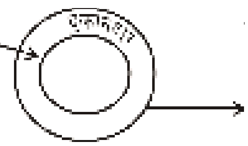
–

–

2.

8.5 [illegible]

[illegible]



[illegible] (cost price) [illegible] (C.P.) [illegible] (selling price) [illegible] (S.P.) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (CP) < [illegible] (SP) [illegible] = SP – CP.

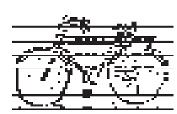
[illegible] (CP) = [illegible] (SP) [illegible]

[illegible] (CP) > [illegible] (SP) [illegible] = CP – SP [illegible]

[illegible]

- [illegible] 72 [illegible]

- [illegible]



- [illegible]

[illegible]

[illegible] = SP – CP = 80 [illegible] – 72 [illegible] = 8 [illegible]

[illegible]

8.5.1 [illegible]

[illegible]

[illegible] CP = 72 [illegible], SP = 80 [illegible], [illegible] = 8 [illegible]

$= \frac{\quad}{\quad} \times 100 = \frac{8}{72} \times 100$

$= \frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}$

$\% = 11\frac{1}{9}$

72 8

100 $\frac{8}{72} \times 100$

$\% = 11\frac{1}{9}$

CP = 120, SP = 100

= 120 – 100 = 20

$= \frac{\quad}{\quad} \times 100$

$= \frac{20}{120} \times 100$

$= \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

$= 16\frac{2}{3}\%$

120 =

100

$\frac{20}{120} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

$16\frac{2}{3}$

18 10%

= 120

= 10,

10% = 100

= 10

= (100 – 10) = 90

= 10 %

= 120 10 %

$= \frac{10}{100} \times 120 = 12$

= 100, = 90

= 120

$= \frac{90}{100}$ 120 = 108

= 120 – 12 = 108

19 20%

= 540 = 20%,

20% 100 + 20 = 120

= 100

$\frac{100}{120} \times 540 = 450$

= 20% = +

540 = + 20%

$540 = \ + \frac{20}{100} \times \ = 1\frac{1}{5}$

$= \frac{6}{5}$, 540 $\frac{5}{6}$

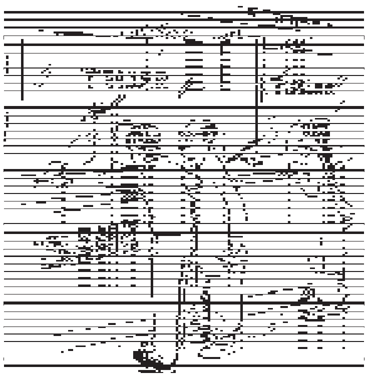
450 =

1.

2.

3.

4.

8.6

20

$\frac{15}{100}$ 5000 = 750

5000 + 750 = 5750

P R % R

P I

$$I = \frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$$

8.6.1

18%,

18 + 18 + 18 = 3 × 18 = 54

P R %

$\frac{R \quad P}{100}$ T (I)

$$I = \frac{T \quad R \quad P}{100} \quad \frac{P \quad R \quad T}{100} \quad \frac{PRT}{100}$$

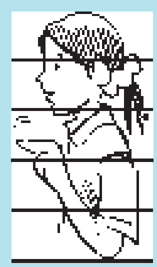
T A $A = P + I$

1.

2.

3.

4.



$I \quad \frac{P \quad T \quad R}{100}$

21

1

$$I = \frac{P \times T \times R}{100}$$

$$750 = \frac{4500 \times 2 \times R}{100}$$

$$\frac{750}{45 \times 2} = R$$

$$= 8\frac{1}{3}\%$$

2

$= 750$

$= \frac{750}{2} = 375$

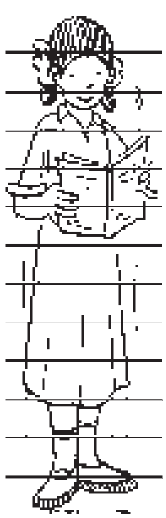
$= 375$

$$\frac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}\%$$

$= 8\frac{1}{3}\%$

1.

2.



8.3

1.

(a)

(b)

(c)

(d)

2.

(a) 3:1 (b) 2:3:5 (c) 1:4 (d) 1:2:5

3.

4.

5.

6.

7. (i)

(ii) gm

8.

9.

(a) = 1200 12%

(b) = 7500 5%

10.

11.

1.

2. cm cm

3.

4.

5.

6. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $100\% = 25\%$ $75\% = \frac{75}{100}$ $\frac{3}{4}$

7. $0.25 = 0.25 \times 100\% = \; = 25\%$

8.

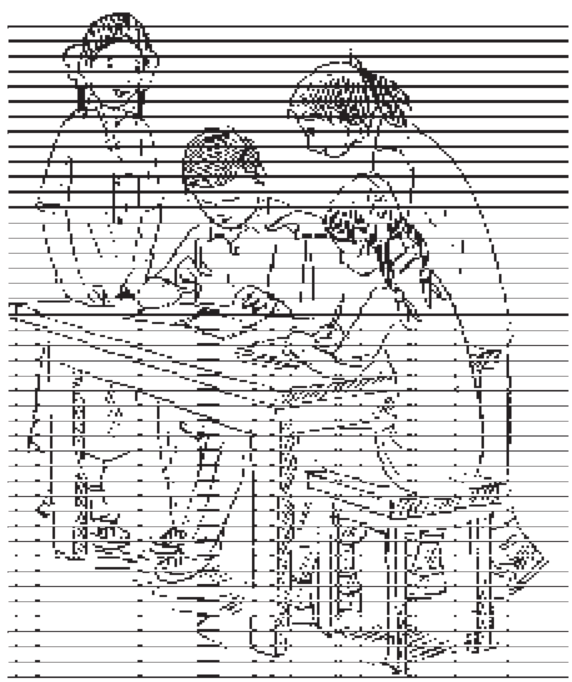
(a)

(b)

(c)

(d)

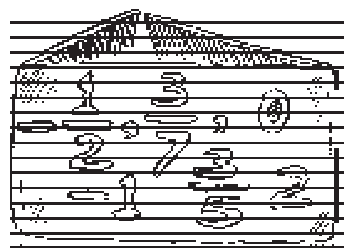
(e)



9

9.1

(counting numbers) (natural numbers) (whole numbers), (integers) (negatives) (number system)



(fractions) $\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$,

(equivalent)

(rational numbers)

9.2

(opposite)

km km

m $\frac{3}{4}$ km

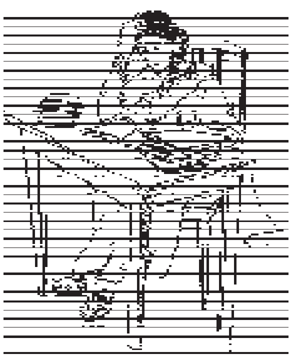
m km

$\frac{3}{4}$ km $\frac{-3}{4}$ $\frac{-3}{4}$

9.3

(rational) (ratio)

$\frac{3}{2}$



p q $(q \neq 0)$ $p:q$ $\frac{p}{q}$

$\frac{p}{q}$,

p q $q \neq 0$

$\frac{4}{5}$ $p = 4$ $q = 5$

$\frac{-3}{4}$ $p = -3$ $q = 4$

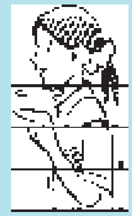
- $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$,

$0.5 = \frac{5}{10}$, $2.3 = \frac{23}{10}$,

$0.333 = \frac{333}{1000}$

1. $\frac{2}{-3}$

2.



$\frac{p}{q}$ p q (0)

$\frac{-3}{7}$ -3 7

(a)

(b)

(c)

(d)

●

-5

$\frac{-5}{1}$ 0 0 $\frac{0}{2}$ $\frac{0}{7}$

$\frac{-2}{3}$

$$\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times 2}{3 \times 2} \quad \frac{-4}{6} \qquad \frac{-2}{3} \qquad \frac{-4}{6}$$

$$\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times -5}{3 \times -5} \quad \frac{10}{-15} \qquad \frac{-2}{3} \qquad \frac{10}{-15}$$

$\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$

(equivalent)

$$\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$$

(non-zero)

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$

$$\frac{10}{-15} = \frac{10 \div -5}{-15 \div -5} = \frac{-2}{3}, \quad \frac{-12}{24} = \frac{-12 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-1}{2}$$

$\frac{-2}{3}$ $-\frac{2}{3}, \frac{-10}{15}$ $-\frac{10}{15}$

9.4

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$

1.

2.

$\frac{-3}{5}$

$\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$

1.

2.

- $\frac{8}{3}$ $\frac{8}{3} = \frac{8 \times (-1)}{-3 \times (-1)} = \frac{8}{3}$

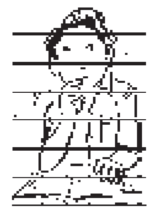
  $\frac{8}{3}$ $\frac{8}{3}$

  $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$

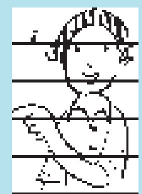
- $\frac{-3}{-5}$

$\frac{-3}{-5} = \frac{-3 \times (-1)}{-5 \times (-1)} = \frac{3}{5}$ $\frac{-3}{-5}$

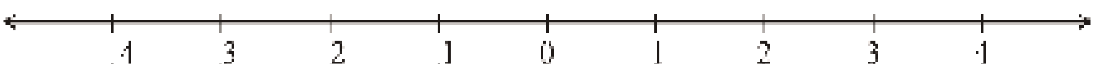
$\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3},$



(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$



9.5



+

–

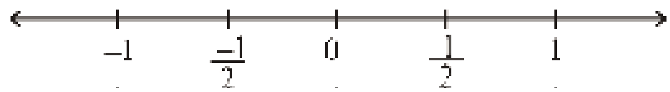
$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$



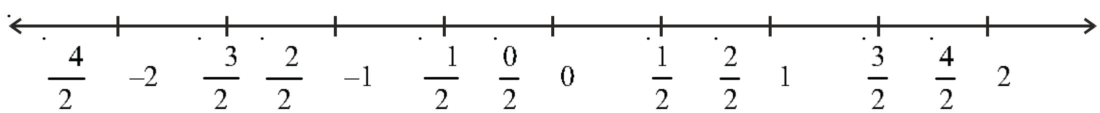
$\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2} (= -1), \frac{3}{2}, \frac{4}{2} (\quad 2),$

$\frac{3}{2}$ -1 -2



$\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \ldots$

9.6

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{7}{11}$$

(common factor)

(standard form)

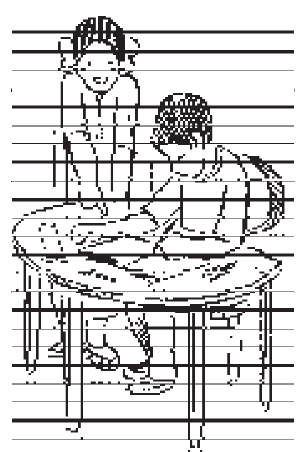
1 $\frac{-45}{30}$

$\frac{-45}{30} \quad \frac{-45 \quad 3}{30 \quad 3} \quad \frac{-15}{10} \quad \frac{-15 \quad 5}{10 \quad 5} \quad \frac{-3}{2}$

$\frac{-45}{30} \quad \frac{-45 \quad 15}{30 \quad 15} \quad \frac{-3}{2}$

2

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$



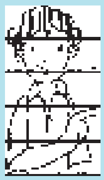
(i)

-12

$\frac{36}{-24} \quad \frac{36 \quad (-12)}{-24 \quad (-12)} \quad \frac{3}{2}$

(ii)

$\frac{-3}{-15} \quad \frac{-3 \quad (-3)}{-15 \quad (-3)} \quad \frac{1}{5}$



(i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

9.7

- $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$

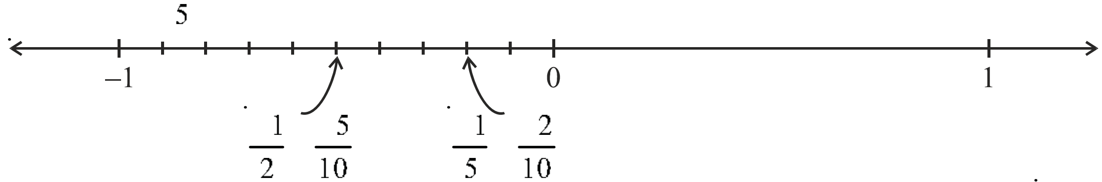
- $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$

$5 > 2$

$-2 > -5$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5}$



$-\frac{1}{2}$ $\frac{5}{10}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2} < \frac{1}{5}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ … $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$

$\frac{3}{4}$ … $\frac{2}{3}$ … $\frac{1}{2}$ … $\frac{1}{5}$

$4 > 3$ … $-4 < -3$ … $5 > 2$

… $-5 < -2$

- … (*inequality*) …

$\frac{7}{5}$ … $\frac{5}{3}$, … $\frac{7}{5}$ … $\frac{5}{3}$ …

$\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ … $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$

$\frac{3}{8}$ … $\frac{2}{7}$?; $\frac{4}{3}$ … $\frac{3}{2}$?

- …

$-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$

- … $\frac{3}{5}$ … $\frac{2}{7}$ …

3 … $\frac{4}{9}$ … $\frac{16}{36}$ …

… $\frac{4}{-9} = \frac{4 \times (-4)}{-9 \times (-4)} = \frac{16}{36}$ … $\frac{16}{36} = \frac{16 \div 4}{36 \div 4} = \frac{4}{9}$ …

9.8 …

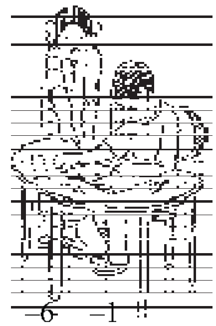
…

(finite

$\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$

$\frac{-3}{5}$ $\frac{-9}{15}$ $\frac{-1}{3}$ $\frac{-5}{15}$

$\frac{-9}{15}$ $\frac{-8}{15}$ $\frac{-7}{15}$ $\frac{-6}{15}$ $\frac{-5}{15}$ $\frac{-3}{5}$ $\frac{-8}{15}$ $\frac{-7}{15}$ $\frac{-6}{15}$ $\frac{-1}{3}$



$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$

$\frac{-3}{5}$ $\frac{-1}{3}$ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$

$\frac{-3}{5}$ $\frac{-18}{30}$ $\frac{-8}{15}$ $\frac{-16}{30}$

$\frac{-18}{30}$ $\frac{-17}{30}$ $\frac{-16}{30}$ $\frac{-3}{5}$ $\frac{-17}{30}$ $\frac{-8}{15}$

$\frac{-3}{5}$ $\frac{-17}{30}$ $\frac{-8}{15}$ $\frac{-7}{15}$ $\frac{-6}{15}$ $\frac{-1}{3}$

$\frac{-1}{3}$ $\frac{-3}{5}$

$\frac{-3}{5}$ $\frac{-3}{5}\ \frac{30}{30}$ $\frac{-90}{150}$ $\frac{-1}{3}$ $\frac{-1}{3}\ \frac{50}{50}$ $\frac{-50}{150}$

$\frac{-90}{150}$ $\frac{-50}{150}$ $\frac{-3}{5}$ $\frac{-1}{3}$

$\frac{-5}{7}$ $\frac{-3}{8}$

$\frac{89}{150},\frac{88}{150},\frac{87}{150},\ldots,\frac{51}{150}$

$\frac{-5}{3}$ $\frac{-8}{7}$

4 -2 -1

$-1 = \frac{5}{5}$ $-2 = \frac{10}{5}$

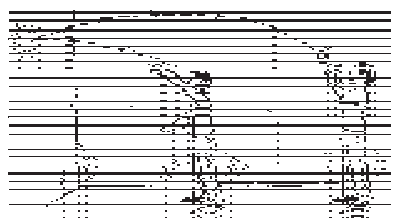
$\frac{-10}{5}\ \ \frac{-9}{5}\ \ \frac{-8}{5}\ \ \frac{-7}{5}\ \ \frac{-6}{5}\ \ \frac{-5}{5}$ -2 $\frac{-9}{5}\ \ \frac{-8}{5}\ \ \frac{-7}{5}\ \ \frac{-6}{5}$ -1

-2 -1 $\frac{9}{5}, \frac{8}{5}, \frac{7}{5}$

($\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ $\frac{-6}{5}$)

5 (Pattern)

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$$



$\frac{2}{6}\quad \frac{1\quad 2}{3\quad 2}, \frac{3}{9}\quad \frac{1\quad 3}{3\quad 3}, \frac{4}{12}\quad \frac{1\quad 4}{3\quad 4}$

$\frac{-1\quad 1}{3\quad 1}\quad \frac{1}{3}, \frac{-1\quad 2}{3\quad 2}\quad \frac{-2}{6}, \frac{-1\quad 3}{3\quad 3}\quad \frac{-3}{9}, \frac{-1\quad 4}{3\quad 4}\quad \frac{-4}{12}$

$\frac{1\quad 5}{3\quad 5}\quad \frac{5}{15}, \frac{1\quad 6}{3\quad 6}\quad \frac{6}{18}, \frac{1\quad 7}{3\quad 7}\quad \frac{7}{21}$

9.1

1.

(i) -1 0 (ii) -2 -1 (iii) $\frac{-4}{5}$ $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$

2.

(i) $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \ldots\ldots$

(iii) $\frac{1}{6}, \frac{2}{12}, \frac{3}{18}, \frac{4}{24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\ldots$

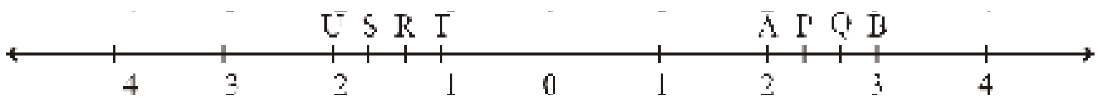
3.

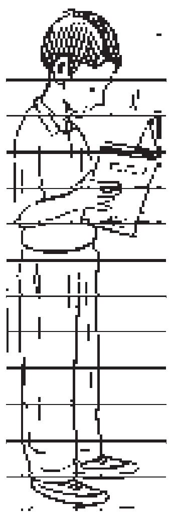
(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. P, Q, R, S, T, U, A B TR = RS = SU AP = PQ = QB P, Q, R S





6.

(i) $\frac{7}{21}$ $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{16}{20}$ $\frac{20}{25}$ (iii) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{3}{5}$ $\frac{12}{20}$ (v) $\frac{8}{5}$ $\frac{24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$

(vii) $\frac{5}{9}$ $\frac{5}{9}$

7.

(i) $\frac{8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{44}{72}$ (iv) $\frac{8}{10}$

8. >, <, =

(i) $\frac{5}{7}\ \square\ \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}\ \square\ \frac{5}{7}$ (iii) $\frac{7}{8}\ \square\ \frac{14}{16}$

(iv) $\frac{8}{5}\ \square\ \frac{7}{4}$ (v) $\frac{1}{3}\ \square\ \frac{1}{4}$ (vi) $\frac{5}{11}\ \square\ \frac{5}{11}$

(vii) $0\ \square\ \frac{7}{6}$

9.

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{5}{6}, \frac{4}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$

(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $3\frac{2}{7},\ 3\frac{4}{5}$

10.

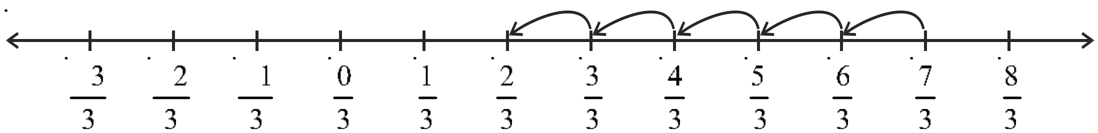
(i) $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ (ii) $\frac{-1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{3}$ (iii) $\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$

9.9

9.9.1

- $\frac{7}{3}$ $\frac{5}{3}$

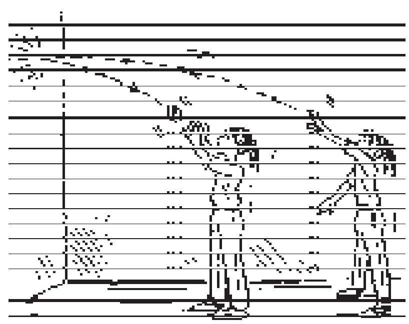
$\frac{7}{3}$ $\frac{5}{3}$



$\frac{1}{3}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{3}$

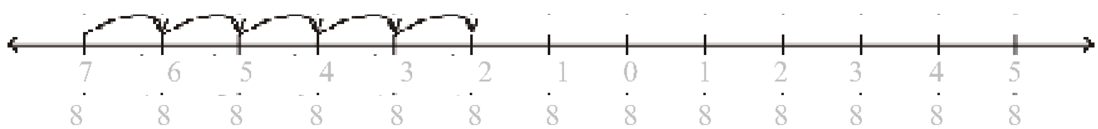
$\frac{2}{3}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{2}{3}$

$$\frac{7}{3}\quad\frac{5}{3}\quad\frac{7\quad 5}{3}\quad\frac{2}{3}$$

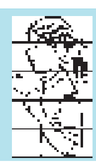


$\frac{6}{5}$ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$

$\frac{7}{8}$ $\frac{5}{8}$



$\frac{7}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7\quad 5}{8}$?



$\frac{13}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{19}{5}$ $\frac{7}{5}$

$\frac{11}{5} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{11 \quad 7}{5} \quad \frac{4}{5}$

$\frac{7}{5}$ and $\frac{2}{3}$

$\frac{7}{5} \quad \frac{21}{15} \qquad \frac{2}{3} \quad \frac{10}{15}$

$\frac{7}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{21}{15} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{31}{15}$

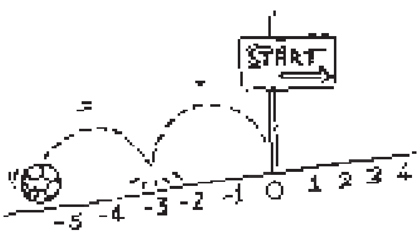
$\frac{4}{7} \quad \frac{4}{7}$

$\frac{4}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{4 \quad 4}{7} \quad 0 \qquad \frac{4}{7} \quad \frac{4}{7} \quad 0$

$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}$

(i) $\frac{3}{7} \quad \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{5}{6} \quad \frac{3}{11}$



vkidks;n gsakfd iwudkes -2 (additive inverse) -2

$\frac{4}{7} \qquad \frac{4}{7}$

$\frac{4}{7} \qquad \frac{4}{7}$

$\frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$

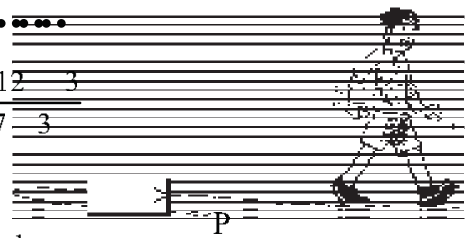
$\frac{-3}{9}, \frac{-9}{11} \qquad \frac{5}{7}$

6 P $\frac{2}{3}$ km

$1\frac{5}{7}$ km

P

P km



$$\frac{2}{3} \quad 1\frac{5}{7} = \frac{2}{3} \quad \frac{12}{7} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{7} \quad \frac{-12}{7} \quad \frac{3}{3}$$

$$= \frac{14 \quad 36}{21} \quad \frac{22}{21} \quad 1\frac{1}{21}$$

P $1\frac{1}{21}$ km

9.9.2

$\frac{5}{7}$ $\frac{3}{8}$

$$\frac{5}{7} \quad \frac{3}{8} = \frac{40 \quad 21}{56} \quad \frac{19}{56}$$

a *b* $a - b = a + (- b)$

$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} + \frac{(-3)}{8} = \frac{19}{56}$

$\frac{7}{8}$ $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}$ $\frac{8}{7}$

$1\frac{2}{3} \quad 2\frac{4}{5} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{14}{5} = \frac{5}{3} + \frac{14}{5}$

$$= \frac{5}{3} + \frac{(-14)}{5} \quad \frac{17}{15} \quad 1\frac{2}{15}$$

$\frac{2}{7} \quad \frac{5}{6}$ $\frac{2}{7} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5}{6}$

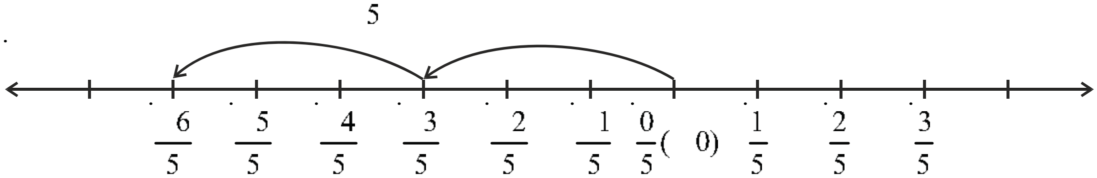
$$\frac{2}{7} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{47}{42} \quad 1\frac{5}{42}$$

(i) $\frac{7}{9} \quad \frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3}$

9.9.3

$\frac{3}{5}$ 2 $\frac{3}{5} \times 2$

$\frac{3}{5}$



$\frac{6}{5}$

$$\frac{3}{5}\times 2 \quad \frac{3\times 2}{5} \quad \frac{6}{5}$$

$\frac{4}{7}\times 3$ $\frac{6}{5}\times 4$,

$$\frac{2}{9}\times(\ \ 5) = \frac{2\times(\ \ 5)}{9} \quad \frac{10}{9}$$

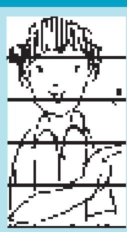
-5 $\frac{5}{1}$

$$\frac{2}{9}\times\frac{5}{1} = \frac{10}{9} \quad \frac{2\times\ \ 5}{9\times 1}$$

$$\frac{3}{11}\times(\ \ 2) = \frac{3\times(\ \ 2)}{11\times 1} \quad \frac{6}{11}$$

(i) $\frac{-3}{5}$ ´ 7 (ii) $\frac{-6}{5}$ ´ (-2)

$$\frac{3}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{3 \quad 5}{8 \quad 7} \quad \frac{15}{56}$$



(i) $\frac{-3}{4} \quad \frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3} \quad \frac{-5}{9}$

$$\frac{3}{5} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3 \quad 2}{5 \quad 7} \quad \frac{6}{35}$$

$$\frac{-5}{8} ´ \frac{-9}{7} = \frac{(-5)´(-9)}{8´7} = \frac{45}{56}$$

9.9.4

(reciprocals) $\frac{2}{7}$

$\frac{7}{2}$

$\frac{2}{7}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$

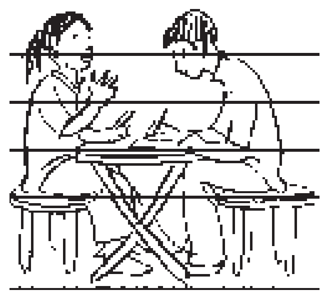
$\frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right.$

$= \frac{-4}{9} \quad \frac{-9}{4} \quad 1$

$\frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$

$\frac{-6}{11}, \frac{-8}{5}$

$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{7}$



$\frac{4}{9} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{28}{45}$

$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{28}{45}$

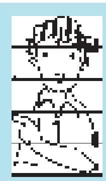
$\frac{4}{9} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{28}{45}$

$\frac{28}{45}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$

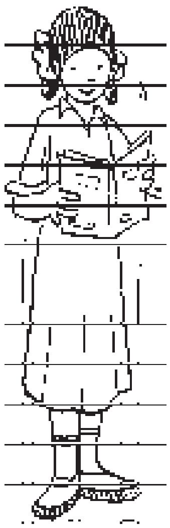
mnjkgj.k ls;g izn'kZ gksrk gSfd

$\frac{6}{-5}, \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5}, \left(\frac{-2}{3}\right)$ $\quad \frac{6}{5} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{18}{10}$

(i) $\frac{2}{3} \quad \frac{7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7} \quad \frac{5}{7}$



9.2



1.

(i) $\frac{5}{4} \quad \frac{11}{4}$ (ii) $\frac{5}{3} \quad \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{9}{10} \quad \frac{22}{15}$

(iv) $\frac{3}{11} \quad \frac{5}{9}$ (v) $\frac{8}{19} \quad \frac{2}{57}$ (vi) $\frac{2}{3} \quad 0$

(vii) $2\frac{1}{3} \quad 4\frac{3}{5}$

2.

(i) $\frac{7}{24} \quad \frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63} \quad \frac{6}{21}$ (iii) $\frac{6}{13} \quad \frac{7}{15}$

(iv) $\frac{3}{8} \quad \frac{7}{11}$ (v) $2\frac{1}{9} \quad 6$

3.

(i) $\frac{9}{2} \quad \frac{7}{4}$ (ii) $\frac{3}{10} \quad 9$ (iii) $\frac{6}{5} \quad \frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7} \quad \frac{2}{5}$ (v) $\frac{3}{11} \quad \frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{5} \quad \frac{5}{3}$

4.

(i) $(\quad 4) \quad \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{5} \quad 2$ (iii) $\frac{-4}{5}, (-3)$

(iv) $\frac{1}{8} \quad \frac{3}{4}$ (v) $\frac{2}{13} \quad \frac{1}{7}$ (vi) $\frac{7}{12} \quad \frac{2}{13}$

(vii) $\frac{3}{13} \quad \frac{4}{65}$

1. $\frac{p}{q}$ p q q 0

$\frac{2}{7}, \frac{3}{8}, 3$

2.

3.

$\frac{3}{7}$ $\frac{3}{7}\ \frac{2}{2}$ $\frac{6}{14}$

$\frac{6}{14}$ $\frac{3}{7}$

$\frac{6}{14}$ $\frac{6}{14}\ \frac{2}{2}$ $\frac{3}{7}$

4.

$\frac{3}{8}$ $\frac{8}{9}$

5.

6.

1 $\frac{1}{3}, \frac{2}{7},$

7.

8.

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{16}{24}$ $\frac{9}{24}$ $\frac{16\ \ 9}{24}$ $\frac{7}{24}$

3 8 24

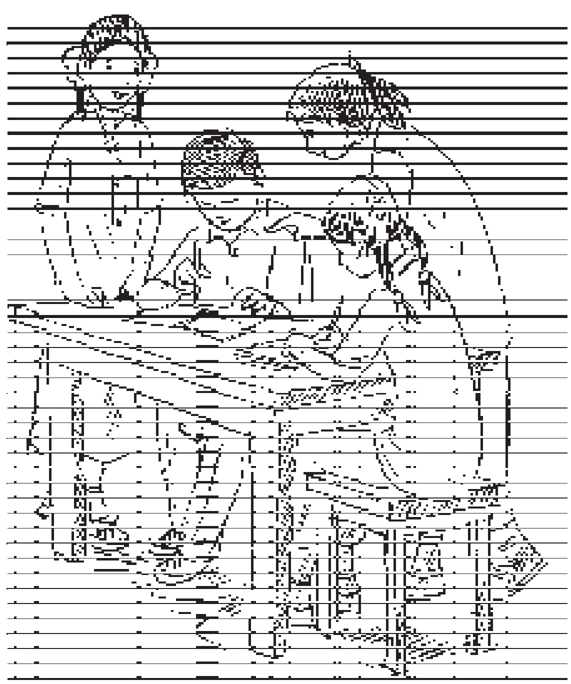
9.

$\frac{7}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{7}{8}\ \frac{2}{3}$ $= \frac{7}{8}\ \frac{(\ 2)}{3}\ \frac{21\ (\ 16)}{24}\ \frac{5}{24}$

10.

11.

$\frac{7}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{7}{2}\times(\frac{4}{3}\ \ )\ \ \frac{7}{2}\times\frac{3}{4}\ \ \frac{21}{8}$



प्रायोगिक ज्यामिति

अध्याय 10

10.1 भूमिका

आप अनेक प्रकार के आकारों से परिचित हैं। आप पिछली कक्षाओं में इनमें से कुछ आकारों की रचना करना सीख चुके हैं। उदाहरणत: अब आप एक दी हुई लंबाई का रेखाखंड, एक रेखाखंड पर एक लंब रेखा, एक कोण, कोण का समद्विभाजक, एक वृत्त, इत्यादि की रचना कर सकते हैं। अब आप समांतर रेखाएँ तथा कुछ प्रकार के त्रिभुजों को खींचना सीखेंगे।

10.2 एक दी हुई रेखा के समांतर उस बिंदु से होकर रेखा खींचना जो उस रेखा पर स्थित नहीं है

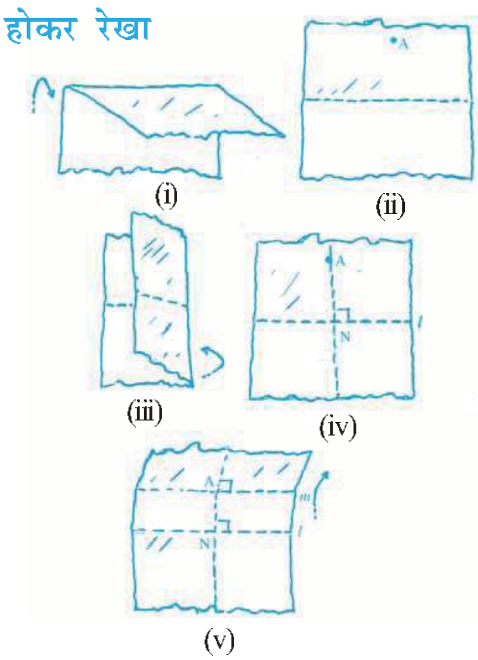
आइए एक क्रियाकलाप से प्रारंभ करें। (आकृति 10.1)

(i) एक कागज़ की शीट लीजिए और इसे मोड़कर एक निशान बनाइए। यह मोड़ का निशान एक रेखा l को निरूपित करता है।

(ii) कागज़ को खोल लीजिए। इस कागज़ पर l के बाहर एक बिंदु A अंकित कीजिए।

(iii) इस बिंदु A से होकर जाता हुआ और रेखा l पर लंब एक मोड़ का निशान बनाइए। इस लंब का नाम AN रखिए।

(iv) अब, बिंदु A से होकर इस लंब के लंबवत एक मोड़ का निशान बनाइए। इस नयी लंबवत रेखा का नाम m रखिए। अब, $l \parallel m$ है क्या आप देख सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

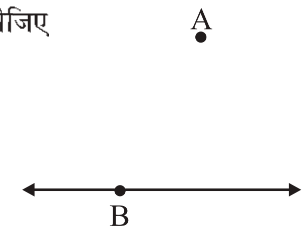


आकृति 10.1

यहाँ समांतर रेखाओं का कौन-सा गुण या कौन-से गुण यह कहने में सहायता कर सकता है या कर सकते हैं कि रेखाएँ l और m समांतर हैं?

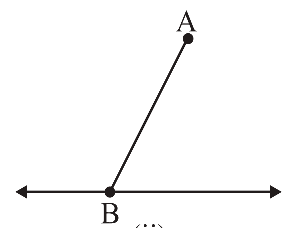
आप तिर्यक रेखा और समांतर रेखाओं से संबंधित गुणों में से किसी भी गुण का प्रयोग करके इस **रचना को केवल पैमाना (रूलर)** ***और परकार का प्रयोग करके*** **कर सकते हैं।**

चरण 1 एक रेखा 'l' और उसके बाहर स्थित कोई बिंदु 'A' लीजिए [आकृति10.2 (i)]।



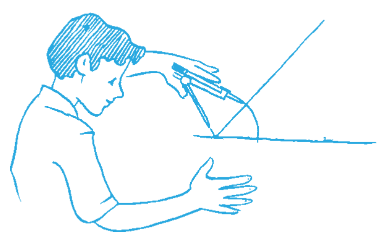
(i)

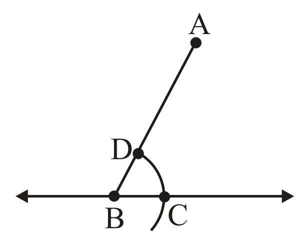
चरण 2 रेखा l और कोई बिंदु B लीजिए और A को B से मिलाइए [आकृति 10.2(ii)]।



(ii)

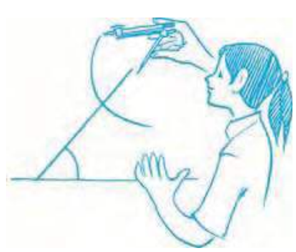
चरण 3 बिंदु B को केंद्र मान कर और कोई सुविधाजनक त्रिज्या लेकर, l को C पर और BA को D पर प्रतिच्छेद करता (काटता) हुआ एक चाप खींचिए [आकृति 10.2(iii)]।

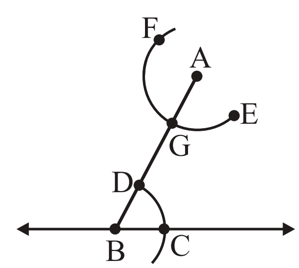




(iii)

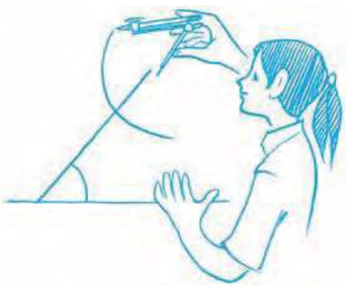
चरण 4 अब, A बिंदु को केंद्र मान कर और चरण 3 वाली ही त्रिज्या लेकर, AB को G पर काटता हुआ एक चाप EF खींचिए [आकृति 10.2 (iv)]।

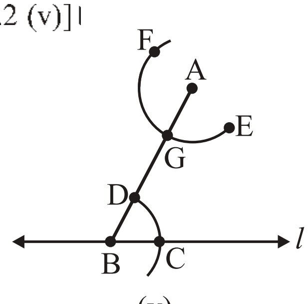




(iv)

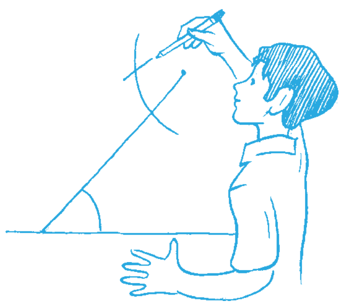
चरण 5 परकार के नुकीले सिरे को C पर रखिए और इसे खोल कर इस प्रकार समायोजित कीजिए कि पेंसिल की नोक D पर रहे [आकृति 10.2 (v)]।

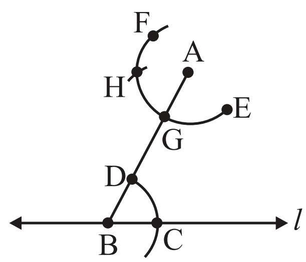




(v)

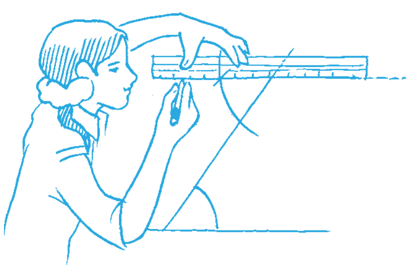
चरण 6 G को केंद्र मानकर और परकार का खुलाव (opening) चरण 5 वाला ही रखते हुए, एक चाप खींचिए जो चाप EF को H पर काटे [आकृति 10.2 (vi)] ।

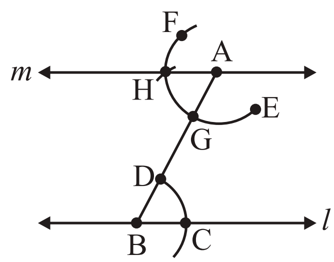




(vi)

चरण 7 अब AH को मिलाकर रेखा m खींचिए [आकृति 10.2 (vii)]।





(vii)

आकृति 10.2 (i)-(vii)

ध्यान दीजिए कि $\angle ABC$ और $\angle BAH$ एकांतर अंत:कोण हैं, जो परस्पर बराबर हैं। इसलिए $m \parallel l$ है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

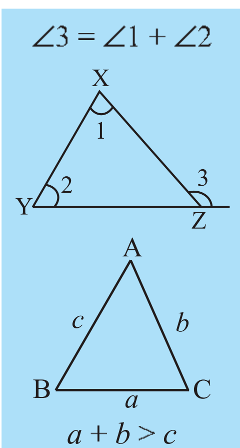
1. उपरोक्त रचना में, क्या आप A से होकर जाती हुई अन्य रेखा खींच सकते हैं जो l के समांतर हो?
2. क्या आप इस रचना में इस प्रकार का परिवर्तन कर सकते हैं कि बराबर एकांतर अंत:कोण बनाने के स्थान पर बराबर संगत कोण बनें?

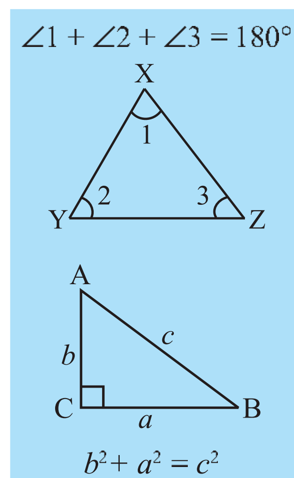
प्रश्नावली 10.1

1. एक रेखा, (मान लीजिए AB) खींचिए और इसके बाहर स्थित कोई बिंदु C लीजिए। केवल पैमाना (रूलर) और परकार का प्रयोग करते हुए, C से होकर AB के समांतर एक रेखा खींचिए।
2. एक रेखा l खींचिए और l पर स्थित किसी भी बिंदु पर l पर लंब खींचिए। इस लंब रेखा पर एक बिंदु X लीजिए जो l से 4 cm की दूरी पर हो। X से होकर l के समांतर एक रेखा m खींचिए।
3. मान लीजिए l एक रेखा है और P एक बिंदु है जो l पर स्थित नहीं है। P से होकर l के समांतर एक रेखा m खींचिए। अब P को l के किसी बिंदु Q से जोड़िए। m पर कोई अन्य बिंदु R चुनिए। R से होकर, PQ के समांतर एक रेखा खींचिए। मान लीजिए यह रेखा, रेखा l से बिंदु S पर मिलती है। समांतर रेखाओं के इन दोनों युग्मों से क्या आकृति बनती है?

10.3 त्रिभुजों की रचना

इस अनुच्छेद को पढ़ने से पहले, यह अच्छा होगा कि आप त्रिभुजों की अवधारणाओं, विशेष रूप से त्रिभुजों के गुणों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता वाले अध्यायों को याद करें।





आप भुजाओं और कोणों के आधारों पर त्रिभुजों को वर्गीकृत करना तथा त्रिभुजों से संबंधित निम्नलिखित महत्वपूर्ण गुणों के बारे में जानते हैं :

(i) एक त्रिभुज का बाह्यकोण उसके दोनों अभिमुख अंत:कोणों के योगफल के बराबर होता है।

(ii) त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योग 180° होता है।

(iii) त्रिभुज की किन्हीं भी दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है।

(iv) एक समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

'त्रिभुजों की सर्वांगसमता' वाले अध्याय में हमने देखा था कि एक त्रिभुज प्राप्त किया जा सकता है, यदि उसके निम्नलिखित माप समूहों में से कोई एक दिया हुआ है:

(i) तीन भुजाएँ

(ii) दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण

(iii) दो कोण और उनके बीच की भुजा

(iv) समकोण त्रिभुज के लिए, कर्ण और एक पाद (leg)

अब, हम इन अवधारणाओं का त्रिभुजों की रचनाओं में प्रयोग करेंगे।

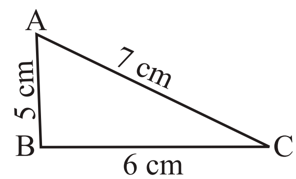
10.4 एक त्रिभुज की रचना जब उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ दी हों (SSS कसौटी)

इस अनुच्छेद में, हम त्रिभुजों की रचना करेंगे जब उसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हों। पहले हम इसकी एक रफ़ (rough) आकृति खींचते हैं, जिससे उसकी भुजाओं का कुछ अनुमान लग जाए और फिर तीनों भुजाओं में से एक भुजा लेकर रचना प्रारंभ करते हैं। निम्नलिखित उदाहरण को समझिए :

उदाहरण 1 एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जबकि AB = 5 cm, BC = 6 cm और AC = 7 cm दिया है।

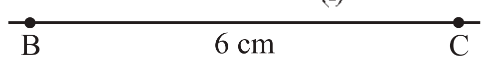
हल

चरण 1 पहले हम दी हुई मापों की एक रफ आकृति खींचते हैं (इससे हमें आगे बढ़ने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.3(i)]।



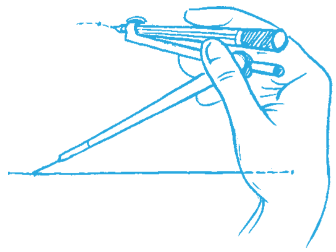
(i)

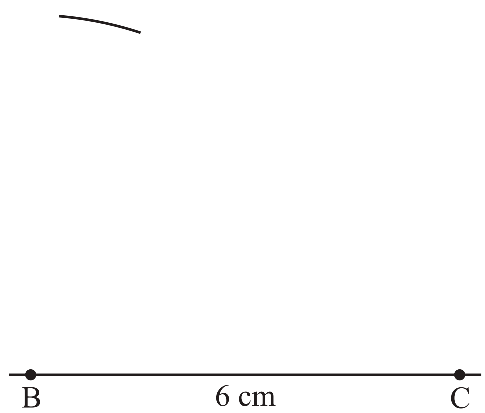
चरण 2 6 cm लंबाई का रेखा खंड BC खींचिए [आकृति 10.3(ii)]।



(ii)

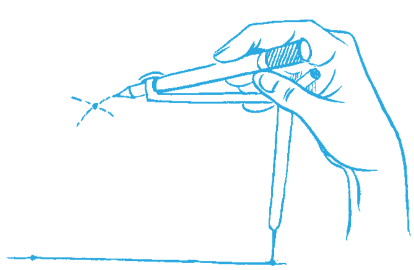
चरण 3 बिंदु B से, बिंदु A, 5 cm की दूरी पर है। अत:, B को केंद्र मान कर और 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (अब A इस चाप पर कहीं स्थित एक बिंदु है। यह ज्ञात करना हमारा काम है कि A बिल्कुल ठीक इस चाप पर कहाँ है) [आकृति 10.3(iii)]।

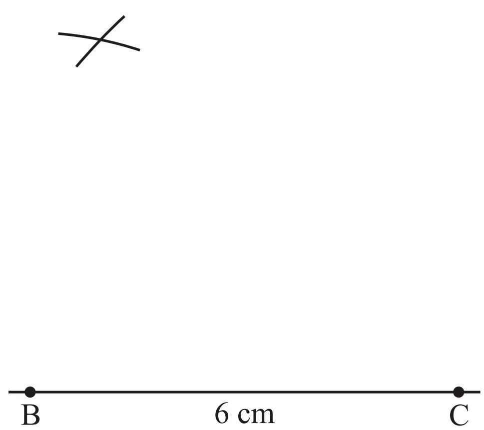




(iii)

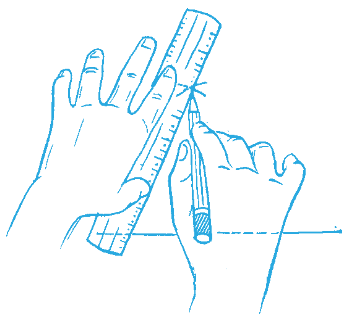
चरण 4 C से, बिंदु A, 7 cm की दूरी पर है। अत:, C को केंद्र मान कर और 7 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (A इस चाप पर कहीं स्थित होगा। हमें इसका पता लगाना है) [आकृति 10.3(iv)]।

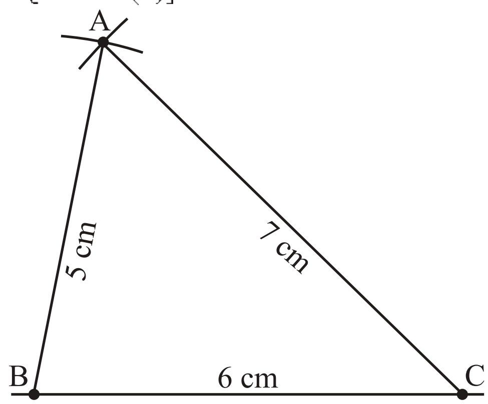




(iv)

चरण 5 A को खींचे गए इन दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अतः, यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिंदु है। इन चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को A से अंकित कीजिए। AB और AC को जोड़िए। अब ΔABC तैयार है [आकृति 10.3(v)]।

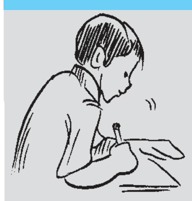




(v)

आकृति 10.3 (i) - (v)

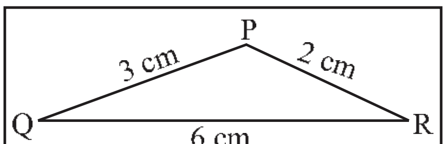
इन्हें कीजिए



आइए अब एक अन्य त्रिभुज DEF की रचना करें, जिसमें DE = 5 cm, EF = 6 cm और DF = 7 cm है। ΔDEF को काट कर उसे ΔABC पर रखिए।

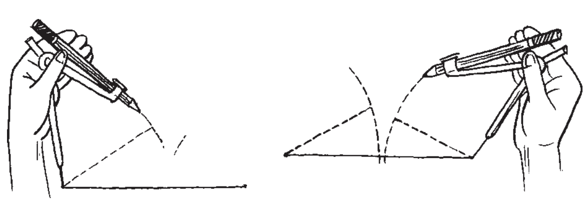
हम देखते हैं कि ΔDEF, ΔABC को पूर्णतया ढक लेता है, अर्थात् उसके साथ संपाती हो जाता है। (ध्यान दीजिए कि इन दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई तीन भुजाओं से की गई है।) इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत तीन भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SSS सर्वांगसमता नियम (या कसौटी) कहलाता है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



आकृति 10.4 : सोचिए, क्या यह सही है। सही है?

एक विद्यार्थी ने एक ऐसा त्रिभुज खींचने का प्रयत्न किया, जिसकी रफ़ आकृति यहाँ दी गई है। पहले उसने QR खींचा। फिर उसने Q को केंद्र मान कर और 3 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींची तथा R को केंद्र मान कर और 2 cm त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींची। परंतु वह P नहीं प्राप्त कर सका। इसका क्या कारण है? इस प्रश्न से संबंधित त्रिभुज के किस गुण को आप जानते हैं? क्या ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है? (त्रिभुजों के इस गुण को याद कीजिए: किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से बड़ा होता है)।



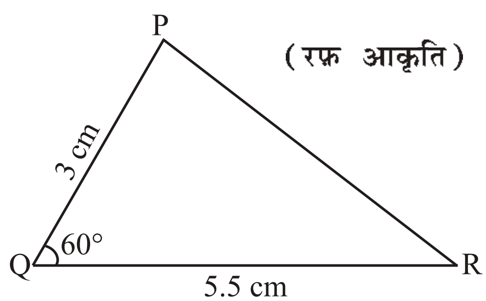
प्रश्नावली 10.2

1. ΔXYZ की रचना कीजिए, जिसमें $XY = 4.5$ cm, $YZ = 5$ cm और $ZX = 6$ cm है।
2. 5.5 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
3. ΔPQR की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 4$ cm, $QR = 3.5$ cm और $PR = 4$ cm है। यह किस प्रकार का त्रिभुज है?
4. ABC की रचना कीजिए, ताकि $AB = 2.5$ cm, $BC = 6$ cm और $AC = 6.5$ cm हो। $\angle B$ को मापिए।

10.5 एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके बीच के कोण की माप दी हो (SAS कसौटी)

यहाँ, हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। पहले हम एक रफ़ आकृति खींचते हैं और फिर दिए हुए रेखाखंडों में से एक रेखाखंड खींचते हैं। इसके बाद अन्य चरणों का अनुसरण किया जाता है। उदाहरण 2 देखिए।

उदाहरण 2 एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि $PQ = 3$ cm, $QR = 5.5$ cm और $\angle PQR = 60°$ है।



(i)

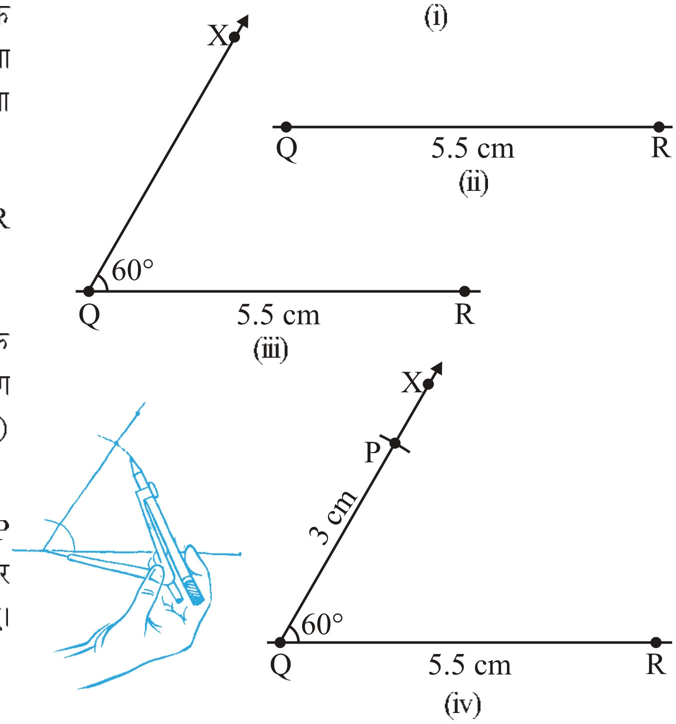
हल

चरण 1 पहले हम दी हुई मापों के अनुसार, एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे हमें रचना की प्रक्रिया निर्धारित करने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.5(i)]।

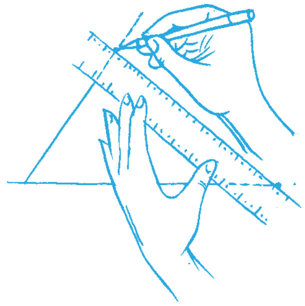
चरण 2 5.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड QR खींचिए [आकृति 10.5(ii)]।

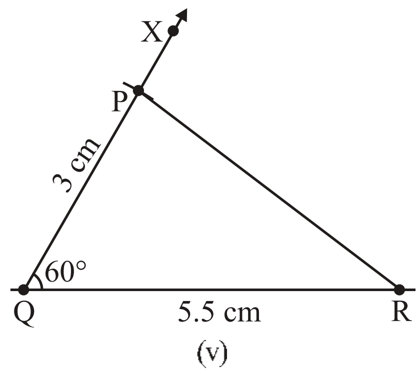
चरण 3 Q पर किरण QX खींचिए, जो QR के साथ 60° का कोण बनाए। (बिंदु P कोण की इसी किरण पर कहीं स्थित होगा) [आकृति 10.5(iii)]।

चरण 4 (P को निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है।) Q को केंद्र मान कर 3 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचिए। यह QX को बिंदु P पर काटता है। [आकृति 10.5(iv)]।



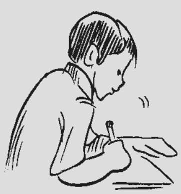
चरण 5 PR को जोड़िए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त हो जाता है [आकृति 10.5 (v)]।





आकृति 10.5 (i)-(v)

इन्हें कीजिए



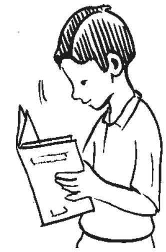
आईए अब एक अन्य त्रिभुज ABC की रचना करें ताकि AB = 3 cm, BC = 6.5 cm और $\angle ABC = 60°$ हो। इस ΔABC को काट कर ΔPQR पर रखिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि ΔABC पूर्णतया ΔPQR के साथ संपाती हो जाता है, अर्थात् उसे ढक लेता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके मध्य स्थित (बीच का) कोण एक अन्य त्रिभुज की संगत भुजाओं और उनके मध्य स्थित कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SAS सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई दो भुजाओं और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण द्वारा की गई है।)

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त रचना में, दो भुजाओं की लंबाइयाँ और एक कोण का माप दिया हुआ था। अब, निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

एक ΔABC में, यदि AB = 3 cm, AC = 5 cm और $\angle C = 30°$ है, तो क्या हम इस त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? हम AC = 5 cm खींच कर, $\angle C = 30°$ खींच सकते हैं। $\angle C$ की एक भुजा CA है। बिंदु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए। परंतु, ध्यान दीजिए कि बिंदु B को एक अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अत:, त्रिभुज ABC की रचना करने के लिए, दिए हुए आँकड़े पर्याप्त नहीं हैं।

अब ΔABC की रचना करने का प्रयत्न कीजिए, जब AB = 3 cm, AC = 5 cm और $\angle B = 30°$ है। हम क्या प्रेक्षित करते हैं? पुन:, ΔABC की रचना अद्वितीय रूप से नहीं की जा सकती है। इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है जब उसकी दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण का माप दिया हुआ हो।



प्रश्नावली 10.3

1. ΔDEF की रचना कीजिए, ताकि $DE = 5$ cm, $DF = 3$ cm और $m\angle EDF = 90°$ हो।
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक समान भुजा की लंबाई 6.5 cm हो और उनके बीच का कोण 110° का हो।
3. $BC = 7.5$ cm और $AC = 5$ cm और $m\angle C = 60°$ वाले ΔABC की रचना कीजिए।

10.6 एक त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोणों के माप और इन कोणों के बीच की भुजा की लंबाई दी हो (ASA कसौटी)

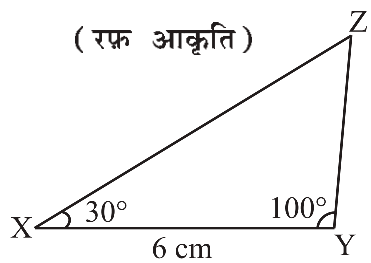
जैसा पहले किया था, एक रफ़ आकृति खींचिए। अब, दिया हुआ रेखाखंड खींचिए। दोनों अंत बिंदुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण 3 देखिए।

उदाहरण 3 ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि, $XY = 6$ cm, $m\angle ZXY = 30°$ और $m\angle XYZ = 100°$ है।

हल

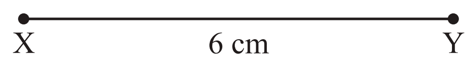
चरण 1 वास्तविक रचना से पहले, हम इस पर अंकित मापों के अनुसार एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे कुछ अनुमान लग जाता है कि कैसे रचना की जाए) [आकृति 10.6(i)]।

(रफ़ आकृति)



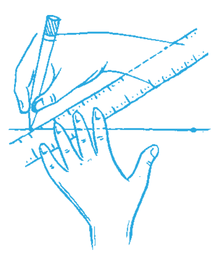
(i)

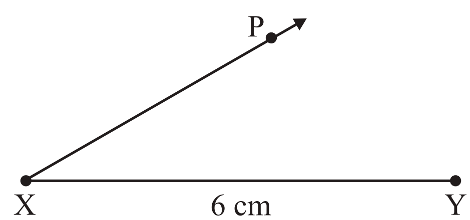
चरण 2 6 cm लंबाई का रेखाखंड XY खींचिए [आकृति 10.6(ii)]।



(ii)

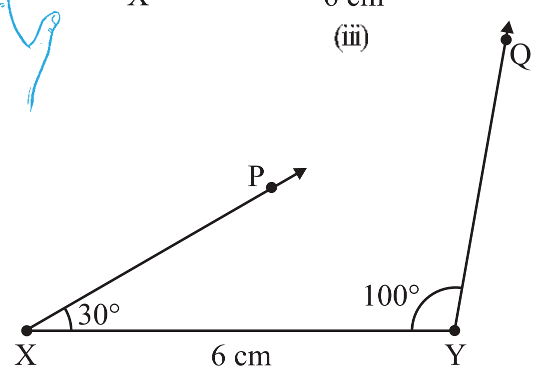
चरण 3 X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार बिंदु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iii)]।





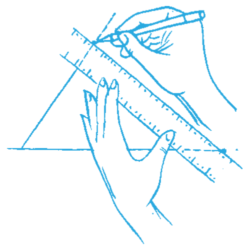
(iii)

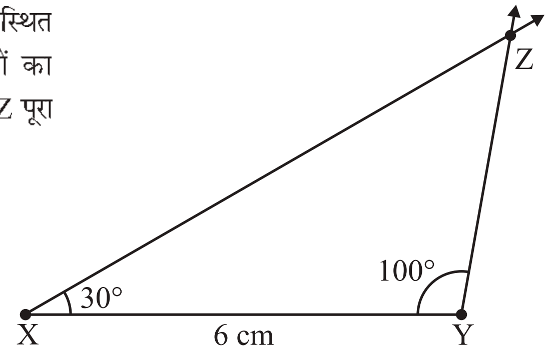
चरण 4 Y पर एक किरण YQ खींचिए, जो YX से 100° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iv)]।



(iv)

चरण 5 Z को दोनों किरणों XP और YQ पर स्थित होना चाहिए। अत:, इन दोनों किरणों का प्रतिच्छेद बिंदु ही Z है। अब ΔXYZ पूरा बन जाता है [आकृति 10.6(v)]।





(v)

आकृति 10.6 (i) - (v)

इन्हें कीजिए

अब एक अन्य त्रिभुज LMN खींचिए, जिसमें $m\angle NLM = 30°$, $LM = 6$ cm और $m\angle NML = 100°$ हो। इस त्रिभुज LMN को काटकर त्रिभुज XYZ पर रखिए। हम देखते हैं कि त्रिभुज LMN त्रिभुज XYZ के साथ पूर्णतया संपाती हो जाता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और उनके मध्य स्थित भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह ASA सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि यहाँ दो त्रिभुजों की रचना की गई है, जब दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दी गई है।)

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरण में, एक भुजा की लंबाई और दो कोणों के माप दिए गए थे। अब निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

ΔABC, में, यदि $AC = 7$ cm, $m\angle A = 60°$ और $m\angle B = 50°$ है, तो क्या आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? (त्रिभुज का कोण योग गुण आपकी सहायता कर सकता है!)

प्रश्नावली 10.4

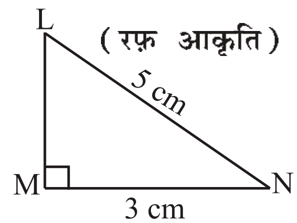
1. ΔABC, की रचना कीजिए, जब $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 30°$ और $AB = 5.8$ cm दिया है।
2. ΔPQR की रचना कीजिए, यदि $PQ = 5$ cm, $m\angle PQR = 105°$ और $m\angle QRP = 40°$ दिया है।

   (संकेत : त्रिभुज के कोण योग गुण को याद कीजिए)।
3. जाँच कीजिए कि आप ΔDEF की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि $EF = 7.2$ cm, $m\angle E = 110°$ और $m\angle F = 80°$ है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10.7 एक समकोण त्रिभुज की रचना, जब उसके एक पाद (भुजा) और कर्ण की लंबाईयाँ दी हुई हों। (RHS कसौटी)

यहाँ, रफ़ आकृति बनाना सरल है। अब दी हुई भुजा के अनुसार, एक रेखाखंड खींचिए। इसके एक अंत्य बिंदु पर एक समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लंबाइयों की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए :

उदाहरण 4 ΔLMN की रचना कीजिए, जिसका $\angle LMN$ समकोण है तथा दिया है कि $LN = 5$ cm और $MN = 3$ cm ।

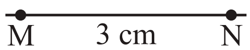


(i)

हल

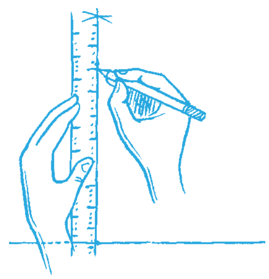
चरण 1 एक रफ़ आकृति खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अंकित कीजिए। समकोण अंकित करना याद रखिए (आकृति 10.7(i))।

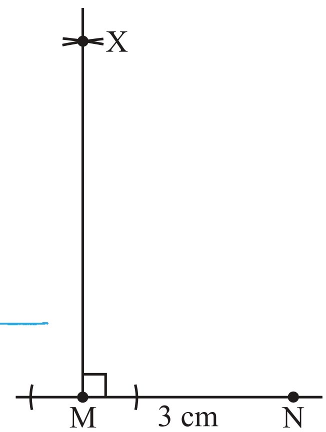
चरण 2 3 cm लंबाई का रेखाखंड MN खींचिए। [आकृति 10.7(ii)]



(ii)

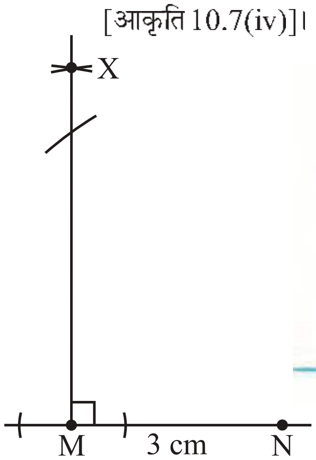
चरण 3 M पर $MX \perp MN$ खींचिए। (L इसी लंब पर कहीं स्थित होना चाहिए) [आकृति 10.7(iii)]।



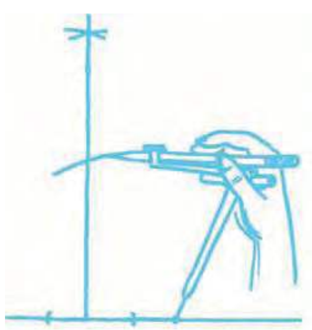


(iii)

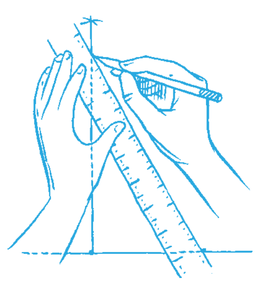
चरण 4 N को केंद्र मानकर, 5 cm त्रिज्या का एक चाप खींचिए।(L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए, क्योंकि यह N से 5 cm की दूरी पर है) [आकृति 10.7(iv)]।

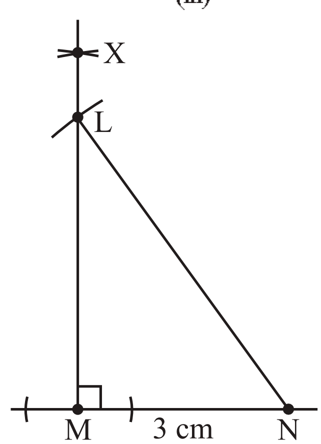


(iv)



चरण 5 L को लंब रेखा MX पर और केंद्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अत:, L इन दोनों का प्रतिच्छेद बिंदु होगा। LN को जोड़िए। अब ΔLMN प्राप्त हो जाता है। [आकृति 10.7(v)]।





आकृति 10.7 (i)-(v) (v)

प्रश्नावली 10.5

1. समकोण ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle Q = 90°$, $QR = 8$ cm और $PR = 10$ cm है।
2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 6 cm लंबा है और एक पाद 4 cm लंबा है।
3. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle ACB = 90°$ है और $AC = 6$ cm है।

विविध प्रश्न

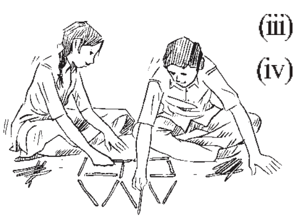
नीचे कुछ त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों के माप दिए गए हैं। इनमें से उनकी पहचान कीजिए, जिनकी रचना नहीं की जा सकती तथा यह भी बताइए कि आप इनकी रचना क्यों नहीं कर सकते। शेष त्रिभुजों की रचना कीजिए।

त्रिभुज	दिए हुए माप		
1. ΔABC	$m\angle A = 85°$,	$m\angle B = 115°$,	$AB = 5$ cm
2. ΔPQR	$m\angle Q = 30°$,	$m\angle R = 60°$,	$QR = 4.7$ cm
3. ΔABC	$m\angle A = 70°$,	$m\angle B = 50°$,	$AC = 3$ cm
4. ΔLMN	$m\angle L = 60°$,	$m\angle N = 120°$]	$LM = 5$ cm
5. ΔABC	$BC = 2$ cm,	$AB = 4$ cm,	$AC = 2$ cm
6. ΔPQR	$PQ = 3.5$ cm,	$QR = 4$ cm,	$PR = 3.5$ cm
7. ΔXYZ	$XY = 3$ cm,	$YZ = 4$ cm,	$XZ = 5$ cm
8. ΔDEF	$DE = 4.5$ cm,	$EF = 5.5$ cm,	$DF = 4$ cm

हमने क्या चर्चा की?

इस अध्याय में हमने पैमाना (रूलर) और परकार की कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है।

1. एक दी हुई रेखा और ऐसे बिंदु के लिए जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, हमने तिर्यक छेदी रेखा आकृति में, रेखा के समांतर एक रेखा खींचने के लिए समान एकांतर कोणों की अवधारणा का उपयोग किया है।
   इस रचना के लिए हम समान संगत कोणों की अवधारणा का उपयोग भी कर सकते हैं।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है।
   इस अध्याय में निम्नलिखित उदाहरणों की चर्चा की गई है।
   (i) SSS: त्रिभुज की तीन भुजाओं की लंबाई दी हुई है।
   (ii) SAS: किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई और इन भुजाओं के मध्य स्थित कोण का माप दिया हुआ है।
   (iii) AAS: दो कोणों के माप और इनके मध्य स्थित भुजा की लंबाई दी हुई है।
   (iv) RHS: समकोण त्रिभुज के कर्ण एवं एक पाद की लंबाई दी हुई है।



11

11.1

VI

11.2

60 cm 20 cm

40 cm 35 cm

3.00 cm

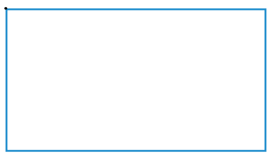
2.00 cm^2

1.

2.

3.

4.



11.1

= ×

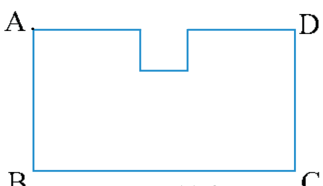
= 4 ×

= 2 × (l + b)

= l × b

= ×

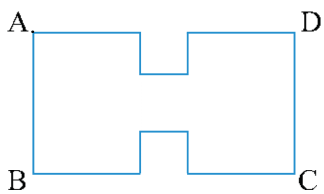
(collage) 4 cm 28 cm 21 cm 11.1 4 cm



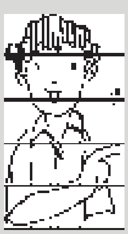
11.2

AD

(11.3)



11.3

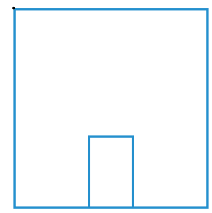


1.

2.

3.

1 10 m × 10 m 3 m × 2 m 1 m² 2.50



$= l \times b$

$= 3 \times 2\ m^2 = 6\ m^2$

$= \times = 10\ m \times 10\ m = 100\ m^2$

$= (100 - 6)\ m^2 = 94\ m^2$

$= 2.50 \times 94 = 235$

2 500 cm^2 11.4

25 cm

$= 500\ cm^2$

$(l) = 25\ cm$

$= l \times b$ ($b =$)

$b = \dfrac{}{l} = \dfrac{500}{25} = 20\ cm$

$= 2 \times (l + b) = 2 \times (25 + 20)\ cm = 90\ cm$

20 cm 90 cm

3

(11.5)

20 m

12 m 150

11.5

20 m + 12 m + 12 m 44 m

$= 150 \times 44 = 6600$

4 10 cm

12 cm

$= 10\ cm$

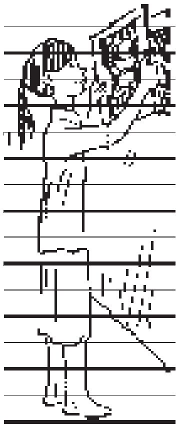
$= = 4 \times = 4 \times 10\ cm$

$= 40\ cm$

$l = 12\ cm$, b

$= = 40\ cm$

$= 2\ (l + b)$



$$40 = 2\,(12 + b)$$

$$\frac{40}{2} = 12 + b$$

$$b = 20 \quad 12 = 8 \text{ cm}$$

8 cm

$$= (\ )^2$$
$$= 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$
$$= l \times b$$
$$= 12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^2$$

5

40 cm 25 cm

$$= (\ )^2$$
$$= 40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 1600 \text{ cm}^2$$

$$= 1600 \text{ cm}^2$$
$$= 25 \text{ cm}$$
$$= l \times b$$
$$1600 = l \times 25$$
$$\frac{1600}{25} = l$$
$$l = 64 \text{ cm}$$

64 cm

$$= 2\,(l + b) = 2\,(64 + 25) \text{ cm}$$
$$= 2 \times 89 \text{ cm} = 178 \text{ cm}$$

178 cm

11. 1

1. 500 m 300 m
   (i) (ii) 1 m^2 10,000
2. 320 m
3. 440 m^2 22 m

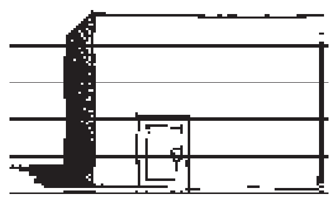
4. 100 cm 35 cm

5. 60 m 90 m

6. 40 cm 22 cm

7. 130 cm 30 cm

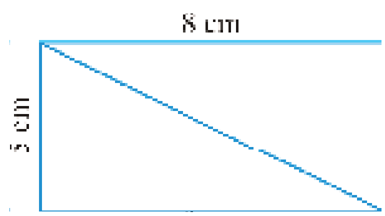
8. 2 m 1 m 4.5 m 3.6 m (11.6). 20 m² (white wash)



11.6

11.2.1

8 5 (11.7)

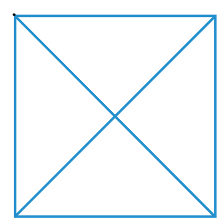


11.7

$$= \frac{1}{2}(\quad)$$

$$= \frac{1}{2}\ (l \quad b) = \frac{1}{2}(8 \quad 5)$$

$$= \frac{40}{2} \quad 20\ \text{cm}^2$$



11.8

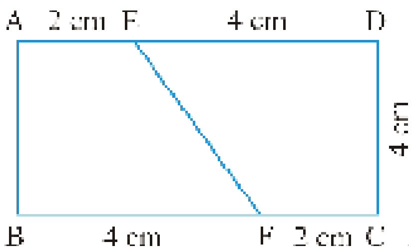
5 cm 4 (11.8)

$$= \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\ {}^2 = \frac{1}{4}\ (5)^2\ \text{cm}^2 = 6.25\ \text{cm}^2$$

11.2.2 [illegible]

6 cm [illegible] 4 cm [illegible] 11.9 [illegible] EF [illegible]



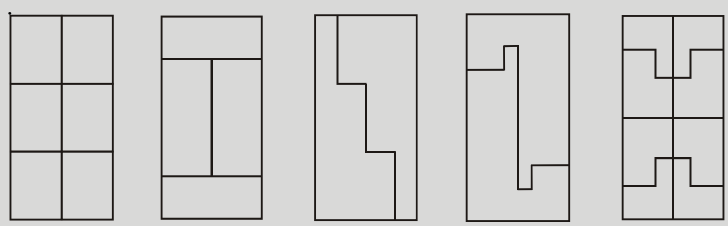
[illegible] 11.9

[illegible] $= \frac{1}{2}$ ([illegible])

$= \frac{1}{2} \quad 6 \quad 4 \quad \text{cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$

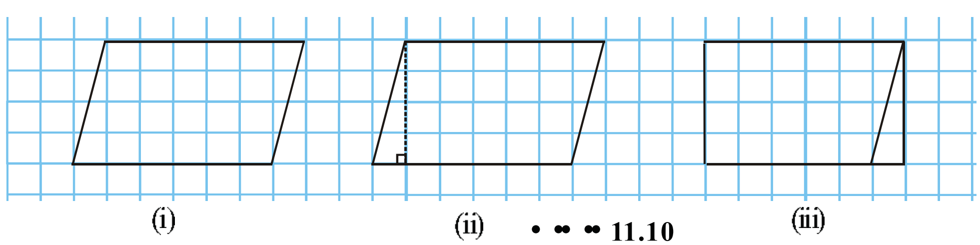
[illegible]

[illegible] 6 cm [illegible] 4 cm [illegible]



11.3 [illegible]

[illegible] [11.10(i)] [illegible] [11.10(ii)] [illegible] [11.10(iii)]



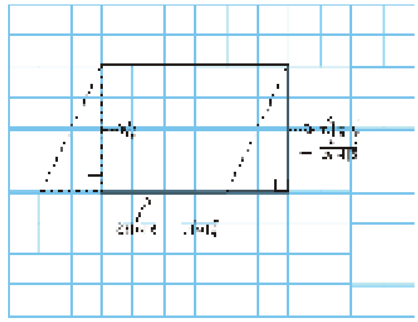
[illegible] 11.10

(11.11)

$= l \times b$

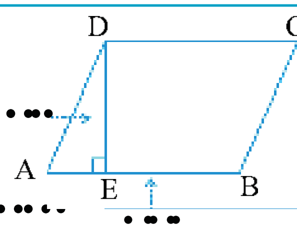
b h

$= b \times h$

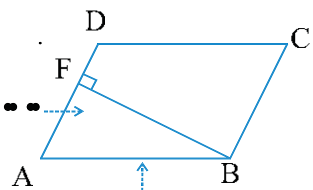


11.11

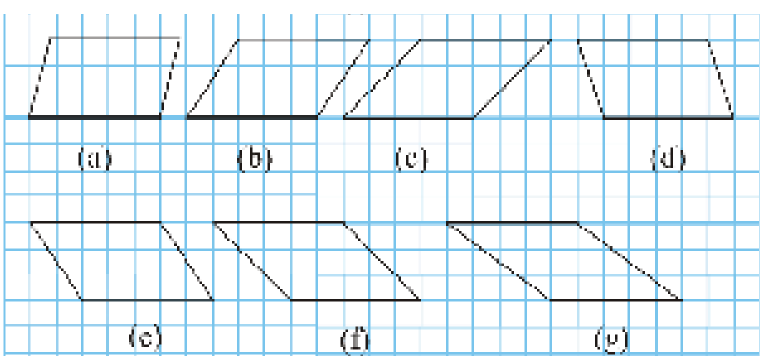
ABCD DE, AB AB DE



ABCD BF, AD AD BF



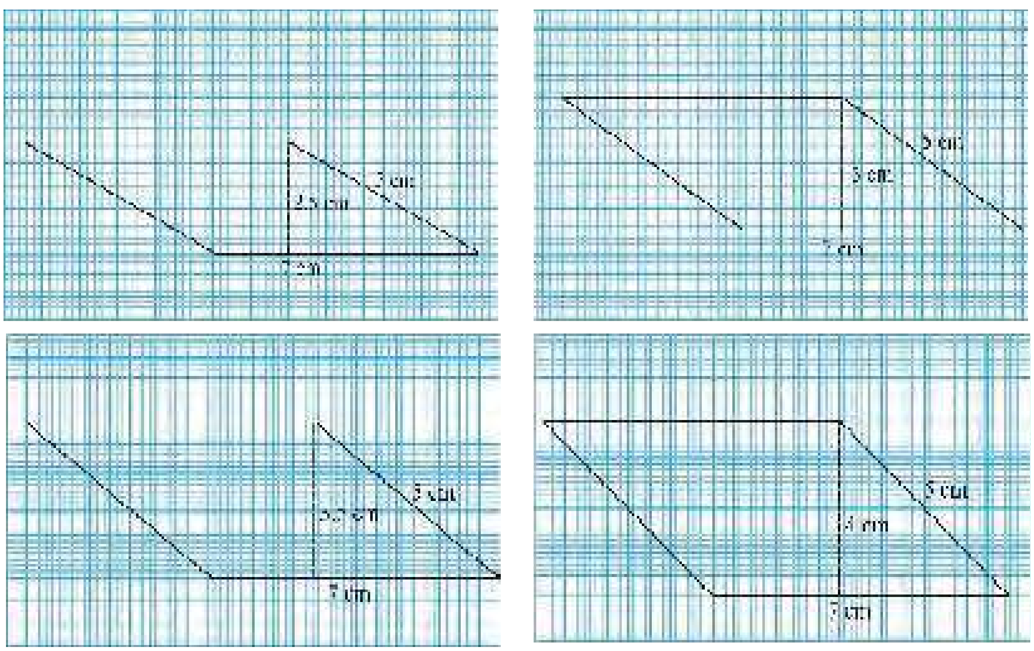
(11.12)



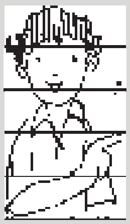
11.12

(a)	5	3	5 × 3 = 15	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

7 cm 5 cm (11.13)



11.13

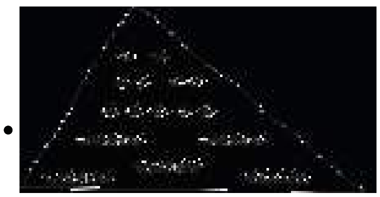


(i)

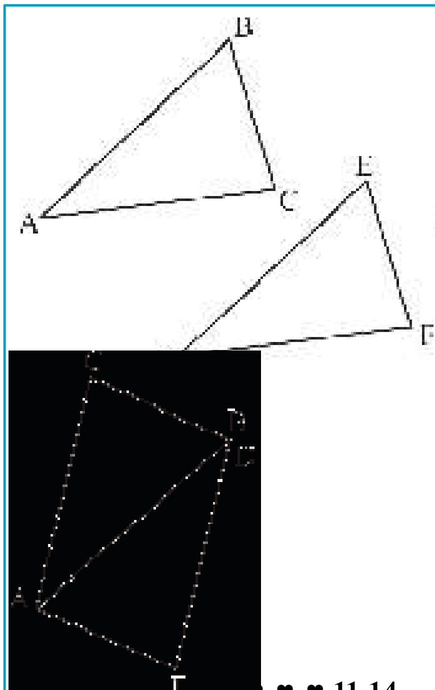
(ii)

(iii) ABCD AB = 7.2 cm C AB 4.5 cm

11.4



11.14

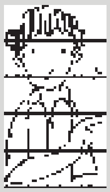


11.14

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(\ \times\ )(\ =\ \times\ )$

$= \frac{1}{2}(b \quad h) \quad (\ \frac{1}{2}bh,\ )$

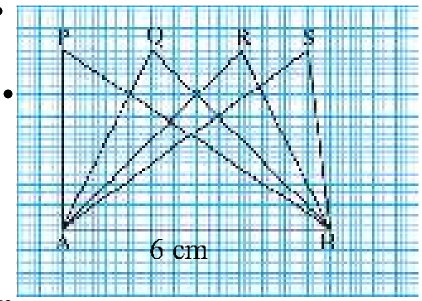


1.

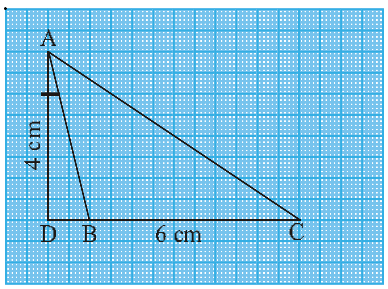
2.

(11.15) AB = 6 cm

AB



11 .15



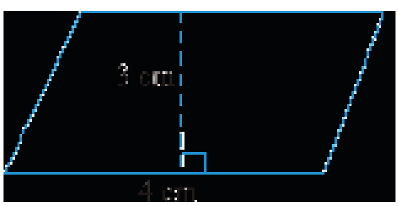
11 .16

6 cm (obtuse angled triangle) ABC (11.16)

AD A DC

6

4 cm 3 cm (11.17)



11.17

$(b) = 4$ cm $(h) = 3$ cm

$= b \times h = 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$

7

11.18 24 cm 4 cm 'x'

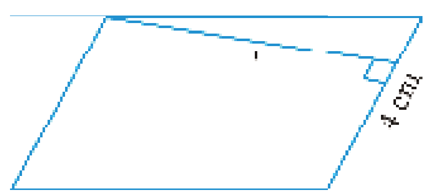
$= b \times h$

$24 = 4 \times x$

$\frac{24}{4} = x$

$x = 6$ cm

6 cm



11.18

8 ABCD 6 cm 4 cm
CD 3 cm (11.19)

(i) (ii) AD

(i) $= b \times h$

$= 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$

(ii) $(b) = 4$ cm

$= x$ ( )

$= 18 \text{ cm}^2$

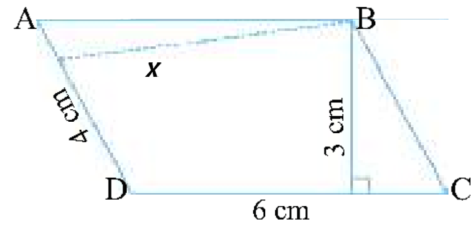
$= b \times x$

$18 = 4 \times x$

$\frac{18}{4} = x$

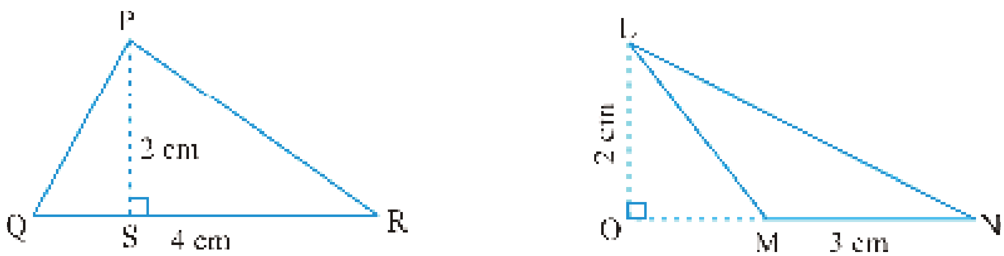
$x = 4.5$ cm

AD 4.5 cm



11.19

9 (11.20) :



(i) **11.20** (ii)

(i) $= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times QR \times PS$

$= \frac{1}{2}(4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}) = 4 \text{ cm}^2$

(ii) $= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times MN \times LO$

$= \frac{1}{2}(3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}) = 3 \text{ cm}^2$

10 BC ABC 36 cm^2 AD
3 cm (11.21) :

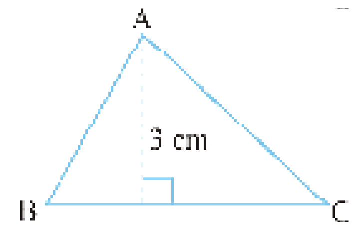
3 cm $= 36\text{ cm}^2$

ABC $= \frac{1}{2}bh$

$36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$

$b = \frac{36 \times 2}{3} = 24\text{ cm}$

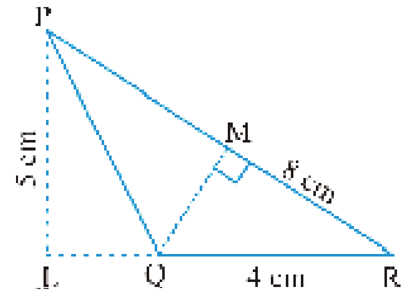
BC = 24 cm



11.21

11 PQR PR = 8 cm QR = 4 cm PL = 5 cm (11.22)

(i) PQR (ii) QM



11.22

(i) $= 4\text{ cm}$ $= 5\text{ cm}$

$= \frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2} \times 4\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 10\text{ cm}^2$

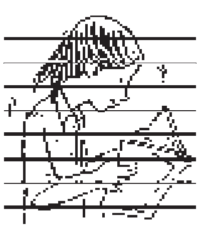
(ii) $= 8\text{ cm}$ $= ?$, $= 10\text{ cm}^2$

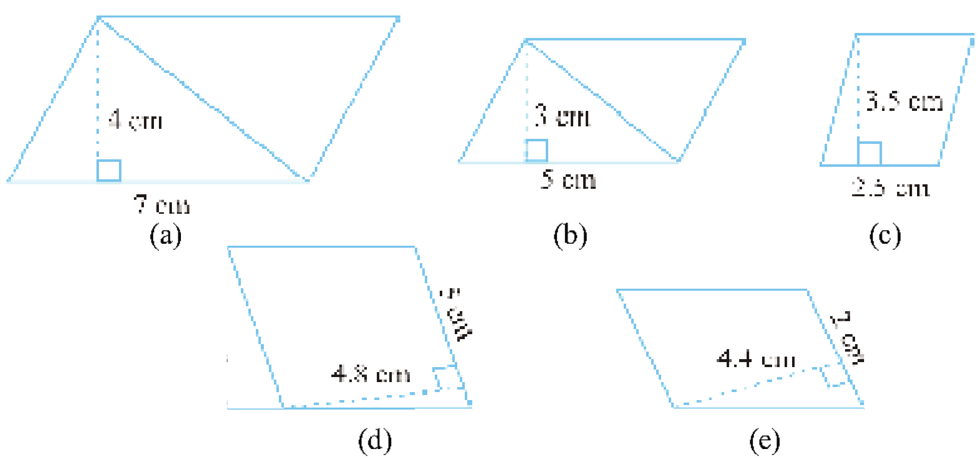
$= \frac{1}{2} \times b \times h$ $10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$

$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$ QM $= 2.5\text{ cm}$

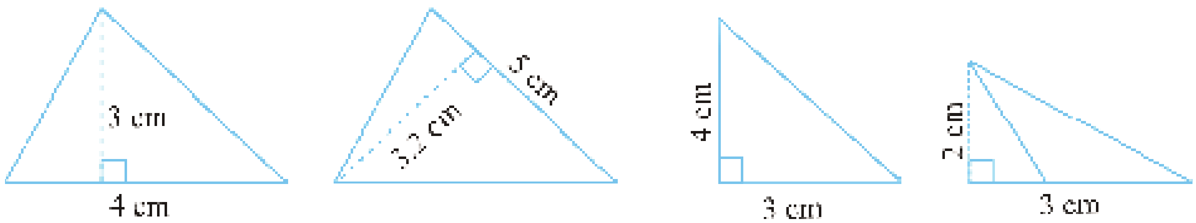
11.2

1.





2. [illegible]



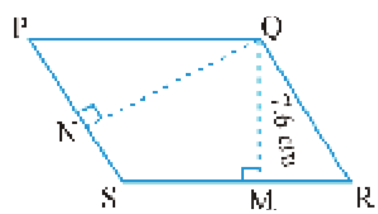
(a) (b) (c) (d)

3. [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
a.	20 cm		246 cm^2
b.		15 cm	154.5 cm^2
c.		8.4 cm	48.72 cm^2
d.	15.6 cm		16.38 cm^2

4. [illegible]

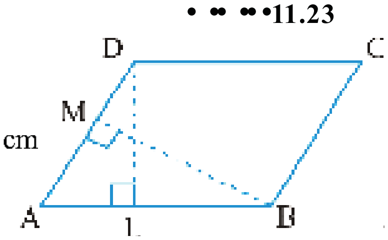
[illegible]	[illegible]	[illegible]
15 cm	______	87 cm^2
______	31.4 mm	1256 mm^2
22 cm	______	170.5 cm^2



[illegible] **11.23**

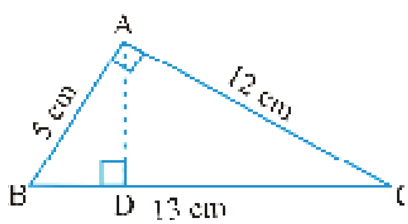
5. PQRS [illegible] 11.23 [illegible] QM [illegible] Q [illegible] SR [illegible] QN [illegible] Q [illegible] PS [illegible] SR = 12 cm [illegible] QM = 7.6 cm [illegible]

(a) [illegible] PQRS [illegible] (b) QN, [illegible] PS = 8 cm



[illegible] **11.24**

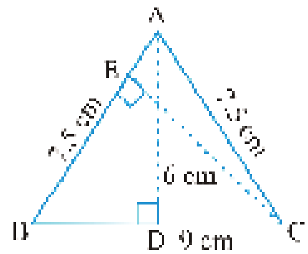
6. DL [illegible] BM [illegible] ABCD [illegible] AB [illegible] AD [illegible] 11.24 [illegible] 1470 cm^2 [illegible] AB = 35 cm [illegible] AD = 49 cm [illegible] BM [illegible] DL [illegible]



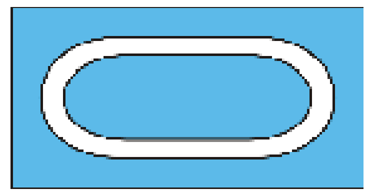
[illegible] **11.25**

7. [illegible] ABC, A [illegible] ([illegible] 11.25) [illegible] AD [illegible] BC [illegible] AB = 5 cm [illegible] BC = 13 cm [illegible] AC = 12 cm [illegible] ABC [illegible] AD [illegible]

8. ABC •••••••••• •••• •••AB = AC = 7.5 cm•• ••BC = 9 cm ••(• •• •• 11.26)•A ••BC •• •• •• • ••AD, 6 cm••• ABC • •••••• ••••• •• •••C •• AB •• •• •• • ••• •••CE •••••



• •• •• **11.26**



• •• •• **11.27**

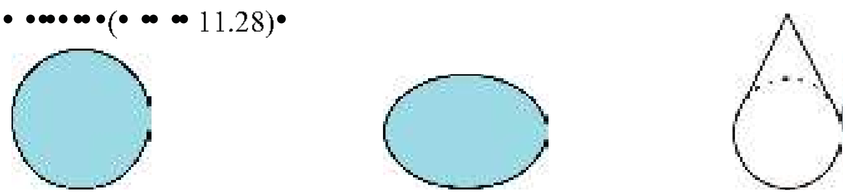
11.5 •••

•• ••••••••• •••••••• •••••••• ••••• ••••(• •• •• 11.27)•

•••• •••• ••• ••••••••• ••••••••••• ••• ••••••••••••••••••••••••••• •••• •• •••••••••••• •• ••••••• •••••••••••••••••• •••• •••• •••••••• •••• • •• •••••••••• •••• •• ••••• ••••••••

11.5.1 • •••• •••••

•••••••••••••••• •• •••••• •••• • •••• •• ••••••••••••••• •• ••• •••• •• •••••••• ••• •••• •••• ••••• ••••••••••• •••• ••••••• •••• ••• •••• • • ••••• •••••(• •• •• 11.28)•



(a) (b) (c)

• •• •• **11.28**

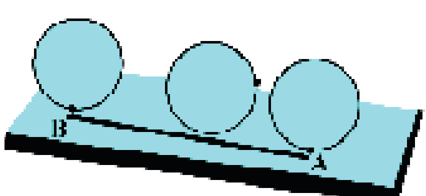
• ••••• •••••••• • •••• ••••••••• ••• (curve)• • •••••••••• ••••••• •••• • •• ••••••••••••••••• •••••• •••

• •• •• 11. 28(a) •••••••• •• •••• ••• •• •••• •• ••••• •• ••••••••• ••••••• • ••• •••• •••• •••••• •••••••• •••• •••••••• ••••• •• ••• •• ••• •••••

• •• •• **11.29**

•• •••• •••••••••••• ••••••• •••• ••••••• •• ••• •• • (• •• ••11.29)•

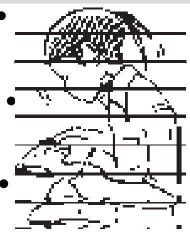
• •••••• •••• •• •• •••• •• •• ••• •••• •••••••••• •••••• •• ••• •••• •••• •• •• •••••••• •• •••••••••••• ••• •• •••••• •••••• ••• •••••• •• ••••••••• •• ••• •• •••• • • ••••••••• •• •• •• •• •••• •••••••••• •• •• •• ••• •••• •••••••••• •• ••••••



• •• •• **11.30**

6

1.	3.5 cm	7.0 cm	22.0 cm	$\frac{22}{7}$ 3.14
2.	7.0 cm	14.0 cm	44.0 cm	$\frac{44}{14}$ 3.14
3.	10.5 cm	21.0 cm	66.0 cm	$\frac{66}{21}$ 3.14
4.	21.0 cm	42.0 cm	132.0 cm	$\frac{132}{42}$ 3.14
5.	5.0 cm	10.0 cm	32.0 cm	$\frac{32}{10}$ 3.2
6.	15.0 cm	30.0 cm	94.0 cm	$\frac{94}{30}$ 3.13



‘ ’ (*pi*) $\frac{22}{7}$

3.14

$\frac{C}{d}$, ‘C’ ‘*d*’

C = *d*

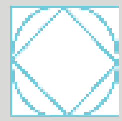
(d), (r) $d = 2r$

$C = \pi d = \pi \times 2r$ $C = 2\pi r$

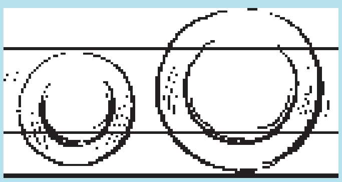
11.31

(a)

(b)



11.31



12 10 cm

$(\pi = 3.14)$

$(d) = 10$ cm

$= \pi d$

$= 3.14 \times 10$ cm $= 31.4$ cm

10 cm 31.4 cm

13 (disc) 14 cm

$\pi = \frac{22}{7}$

(disc) $(r) = 14$ cm

$= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ cm $= 88$ cm

88 cm

14 10 cm

$(\pi = 3.14)$

$(r) = 10$ cm

[illegible]

[illegible] $= 2\pi r$

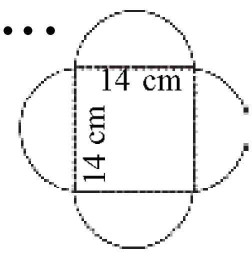
$= 2 \times 3.14 \times 10$ cm $= 62.8$ cm

[illegible] 62.8 cm [illegible]

[illegible] **15** [illegible] ([illegible] 11.32)

($\pi = \frac{22}{7}$ [illegible])

[illegible] [illegible] 14 cm [illegible]



[illegible] **11.32**

[illegible] $= \pi d$

[illegible] $= \frac{1}{2}\pi d$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14$ cm $= 22$ cm

[illegible] 22 cm [illegible] $= 4 \times 22$ cm $= 88$ cm

[illegible] **16** [illegible] 7 cm [illegible] (disc) [illegible]

([illegible] $\pi = \frac{22}{7}$)

[illegible] (disc) [illegible] ([illegible] 11.33), [illegible]

(i) [illegible] (ii) [illegible]

[illegible] (r) = 7 cm

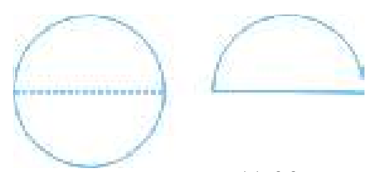
[illegible] $= 2\pi r$

[illegible] $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 7$ cm $= 22$ cm

[illegible] $= 2r = 2 \times 7$ cm $= 14$ cm

[illegible] (disc) [illegible] $= 22$ cm $+ 14$ cm $= 36$ cm

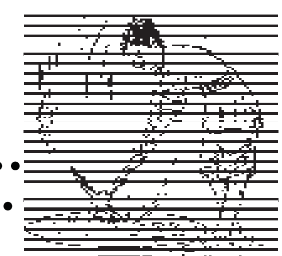


[illegible] **11.33**

11.5.2 [illegible]

[illegible]

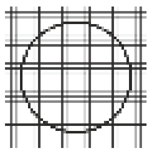
- [illegible] 7 m [illegible] 1 m^2 [illegible] 1 kg [illegible]



- 10 [illegible] m² [illegible] 2 m [illegible]

[illegible]

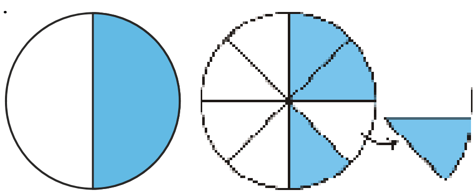
4 cm [illegible] 11.34 [illegible]



[illegible] 11.34

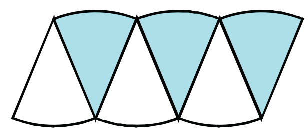
[illegible] (rough) [illegible]

[illegible] [[illegible] 11.35(i)] [illegible] ([illegible] 11.35(ii))



(i) (ii)

[illegible] 11.35

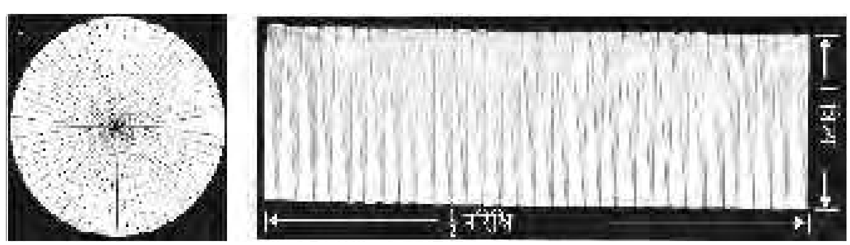


[illegible] 11.36

[illegible] 11.36 [illegible] (roughly) [illegible]

[illegible]

[illegible] 64 [illegible] ([illegible] 11.37)



[illegible] 11.37

[illegible] r'

[illegible] 64 [illegible] 32 [illegible] 32 [illegible] ([illegible] 11.37)

$= l \times b$

$= (\ \ ) \times \ = \frac{1}{2} \times 2\ r \ \times r = \ r^2$

$= \ r^2$

17 30 cm

(= 3.14)

$r = 30$ cm

$= \ r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826\ \text{cm}^2$

18 9.8 m

$d = 9.8$ m $r = 9.8 \quad 2 = 4.9$ m

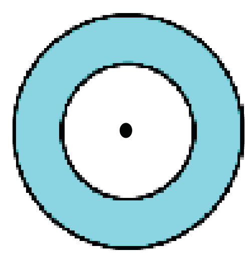
$= \ r^2 = \frac{22}{7} \ (4.9)^2\ \text{m}^2 = \frac{22}{7} \ 4.9 \ 4.9\ \text{m}^2 = 75.46\ \text{m}^2$

19

10 cm 4 cm

(a) (b)

(c) (= 3.14)



(a) = 10 cm

$= \ r^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314\ \text{cm}^2$

(b) = 4 cm

$= \ r^2$

$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24\ \text{cm}^2$

(c) $= (314 - 50.24)\ \text{cm}^2 = 263.76\ \text{cm}^2$

11.3

1. ($= \frac{22}{7}$)

(a) 14 cm (b) 28 mm (c) 21 cm

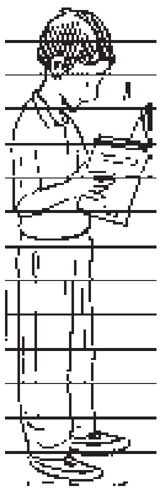
2.

(a) = 14 mm ($= \frac{22}{7}$) (b) = 49 m

(c) = 5 cm

3. 154 m

($= \frac{22}{7}$)

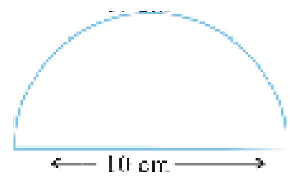


4. 21 m ... 2 ... 4 ... ($= \frac{22}{7}$ ...)

5. 4 cm ... 3 cm ... ($= 3.14$ ...)

6. ... 1.5 m ... 15 ... ($= 3.14$ ...)

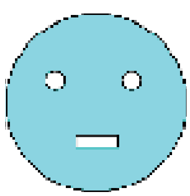
7. ...



8. 15 ... 1.6 m ... ($= 3.14$ ...)

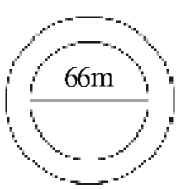
9. ... 44 cm ... ($= \frac{22}{7}$ ...)

10. 14 cm ... 3.5 cm ... 3 cm ... 1 cm ... ($= \frac{22}{7}$ ...)



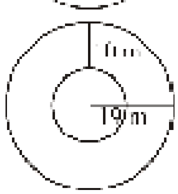
11. 6 cm ... 2 cm ... ($= 3.14$ ...)

12. ... 31.4 cm ... ? ($= 3.14$ ...)



13. ... 4 m ... 66 m ... ($= 3.14$ ...)

14. ... 314 m^2 ... (sprinkler) ... 12 m ... ($= 3.14$)



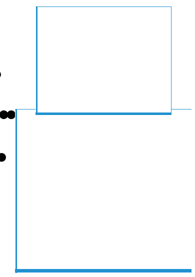
15. ... ($= 3.14$ ...)

16. 28 m ... 352 m ... ($= \frac{22}{7}$ ...)

17. ... 15 cm ... 1 ... ($= 3.14$ ...)

11.6

$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$ ... 1 cm^2 ... mm^2 ... 1 cm ... (11.38) ... 1 cm ... 100 ... 1 mm



11.38

1 cm ... $= 100$ ... 1 mm

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \times 1 \text{ mm}^2 \quad 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} \quad (1 \text{ m} = 100 \text{ cm})$$
$$= 10000 \text{ cm}^2$$

1 km^2 ... m^2 ...

... [... ha ...]

$$1 \text{ ...} = 100 \times 100 \text{ m}^2 = 10{,}000 \text{ m}^2$$

$$1000 \text{ cm}^2 = 1000 \times 100 \text{ mm}^2 = 100000 \text{ mm}^2$$

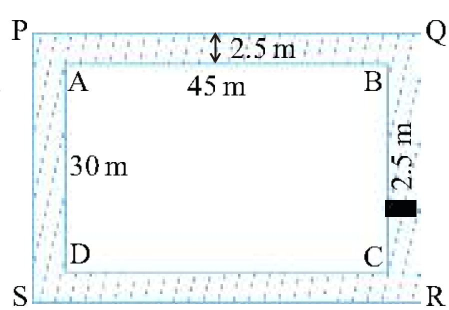
$$1000 \text{ cm}^2 = \frac{1000}{10000} \text{ m}^2 = 0.1 \text{ m}^2$$

(i) 50 cm^2 ... mm^2
(ii) 2 ha ... m^2
(iii) 10 m^2 ... cm^2
(iv) 1000 cm^2 ... mm^2

11.7

20 ... 45 m ... 30 m ... 2.5 m ...

ABCD ... 2.5 m ...



... PQRS ... ABCD ...

$$PQ = (45 + 2.5 + 2.5) \text{ m} = 50 \text{ m}$$
$$PS = (30 + 2.5 + 2.5) \text{ m} = 35 \text{ m}$$

ABCD ... $= l \times b = 45 \times 30 \text{ m}^2 = 1350 \text{ m}^2$

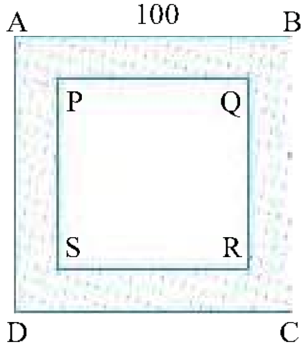
PQRS ... $= l \times b = 50 \times 35 \text{ m}^2 = 1750 \text{ m}^2$

•••• ••••• = • •• PQRS • ••••• •• •• •• ABCD • •••••

$= (1750 \quad 1350)\ m^2 = 400\ m^2$

•• •• •••21 100 m••• •• •• •••• ••••• ••• ••• •••• •••• • ••••• •• •••• • 5 m•• ••••••••• •••••••••• •••••• •• •• • •• ••• 250•••••• 10 m²•• •••••••••••••• •••• ••••••••• • •• ••

•• • ••• ABCD, 100 m••• •••• ••••• •••• ••••• •• •••••• 5 m•• •• ••• • ••••••



$PQ = 100 - (5 + 5) = 90\ m$

•• ABCD • •••••• $= (\text{•• •})^2 = (100)^2\ m^2 = 10{,}000\ m^2$

•• PQRS • •••••• $= (\text{•• •})^2 = (90)^2\ m^2 = 8100\ m^2$

• •••••••• •••••• $= (10000 \quad 8100)\ m^2 = 1900\ m^2$

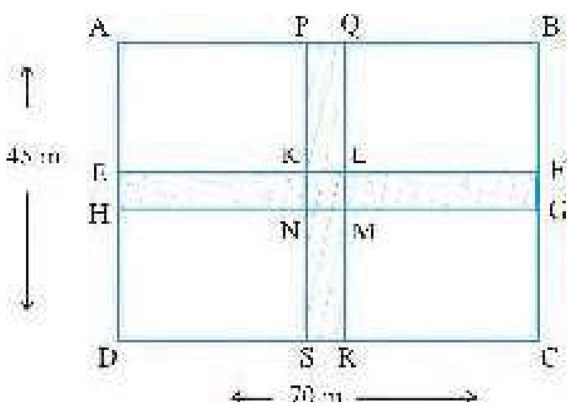
10 m² •••••••• •••• •••• $= 250$ •

•• •• •• 1 m²••••••••• •••• •••• $= \dfrac{250}{10}$ •

• ••• 1900 m²•••••••• •••• •••• $= \dfrac{250}{10} \quad 1900 = 47500$ •

•• •• •••• 22 70 m • ••••• •••45 m • •• ••• •• ••• •• •••• ••••• ••• ••• •••••• •• • 5 m • •• ••• ••••••••• •••••• •••••••••••• •••• •• ••• ••• • •• •••••••• •••••• •• ••• •• •••••105 ••••• m² • •••••••••• •••••• • •••••••••••• •••••

•• ••••• ••••• •• •• •• ••••• •••••• •••••• •••• ••• PQRS • • ••••• •• •• •• •• EFGH • ••••• •••••••• •••••••• •• KLMN • •••••• •• ••••••• •••• ••••• •••••••••• • •



$PQ = 5\ m$ •• •• $PS = 45\ m$

$EH = 5\ m$ •• •• $EF = 70\ m$

$KL = 5\ m$ •• •• $KN = 5\ m$

••••• •••••• = • •• PQRS • •••••

+•• •• EFGH • •••••

– •• KLMN • •••••

$= PS \times PQ + EF \times EH - KL \times KN$

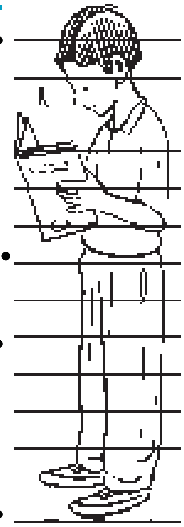
$= (45 \times 5 + 70 \times 5 \quad 5 \times 5)\ m^2$

$= (225 + 350 \quad 25)$ •^{2} $= 550\ m^2$

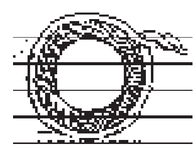
••••• ••••••• •••• $= 105 \times 550 = 5775$ •

[illegible] 11.4

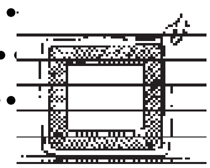
1. [illegible] 90 m [illegible] 75 m [illegible] 5 m [illegible]



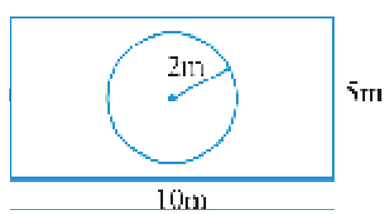
2. 125 m [illegible] 65 m [illegible] 3 m [illegible]
3. 8 cm [illegible] 5 cm [illegible] 1.5 cm [illegible] (margin) [illegible]
4. 5.5 m [illegible] 4 m [illegible] 2.25 m [illegible]
   (i) [illegible]
   (ii) 200 [illegible] m^2 [illegible]
5. 30 m [illegible] 1 m [illegible]
   (i) [illegible]
   (ii) 40 [illegible] m^2 [illegible]
6. 700 m [illegible] 300 m [illegible] 10 m [illegible]
7. 90 m [illegible] 60 m [illegible] 3 m [illegible]
   (i) [illegible]
   (ii) 110 [illegible] m^2 [illegible]



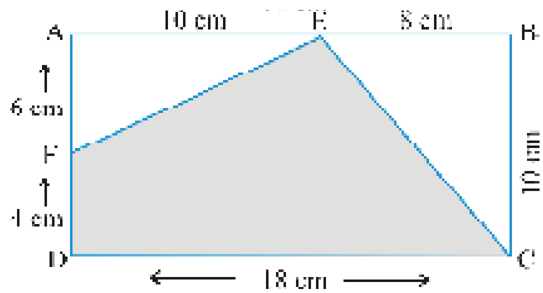
8. [illegible] 4 cm [illegible] 4 cm [illegible] (= 3.14)

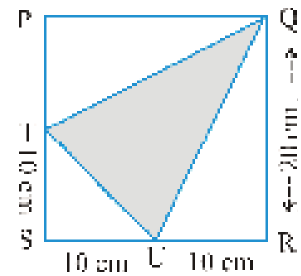


9. [illegible]
   (i) [illegible]
   (ii) [illegible]
   (iii) [illegible]
   (iv) [illegible]

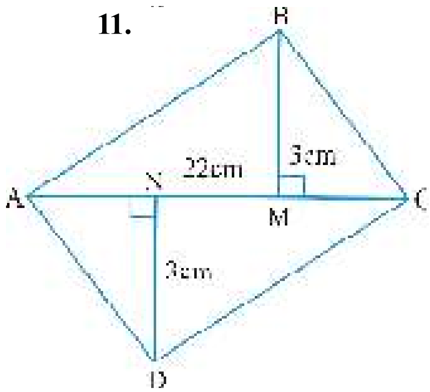


10.





11.



ABCD

AC = 22 cm, BM = 3 cm, DN = 3 cm

BM AC, DN AC

1.

2.

(a) = 4 ×

(b) = 2 × (+)

(c) = ×

(d) = ×

3. = ×

4. $= \frac{1}{2}$ ( )

$= \frac{1}{2} \times \quad \times$

5. = d,

d π $\frac{22}{7}$ 3.14 ( )

6. = r^2, r

7.

1 cm^2 = 100 mm^2, 1 m^2 = 10000 cm^2, 1 = 10000 m^2

12

12.1

$x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$

VI

(expressions)

12.2

(variable)

$x, y, l, m, \ldots$

(constant)

$4x + 5$, $10y - 20$ $4x + 5$, 'x'

x

$10y - 20$ y

$$x^2,\ 2y^2,\ 3x^2 - 5,\ xy,\ 4xy + 7$$

(i) x^2 x x

$x \times x = x^2$

$4 \times 4 = 4^2$ $x \times x = x^2$.

x (x squared)

x^2 x

$x \times x \times x = x^3$

x^3 x (x cubed)

x^3 x

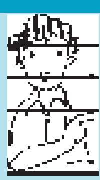
$x, x^2, x^3, \ldots$ x

(ii) $2y^2$ y $2y^2 = 2 \times y \times y$

y y y^2 y^2

(iii) $(3x^2 - 5)$ x^2 $3x^2$

$3x^2 - 5$ $3x^2$



$7xy + 5,\ x^2y,\ 4x^2 - 5x$

(iv) xy x y

$x \times y = xy$

(v) $4xy + 7$ xy $4xy$

$4xy$

12.3

(terms) (factors)

$(4x + 5)$

x $4x$

$(3x^2 + 7y)$ $3,\ x$ x $3x^2$

y $7y$ $3x^2$ $7y$

$4x^2 - 3xy$ $4x^2$ $-3xy$

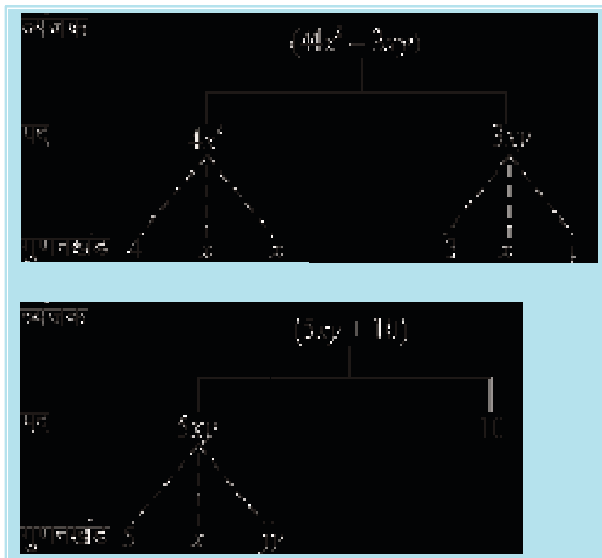
$4x^2$; $4,\ x$ x $-3xy$; $-3,\ x$ y

$(4x + 5)$ $4x$ 5 $(4x^2 - 3xy)$ $4x^2$ $(-3xy)$ $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$

(minus) $4x^2 - 3xy$ $3xy$ $(-3xy)$

$(4x^2 - 3xy)$ $4x^2$ $-3xy$ $4x^2$; $4, x$ x $4, x$ x $4x^2$ (factors) $-3xy$, $-3, x$ y

(tree diagram) $(4x^2 - 3xy)$



$5xy + 10$ $5xy$ $5 \times xy$ xy x^3 $x \times x^2$ $x \times x \times x$

1. $8y + 3x^2$, $7mn - 4$, $2x^2 y$
2.

(numerical) (algebraic)

(numerical coefficient)

$5xy$ xy 5 $10xyz$, xyz 10 $-7x^2y^2$ x^2y^2 -7

$+1$ $1x$ x $1x^2y^2$ x^2y^2

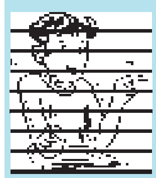
(-1) x $-x$

$(-1)x^2y^2$ $-x^2y^2$

$5xy$ xy 5 $5y$ x $5x$

y $10xy^2$ xy^2 10

$10y^2$ x $10x$ y^2



$4x - 3y$, $a + b + 5$,

$2y + 5$, $2xy$

1

$xy + 4$, $13 - y^2$, $13 - y + 5y^2$, $4p^2q - 3pq^2 + 5$

(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

2

(a) x

$4x - 3y,\ 8 - x + y,\ y^2x - y,\ 2z - 5xz$

(b) y

$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5,\ my + m$

(a) x x

		x	x
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) (a)

		y	y
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

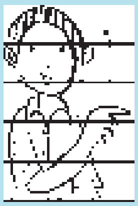
12.4

(like terms) (unlike terms) $2xy - 3x + 5xy - 4$, $2xy$ $5xy$ $2xy$ 2, x y $5xy$ 5, x y $2xy$ $-3x$ $2xy$ 4 $-3x$ 4

$12x,\ 12,\ -25x,\ -25,\ -25y$
$1,\ x,\ 12y,\ y$

12.5

(monomial) $7xy,\ -5m,\ 3z^2,\ 4$



a, $a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$, 7, $4m - 7n + 10$, $4mn + 7$.

(binomial) $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ $10pq$ $(a + b + 5)$

(trinomial) $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ $ab + a + b + 5$ $x + y + 5x$ x $5x$

(Polynomial)

3

(i) $7x$, $12y$ (ii) $15x$, $-21x$ (iii) $-4ab$, $7ba$ (iv) $3xy$, $3x$

(v) $6xy^2$, $9x^2y$ (vi) pq^2, $-4pq^2$ (vii) mn^2, $10mn$

(i)	$7x$ $12y$	$7, x$ $12, y$			
(ii)	$15x$ $-21x$	$15, x$ $-21, x$			
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$-4, a, b$ $7, b, a$			$ab = ba$
(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$			y
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$			
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$			

[illegible]

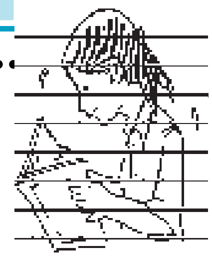
(i) [illegible]

(ii) [illegible]

(iii) [illegible]

[illegible]

[illegible] 12.1



1. [illegible]

(i) [illegible] y [illegible] z [illegible]

(ii) [illegible] x [illegible] y [illegible]

(iii) [illegible] z [illegible]

(iv) [illegible] p [illegible] q [illegible]

(v) [illegible] x [illegible] y [illegible]

(vi) [illegible] m [illegible] n [illegible]

(vii) [illegible] y [illegible] z [illegible]

(viii) [illegible] a [illegible] b [illegible]

2. (i) [illegible]

(a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

(d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$

(ii) [illegible]

(a) $-4x + 5$ (b) $-4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

(d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2\,ab - 2.4\,b + 3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2 + 0.2\,q^2$

3. [illegible]

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $-p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\,a + 0.8\,b$

(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l + b)$ (ix) $0.1\,y + 0.01\,y^2$

4. (a) [illegible] x [illegible] x [illegible]

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7 + xy^2$

(b) y^2 y^2

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$

5.

(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100

(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$ (xii) $1 + x + x^2$

6.

(i) 1, 100 (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7.

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp,$
$13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6

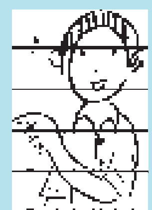
1. x $x + 10$ $x,$ $x + 10$

2. y $3y$ (y) $(3y)$ $y, 3y$ 13

3.

l

$(l+3)$ l^2 $(l+3)^2$



- $3x$ $4x$. x

  $3x$ $4x$.

  $$3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$$
  $$= (3 + 4) \times x$$
  $$= 7 \times x = 7x$$

  $$3x + 4x = 7x$$

- $8xy$, $4xy$ $2xy$

  $$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$
  $$= (8 + 4 + 2) \times xy$$
  $$= 14 \times xy = 14xy$$

  $$8xy + 4xy + 2xy = 14\,xy$$

- $7n$ $4n$

  $$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$
  $$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

  $$7n - 4n = 3n$$

- $11ab$ $5ab$

  $$11ab - 5ab = (11 - 5)\,ab = 6ab$$

x $(x+5)$

$(x+5)$ 5 x $3xy$

7 $3xy+7$

$3xy$ 7 $3xy-7$

- $3x+11$ $7x-5$

  $= 3x + 11 + 7x - 5$

  $3x$ $7x$ 11 -5

  $3x + 7x = 10x$ $11 + (-5) = 6$

  $$= 3x + 11 + 7x - 5$$
  $$= 3x + 7x + 11 - 5$$
  $$= 10x + 6$$

  $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- $3x + 11 + 8z$ $7x - 5$

  $$= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$$
  $$= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$$

  $8z$

  $= 10x + 6 + 8z$

- $3a - b + 4$ $a - b$

  $$= 3a - b + 4 - (a - b)$$
  $$= 3a - b + 4 - a + b$$

  $a - b$

  $$= 3a - a - b + b + 4$$
  $$= (3-1)\,a - (1-1)\,b + 4$$
  $$= 2a + (0)\,b + 4 = 2a + 4$$

  $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

$-(5-3) = -5 + 3$

$-(a-b) = -a + b$

4

$12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$

$$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$$
$$= (12 - 4)\, m^2 + (5 - 9 - 7)\, m + 10$$
$$= 8m^2 + (-4 - 7)\, m + 10$$
$$= 8m^2 + (-11)\, m + 10$$
$$= 8m^2 - 11m + 10$$

(i) $m - n,\ m + n$

(ii) $mn + 5 - 2,\ mn + 3$

$-10b$ $+10b$ $-18a$ $+18a$ $24ab$ $-24ab$

5 $30ab + 12b + 14a$ $24ab - 10b - 18a$

$$30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$$
$$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$$
$$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$$
$$= 6ab + 22b + 32a$$

$$\begin{array}{rrr} 30ab & + 12b & + 14a \\ 24ab & - 10b & - 18a \\ - & + & + \\ \hline 6ab & + 22b & + 32a \\ \hline \end{array}$$

6 $2y^2 + 3yz,\ -y^2 - yz - z^2$ $yz + 2z^2$ $3y^2 - z^2$ $-y^2 + yz + z^2$

$2y^2 + 3yz,\ -y^2 - yz - z^2$ $yz + 2z^2$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2y^2 & + & 3yz & & \\ - & y^2 & - & yz & - & z^2 \\ & & + & yz & + & 2z^2 \\ \hline & y^2 & + & 3yz & + & z^2 \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

$3y^2 - z^2$ $-y^2 + yz + z^2$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3y^2 & & & - & z^2 \\ - & y^2 & + & yz & + & z^2 \\ \hline & 2y^2 & + & yz & & \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

[illegible]

$$\begin{array}{rrr} y^2 & +\ 3yz & +\ z^2 \\ 2y^2 & +\ \ yz & \\ - & - & \\ \hline -\,y^2 & +\ 2yz & +\ z^2 \\ \hline \end{array}$$

[illegible] 12.2

1. [illegible]

   (i) $21b - 32 + 7b - 20b$

   (ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$

   (iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$

   (iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$

   (v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$

   (vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2. [illegible]

   (i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

   (ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$

   (iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$

   (iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$

   (v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$

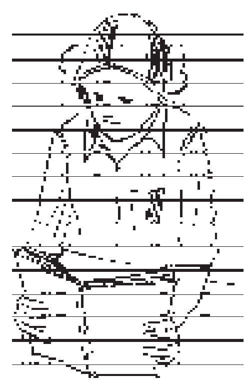
   (vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$

   (vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

   (viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, -10p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

   (ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

   (x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$



3. [illegible]

   (i) y^2 [illegible] $-5y^2$

   (ii) $-12xy$ [illegible] $6xy$

   (iii) $(a + b)$ [illegible] $(a - b)$

   (iv) $b(5 - a)$ [illegible] $a(b - 5)$

   (v) $4m^2 - 3mn + 8$ [illegible] $-m^2 + 5mn$

   (vi) $5x - 10$ [illegible] $-x^2 + 10x - 5$

   (vii) $3ab - 2a^2 - 2b^2$ [illegible] $5a^2 - 7ab + 5b^2$

   (viii) $5p^2 + 3q^2 - pq$ [illegible] $4pq - 5q^2 - 3p^2$

4. (a) $2x^2 + 3xy$ [illegible] $x^2 + xy + y^2$ [illegible]

   (b) $-3a + 7b + 16$ [illegible] $2a + 8b + 10$ [illegible]

5. $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ … $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ …

6. (a) $3x - y + 11$ … $-y - 11$ … $3x - y - 11$ …

(b) $4 + 3x$ … $5 - 4x + 2x^2$ … $3x^2 - 5x$ … $-x^2 + 2x + 5$ …

12.7 …

…

… l … l^2 … $l = 5$ cm … 5^2 cm^2 = 25 cm^2 … $= 10$ cm … 10^2 cm^2 … 100 cm^2 …

… 7

… $x = 2$ …

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$

(iv) $100 - 10x^3$

…

(i) $x + 4$ … $x = 2$ … $x + 4$ …

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ … $x = 2$ …

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19 - 5x^2$ … $x = 2$ …

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(v) $100 - 10x^3$ … $x = 2$ …

$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ [… $2^3 = 8$ …]

$= 100 - 80 = 20$

… 8

… $n = -2$

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$ …

…

(i) $5n - 2$ … $n = -2$ …

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ … $n = -2$ … $5n - 2 = -12$ …

… $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [… $(-2)^2 = 4$]

[illegible]

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) [illegible] $n = -2$ [illegible]

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ [illegible]

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ [illegible]

[illegible]

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

[illegible] $x + y, xy$ [illegible] $x = 3$ [illegible] $y = 5$ [illegible] $(x + y)$ [illegible] $3 + 5 = 8$ [illegible]

[illegible] 9 $a = 3$ [illegible] $b = 2$ [illegible]

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$

(iv) $a^3 - b^3$

[illegible] [illegible] $a = 3$ [illegible] $b = 2$ [illegible]

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

[illegible] 12.3

1. [illegible] $m = 2$ [illegible]

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2} - 4$

2. [illegible] $p = -2$ [illegible]

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. [illegible] $x = -1$ [illegible]

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4. [illegible] $a = 2$ [illegible] $b = -2$ [illegible]

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. [illegible] $a = 0$ [illegible] $b = -1$ [illegible]

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

(iv) $a^2 + ab + 2$

6. x 2

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. $x = 3$, $a = -1$ $b = -2$

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) $z = 10$ $z^3 - 3(z - 10)$

(ii) $p = -10$ $p^2 - 2p - 100$

9. $x = 0$ $2x^2 + x - a$ 5 a

10. $2(a^2 + ab) + 3 - ab$ $a = 5$ $b = -3$

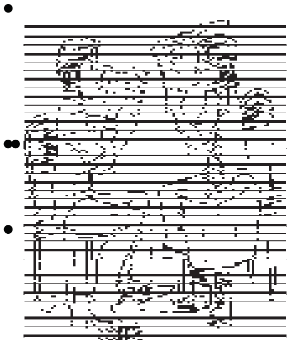
12.8

(formulas) (rules)

-

1. $= 3 \times$ l $= 3l$
2. $= 4l$ l
3. regular pentagon) $= 5l$ l

-

1. $= l^2$
2. l b $= l \times b = lb$
3. b h $= \frac{b \quad h}{2}\ \frac{bh}{2}$

3 cm $4l$ $l = 3$ cm $= (4 \times 3)$ cm $= 12$ cm

l^2 $l = 3$ cm

$= (3)^2$ cm $= 9$ cm^2

- **(Patterns)**

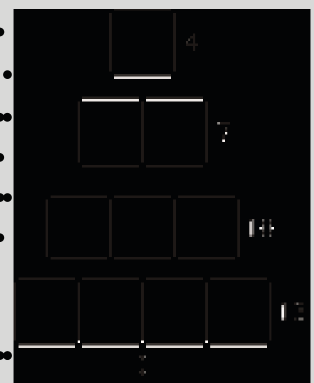
1. n (successor) $(n + 1)$ $+ 1 = 11$

2. n $2n$ $(2n + 1)$ 15 $2n = 2 \times 15 = 30$ $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$

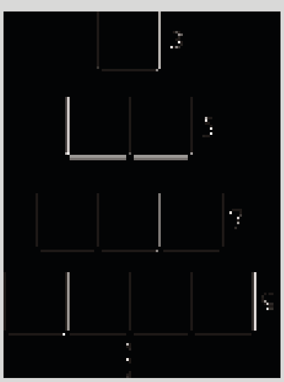
(patterns)

1.

n $(3n + 1)$ $n =$ 1, 2, 3,...,10,... $3 \times 3 + 1 = 10$



2. ... n $(2n + 1)$ n $n = 4$ $2n + 1 = (2 \times 4) + 1 = 9,$ 4



n

(dots)

(dot paper)

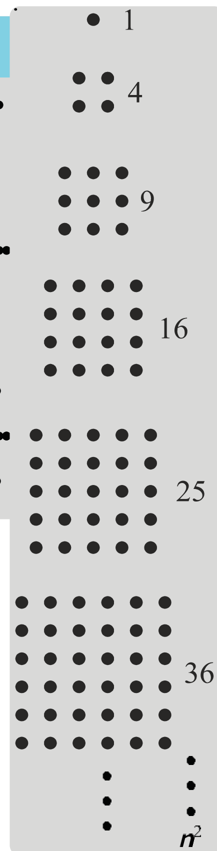
n

$n \times n = n^2$ $n = 4$

$4 \times 4 = 16$

n

...... (square numbers)



3, 6, 9, 12, ..., $3n$, ...

(multiples)

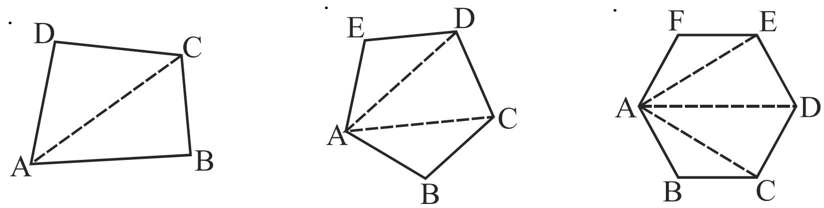
n $3n$

$3 \times 10 = 30$

$3 \times 100 = 300$

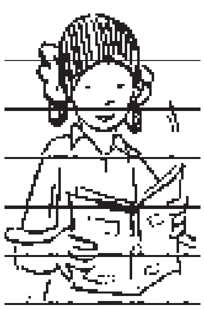
n [illegible] $(n-3)$ [illegible]

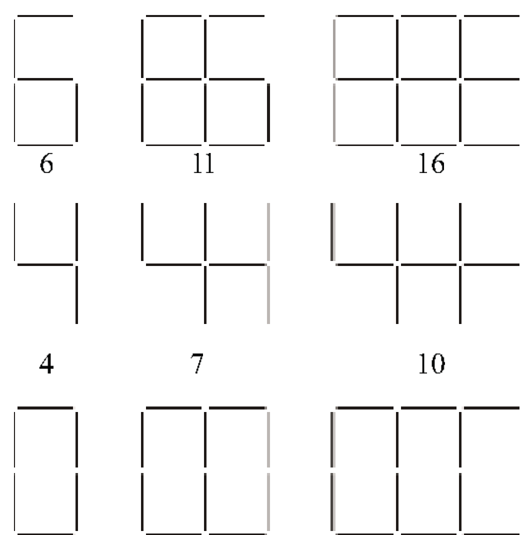
(non-overlapping) [illegible]



12.4

1. [illegible]





(a)	6	11	16	21 ...	$(5n+1)$ ...
(b)	4	7	10	13 ...	$(3n+1)$ ...
(c)	7	12	17	22 ...	$(5n+2)$ ...

n (n)

2.

							…		…		…
(i)	$2n - 1$	1	3	5	7	9	-	19	-	-	-
(ii)	$3n + 2$	2	5	8	11	-	-	-	-	-	-
(iii)	$4n + 1$	5	9	13	17	-	-	-	-	-	-
(iv)	$7n + 20$	27	34	41	48	-	-	-	-	-	-
(v)	$n^2 + 1$	2	5	10	17	-	-	-	-	10,001	-

1. $4xy + 7$ x y x y $4xy$ $4xy + 7$

2. $4xy$ 7 $4xy + 7$

3. $4xy + 7$ $4xy$ x, y 4

4.

5.

6. $4xy$ $-3xy$ $4xy$ $-3x$

7. $8xy - 3xy = (8 - 3)xy,$ $5xy$

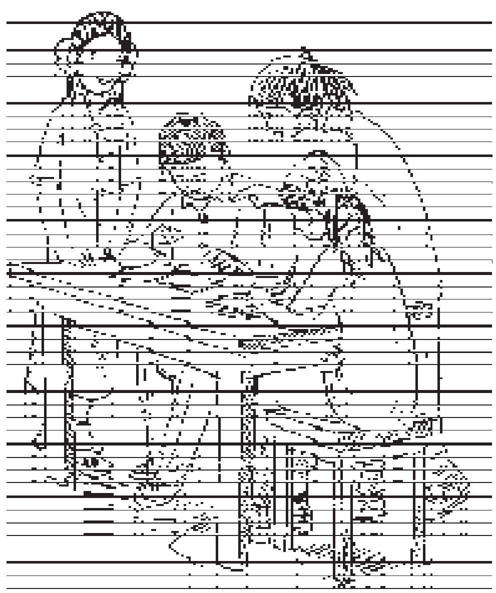
8. [illegible] $4x^2 + 5x$ [illegible] $2x + 3$ [illegible] $4x^2 + 7x + 3$ [illegible] $5x$ [illegible] $2x$ [illegible] $7x$ [illegible] $4x^2$ [illegible] 3 [illegible]

9. [illegible] $x = 5$ [illegible] $7x - 3$ [illegible] 32, [illegible] $7 \times 5 - 3 = 32$ [illegible]

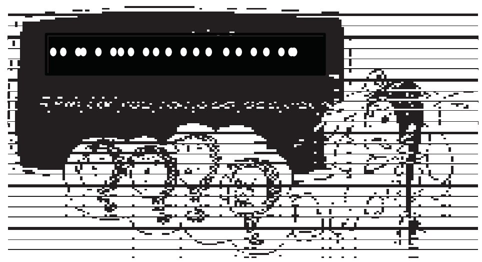
10. [illegible]

[illegible] $= lb$, [illegible] l [illegible] b [illegible]

[illegible] $(n$ [illegible]$)$ [illegible] n [illegible] $11, 21, 31, 41, \ldots$ [illegible] n [illegible] $(10n + 1)$ [illegible]



13



(mass)

5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg

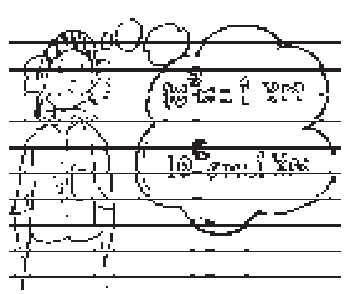
(Uranus)

86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg

(Sun) (Saturn) 1,433,500,000,000 m 1,439,000,000,000 m

(exponents)

13.2



$10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

10^4 $10 \times 10 \times 10 \times 10$ ‘10’ **(base)** ‘4’ **10^4** **10** **(power) 4** **10** **10^4** 10000 **(exponential form)**

1000 10 1000 10

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

10^3 1000

$$1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$$

10^5 1,00,000

10 10^3 3 10^5 5

(expanded form)

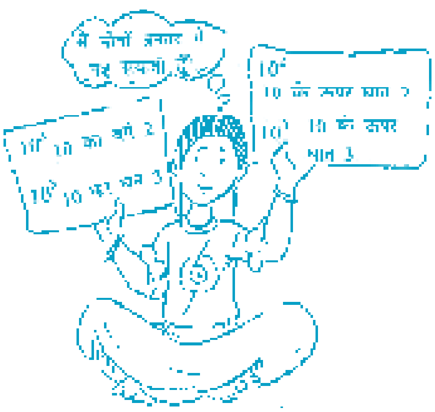
10, 100, 1000

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

$$4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$$

172, 5642, 6374

10



$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

3 4

10^2, 10 2 10 (10 squared)

10^3, 10 3 10 (10 cubed)

5^3 (5)

5^3 5

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

125 5 (third power)

5^3

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ 2

2^5 2 5

$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$,

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

$(-2)^3$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^4 = 16$

$a \times a = a^2$ (... 'a' ... 2' ...)

$a \times a \times a = a^3$ (... 'a' ... 3' ...)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (... 'a' ... 4 ... 'a' ...)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (... 'a' ... 7' ... 'a' ...)

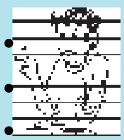
$a \times a \times a \times b \times b$ ... a^3b^2 ... (... a ... b ...)

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ ... a^2b^4 ... (... a ... b ... 4 ...)

(i) 729 ... 3 ...

(ii) 128 ... 2 ...

(iii) 343 ... 7 ...



1 256 ... 2 ...

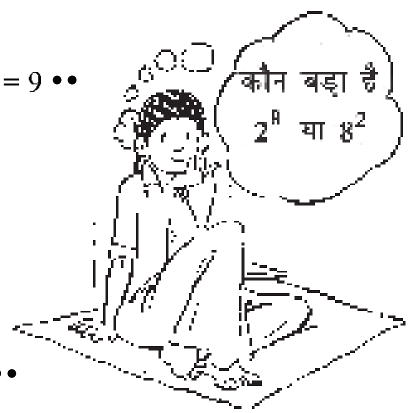
$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$256 = 2^8$

2 2^3 ... 3^2 ...

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ ... $3^2 = 3 \times 3 = 9$

$9 > 8$ ... 3^2 ... 2^3 ...



3 8^2 ... 2^8 ...

$8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

$2^8 > 8^2$

4 a^3b^2, a^2b^3, b^2a^3, ... b^3a^2 ...

$$\begin{aligned}
a^3 b^2 &= a^3 \times b^2 \\
&= (a \times a \times a) \times (b \times b) \\
&= a \times a \times a \times b \times b \\
a^2 b^3 &= a^2 \times b^3 \\
&= a \times a \times b \times b \times b \\
b^2 a^3 &= b^2 \times a^3 \\
&= b \times b \times a \times a \times a \\
b^3 a^2 &= b^3 \times a^2 \\
&= b \times b \times b \times a \times a
\end{aligned}$$

[illegible] $a^3 b^2$ [illegible] $a^2 b^3$ [illegible] a [illegible] b [illegible] $a^3 b^2$ [illegible] $a^2 b^3$ [illegible]

[illegible] $a^3 b^2$ [illegible] $b^2 a^3$ [illegible] a [illegible] b [illegible]

[illegible] $a^3 b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2 a^3$ [illegible]

[illegible] $a^2 b^3$ [illegible] $b^3 a^2$ [illegible]

[illegible] 5 [illegible]

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

[illegible]

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

[illegible] $72 = 2^3 \times 3^2$ [illegible]

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

[illegible] $432 = 2^4 \times 3^3$ [illegible]

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

[illegible] $1000 = 2^3 \times 5^3$

> [illegible]
>
> $1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$
>
> $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ ([illegible] $10 = 2 \times 5$ [illegible])
>
> $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
>
> [illegible] $1000 = 2^3 \times 5^3$
>
> [illegible]

(iv) $16000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000$ ([illegible] $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ [illegible])

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$

([illegible] $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ [illegible])

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

[illegible] $16000 = 2^7 \times 5^3$

[illegible] 6 [illegible]

$(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3$ [illegible] $(-5)^4$:

[illegible]

(i) [illegible] $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

[illegible] 1 [illegible] 1 [illegible]

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

[illegible] (-1) [illegible] (-1) [illegible] (-1) [illegible] $(+1)$ [illegible]

$(-1)^{[illegible]}$	$= -1$
$(-1)^{[illegible]}$	$= +1$

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

[illegible] 13.1

1. [illegible]
   (i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4
2. [illegible]
   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$
   (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$
3. [illegible]
   (i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125
4. [illegible]
   (i) 4^3 [illegible] 3^4 (ii) 5^3 [illegible] 3^5 (iii) 2^8 [illegible] 8^2
   (iv) 100^2 [illegible] 2^{100} (v) 2^{10} [illegible] 10^2
5. [illegible]
   (i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600
6. [illegible]
   (i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4
   (v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$
7. [illegible]
   (i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$
   (iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$
8. [illegible]
   (i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 [illegible]

13.3.1 [illegible]

(i) [illegible] $2^2 \times 2^3$ [illegible]

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

[illegible] 2^2 [illegible] 2^3 [illegible] 2 [illegible] 3 [illegible] 5 [illegible]

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)] \times [(-3)\times(-3)\times(-3)]$

$= (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$

$= (-3)^7$

$= (-3)^{4+3}$

$4 + 3 = 7$

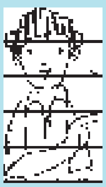
(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a)\times(a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

($2 + 4 = 6$)

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$



(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

$(-11)^2 \times (-11)^6 = 11^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$

b

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c)

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

a,

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

m n

$2^3 \times 3^2$

2^3 2 3^2 3

13.3.2

3^7 3^4

$$3^7 \quad 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3}{3\quad 3\quad 3\quad 3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

$3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

3^7 3^4 3^7 $3^4 = 3^{7-4}$

$$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} \quad \frac{5\quad 5\quad 5\quad 5\quad 5\quad 5}{5\quad 5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

5^6 $5^2 = 5^{6-2}$

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2 = a^{4-2}$$

$$a^4 \div a^2 = a^{4-2}$$

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$
$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$
$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

b c

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$
$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

a

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

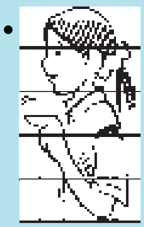
m n $m > n$

$11^6 \div 11^2 = 11^4$

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$

(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$

(v) $7^{13} \div 7^{10}$



13.3.3

$(2^3)^2$ $(3^2)^4$

$(2^3)^2$ 2^3

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$$
$$= 2^{3+3} \quad (a^m \times a^n = a^{m+n})$$
$$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$$

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$$

$$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$$
$$= 3^{2+2+2+2}$$
$$= 3^8 \quad (2\ 4\ 8)$$
$$= 3^{2 \times 4}$$

$(7^2)^{10}$

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

$$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

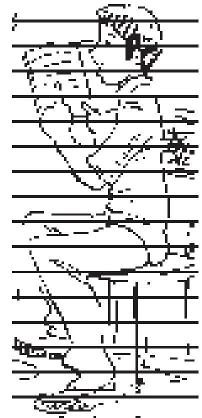
(i) $(6^2)^4$ (ii) $(2^2)^{100}$

(iii) $(7^{50})^2$ (iv) $(5^3)^7$

$$\left(7^{2}\right)^{10} = 7^{2 \times 10} = 7^{20}$$

$$\left(a^{2}\right)^{3} = a^{2 \times 3} = a^{6}$$

$$(a^{m})^{3} = a^{m \times 3} = a^{3m}$$



'a'

$$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{mn}$$

m n

7 $(5^2) \times 3$ $\left(5^{2}\right)^{3}$

$(5^2) \times 3$ 5^2 3

$5 \times 5 \times 3 = 75$

$\left(5^{2}\right)^{3}$ 5^2

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15625$$

$$(5^2)^3 > (5^2) \times 3$$

13.3.4

$2^3 \times 3^3$ 2^3 3^3

$$
\begin{aligned}
2^3 \times 3^3 &= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3) \\
&= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\
&= 6 \times 6 \times 6 \\
&= 6^3 \quad (6 \;\; 2 \;\; 3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4^4 \times 3^4 &= (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) \\
&= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \\
&= 12 \times 12 \times 12 \times 12 \\
&= 12^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3^2 \times a^2 &= (3 \times 3) \times (a \times a) \\
&= (3 \times a) \times (3 \times a) \\
&= (3 \times a)^2 \\
&= (3a)^2 \quad (3 \times a = 3a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^4 \times b^4 &= (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b) \\
&= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \\
&= (a \times b)^4 \\
&= (ab)^4 \quad (a \times b = ab)
\end{aligned}
$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m \quad m$$

8

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$
$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$
$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$
$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$
$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

$a^m \times b^m = (ab)^m$

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$
(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$
(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

13.3.5

(i) $\frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad a \quad b \quad m$$

9 (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5$

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$

$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(i) $4^5 \div 3^5$
(ii) $2^5 \div b^5$
(iii) $(-2)^3 \div b^3$
(iv) $p^4 \div q^4$
(v) $5^6 \div (-2)^6$

$\frac{3^5}{3^5}$

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3}{3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3} \quad 1$$

$3^5 \quad 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$

$3^0 = 1$

7^0

$7^3 \quad 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$

$$\frac{7^3}{7^3} = \frac{7\times 7\times 7}{7\times 7\times 7} \quad 1$$

$7^0 = 1$

$a^3 \quad a^3 = a^{3-3} = a^0$

$$a^3 \quad a^3 = \frac{a^3}{a^3} \quad \frac{a\times a\times a}{a\times a\times a} \quad 1$$

$a^0 = 1$ (a)

0

1

a^0

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = ?$

$2^1 = ?$

$2^0 = ?$

2^0

$2^0 = 1$

$3^6 = 729$, $3^5, 3^4, 3^3,\ldots$ 3^0

13.4

10 $8\times 8\times 8\times 8$ 2

$8\times 8\times 8\times 8 = 8^4$

$8 = 2\times 2\times 2 = 2^3$

$8^4 = (2^3)^4 = 2^3\times 2^3\times 2^3\times 2^3$

$= 2^{3\times 4}$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2^{12}$

11

(i) $\frac{3^7}{3^2} \quad 3^5$ (ii) $2^3\times 2^2\times 5^5$ (iii) $(6^2\times 6^4)\div 6^3$

(iv) $((2^2)^3\times 3^6)\times 5^6$ (v) $8^2\div 2^3$

(i) $\frac{3^7}{3^2} \quad 3^5 = 3^{7\ \ 2} \quad 3^5$

$= 3^5\times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$
$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $6^2 \quad 6^4 \quad 6^3 = 6^{2 \ 4} \quad 6^3$

$= \frac{6^6}{6^3} \quad 6^{6 \ 3} \quad 6^3$

(iv) $2^{2 \ 3} \quad 3^6 \quad 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$= 2 \ 3^{\ 6} \quad 5^6$

$= 2 \ 3 \ 5^{\ 6} = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

• ••• $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

•• •• •••12 • •• •• ••• •••

(i) $\frac{12^4 \quad 9^3 \quad 4}{6^3 \quad 8^2 \quad 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

•• (i) •••

$$\frac{12^4 \quad 9^3 \quad 4}{6^3 \quad 8^2 \quad 27} = \frac{2^2 \quad 3^{\ 4} \quad 3^{2 \ 3} \quad 2^2}{2 \quad 3^{\ 3} \quad 2^{3 \ 2} \quad 3^3}$$

$$= \frac{2^{2 \ 4} \times \ 3^{\ 4} \times 3^{2 \ 3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2 \ 3} \times 3^3} \quad \frac{2^8 \ ' \ 2^2 \ ' \ 3^4 \ ' \ 3^6}{2^3 \ ' \ 2^6 \ ' \ 3^3 \ ' \ 3^3}$$

$$= \frac{2^{8 \ 2} \quad 3^{4 \ 6}}{2^{3 \ 6} \quad 3^{3 \ 3}} \quad \frac{2^{10} \quad 3^{10}}{2^9 \quad 3^6}$$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$
$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$
$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$
$= 40 \ a^7$

(ii) $\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times \ 2^{2 \ 2}} = \frac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2 \ 2}}$

$= \frac{2^{1 \ 5} \quad 3^4}{2^4 \quad 3^2} = \frac{2^6 \quad 3^4}{2^4 \quad 3^2} = 2^{6 \ 4} \quad 3^{4 \ 2}$

$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

13.2

1.

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \quad 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $5^{2\ \ 3} \quad 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $3^{4\ \ 3}$ (ix) $2^{20} \quad 2^{15} \quad 2^3$

(x) $8^t \quad 8^2$

2.

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $5^{2\ \ 3} \quad 5^4 \quad 5^7$ (iii) $25^4 \quad 5^3$

(iv) $\dfrac{3 \quad 7^2 \quad 11^8}{21 \quad 11^3}$ (v) $\dfrac{3^7}{3^4 \quad 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\dfrac{2^8 \quad a^5}{4^3 \quad a^3}$

(x) $\dfrac{a^5}{a^3} \times a^8$ (xi) $\dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $2^3 \quad 2^{\ \ 2}$

3.

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4.

(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5.

(i) $\dfrac{2^{5\ \ 2} \quad 7^3}{8^3 \quad 7}$ (ii) $\dfrac{25 \quad 5^2 \quad t^8}{10^3 \quad t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \quad 10^5 \quad 25}{5^7 \quad 6^5}$

13.5

47561

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

10

$$47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

[$10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ and $1 = 10^0$]

$$104278 = 1 \times 100,000 + 0 \times 10000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$$
$$= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$
$$= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

10 5 0

13.6

1. (Milky Way Galaxy) 300,000,000,000,000,000,000 m
2. 100,000,000,000
3. 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$
$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$
$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$$

(standard form) 1.0 10.0 1.0 10

$$5985 = 5.985 \times 1000 = 5.985 \times 10^3$$ 5985

10

(i) 172
(ii) 5643
(iii) 56439
(iv) 176428

$5985 = 59.85 \times 100 = 59.85 \times 10^2$

5985

$5985 = 0.5985 \times 10000 = 0.5985 \times 10^4$ 5985

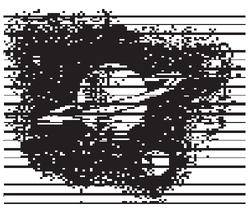
$300,000,000,000,000,000,000$ m

$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000$ m $= 3.0 \times 10^{20}$ m

40,000,000,000

10

$40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$



$= 5,976,000,000,000,000,000,000,000$ kg

$= 5.976 \times 10^{24}$ kg

25

$= 86,800,000,000,000,000,000,000,000$ kg

$= 8.68 \times 10^{25}$ kg

10

1,433,500,000,000 m 1.4335×10^{12} m

1,439,000,000,000 m 1.439×10^{12} m

149, 600,000,000 m 1.496×10^{11} m

13

(i) 5985.3 (ii) 65950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65950 = 6.595 \times 10000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

[illegible] 1 [illegible] 10 [illegible] 11 [illegible] 10 [illegible] $11 - 1 = 10$ [illegible] 10 [illegible] $4 - 1 = 3$ [illegible]

[illegible] 13.3

1. [illegible]

   279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. [illegible]

   (a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

   (b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

   (c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

   (d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. [illegible]

(i) 5,00,00,000	(ii) 70,00,000	(iii) 3,18,65,00,000
(iv) 3,90,878	(v) 39087.8	(vi) 3908.78

4. [illegible]

   (a) [illegible] 384,000,000 m [illegible]

   (b) [illegible] 300,000,000 m/sec. [illegible]

   (c) [illegible] 12756000 m [illegible]

   (d) [illegible] 1,400,000,000 m [illegible]

   (e) [illegible] 100,000,000,000 [illegible]

   (f) [illegible] 12,000,000,000 [illegible]

   (g) [illegible] 300,000,000,000,000,000,000 m [illegible]

   (h) 1.8 g [illegible] 60,230,000,000,000,000,000,000 [illegible] (molecules) [illegible]

   (i) [illegible] 1,353,000,000 km³ [illegible]

   (j) [illegible] 2001 [illegible] 1,027,000,000 [illegible]

1.

2.

$10000 = 10^4$ (10 4)

$243 = 3^5$, $128 = 2^7$.

10, 3 2 4, 5 7

10 10000 3 243

3. a b m n

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(b) $a^m \quad a^n = a^{m-n}$, $m > n$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$

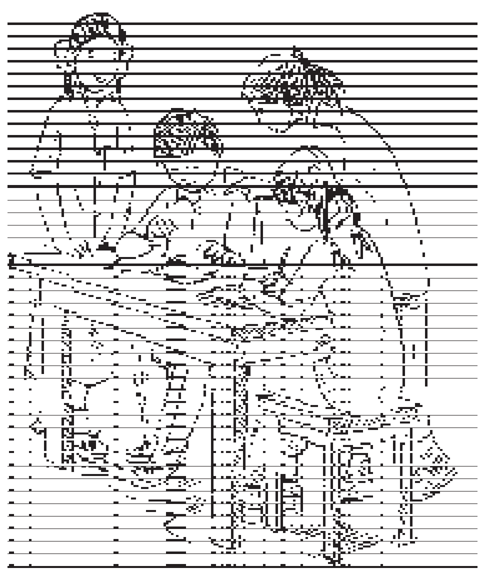
(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(e) $a^m \quad b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(f) $a^0 = 1$

(g) $(-1)^{} = 1$

$(-1)^{} = -1$

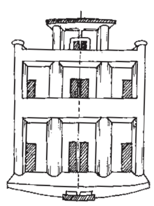


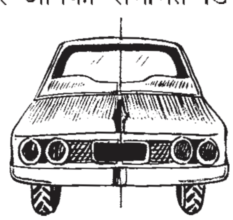
अध्याय 14

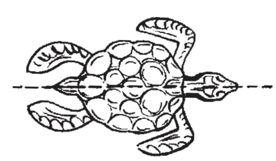
सममिति

भूमिका

सममिति +V|pphwu|,#एक महत्वपूर्ण ज्यामितीय अवधारणा है, जो सामान्यतः प्रकृति में प्रदर्शित होती है तथा क्रियाकलाप के लगभग सभी क्षेत्रों में इसका प्रयोग होता है। कलाकार, व्यवसायी, कपड़े या ज्वैलरी डिज़ाइन करने वाले, कार निर्माता, आर्किटेक्ट तथा अनेक अन्य सममिति की संकल्पना का प्रयोग करते हैं। मधुमक्खियों के छत्तों, फूलों, पेड़ की पत्तियों, धार्मिक चिह्नों, कंबलों और रूमालों, इन सभी स्थानों पर आपको सममित डिज़ाइन दिखाई देंगे।


आर्किटेक्चर

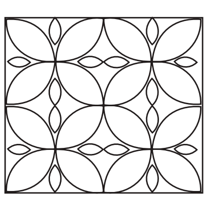

इंजीनियरिंग

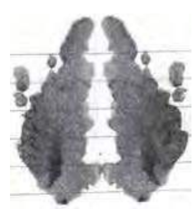

प्रकृति

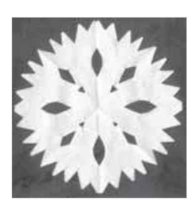
आप पिछली कक्षा में, **रैखिक सममिति** का कुछ 'अनुभव' कर चुके हैं।

एक आकृति मे रैखिक सममिति होती है, यदि उसमें एक रेखा ऐसी हो जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, आकृति के दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाते हों।

इन अवधारणाओं को आप याद कर सकते हैं। आपकी सहायता के लिए यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिए जा रहे हैं।

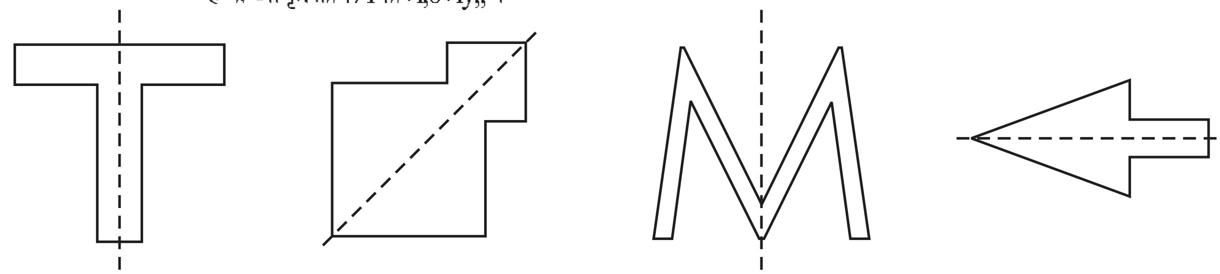

सममिति दर्शाने वाली एक पिक्चर एलबम बनाइए


कुछ रंगीन आकर्षक इंक-डाट डेविल्स बनाइए


कागज़ के कटे हुए कुछ सममिति डिज़ाइन बनाइए

आपके द्वारा एकत्रित किए गए डिज़ाइन में सममित रेखाओं (या अक्षों) को पहचानने का आनंद लीजिए ।

आइए अब सममिति पर अपनी अवधारणाओं को और अधिक प्रबल बनाएँ। निम्नलिखित आकृतियों का अध्ययन कीजिए, जिनमें सममित रेखाओं को बिंदुकित रेखाओं से अंकित किया गया है #आकृति#4714#+l,0+ly,, ।



+l, +ll, +lll, +ly,

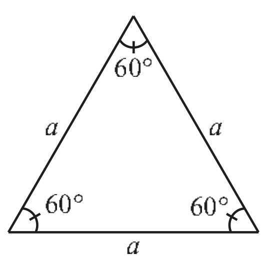
आकृति#4714

सम बहुभुजों के लिए सममित रेखाएँ

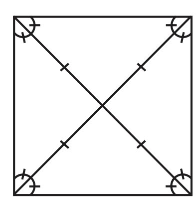
आप जानते हैं कि बहुभुज +sro|jrq,#एक ऐसी बंद आकृति है, जो अनेक रेखाखंडों से बनी होती है। सबसे कम रेखाखंडों से बना बहुभुज एक त्रिभुज है। (क्या आप इन रेखाखंडों से कम रेखाखंडों वाला कोई अन्य बहुभुज बना सकते हैं? इसके बारे में सोचिए।)

एक बहुभुज, सम बहुभुज +uhjxodu#sro|jrq,#कहलाता है, यदि इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर हों तथा सभी कोणों के माप बराबर हों। इस प्रकार, एक समबाहु त्रिभुज, तीन भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है। क्या चार भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है? क्या आप चार भुजाओं वाले एक सम बहुभुज का नाम बता सकते हैं?

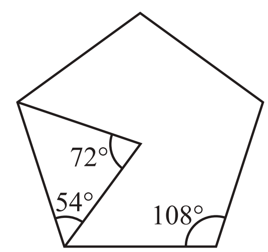
एक समबाहु त्रिभुज एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई समान होती है तथा इसके प्रत्येक कोण की माप#93°#होती है +आकृति#4715, ।



आकृति#4715



आकृति#4716

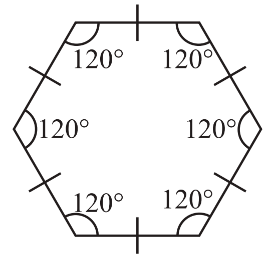


आकृति#4717

वर्ग भी एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी सभी भुजाएँ समान लंबाइयों की होती हैं तथा इसका प्रत्येक कोण एक समकोण (अर्थात् <3°) होता है। इसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं (आकृति#4716)।

यदि एक पंचभुज +shqwdjrq,#एक सम बहुभुज है, तो स्वाभाविक है कि इसकी भुजाएँ बराबर लंबाइयों की होनी चाहिए तथा इसके कोणों के माप बराबर होने चाहिए। बाद में आप पढ़ेंगे कि इसके प्रत्येक कोण की माप 43;°#होती है +आकृति#4717, ।

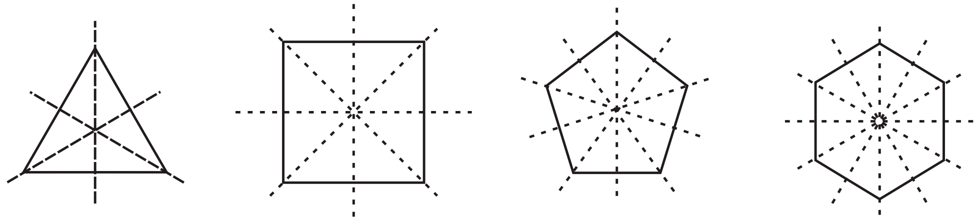
एक सम षड्भुज +uhjxodu#kh{djrq,#की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं तथा इसके प्रत्येक कोण की माप 453°#होती है। इस आकृति के बारे में आप और अधिक बाद में पढ़ेंगे +आकृति#4718, ।



आकृति#4718

सम बहुभुज सममित आकृतियाँ होती हैं और इसीलिए इनकी सममित रेखाएँ बहुत रोचक हैं। प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ हैं ^आकृति#4719#+l,#से#+ly,‘।

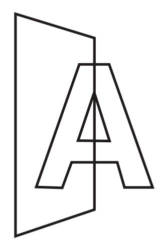
तीन सममित रेखाएँ | चार सममित रेखाएँ | पाँच सममित रेखाएँ | छ: सममित रेखाएँ



समबाहु त्रिभुज (i) | वर्ग (ii) | सम पंचभुज (iii) | सम षड्भुज (iv)

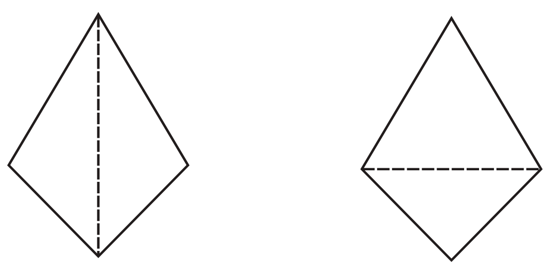
आकृति#4719

संभवत:, आप कागज़ मोड़ने के क्रियाकलापों द्वारा इसकी खोज करना चाहेंगे। कोई बात नहीं, आगे बढ़िए!



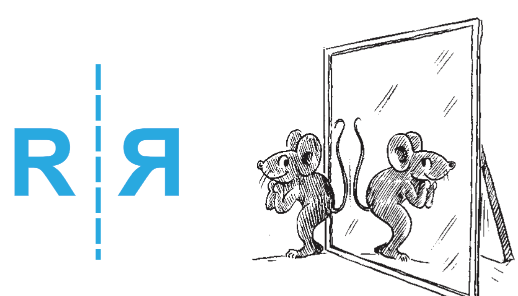
आकृति#471:

रैखिक सममिति की अवधारणा का दर्पण परावर्तन +pluuru#uhiohfwlrq,#से निकट का संबंध है। एक आकार +vkdsh,#में रैखिक सममिति तब होती है, जब उसका एक आधा भाग दूसरे आधे भाग का दर्पण प्रतिबिंब +pluuru#lpdjh,#हो(आकृति 14.7)। इस प्रकार एक दर्पण रेखा हमें एक सममित रेखा देखने या ज्ञात करने में सहायता करती है (आकृति 14.8)।



क्या बिंदुकित रेखा दर्पण रेखा है? हाँ। | क्या बिंदुकित रेखा दर्पण रेखा है? नहीं।

आकृति##471;



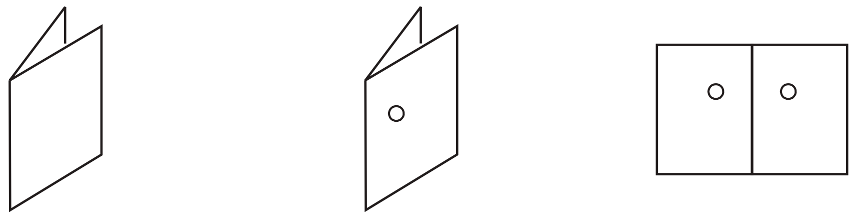
+l, | +ll,

यहाँ आकार तो समान हैं; परंतु दिशाएँ विपरीत हैं।

आकृति##471<

दर्पण परावर्तन के साथ कार्य करते समय, यह ध्यान रखना चाहिए कि एक आकृति के अभिमुखों +rulhqwdwlrqv, में दाएँ-बाएँ +ohiw0uljkw,#परिवर्तन हो जाता है #आकृति 471<,।

छेद करने वाला यह खेल खेलिए !



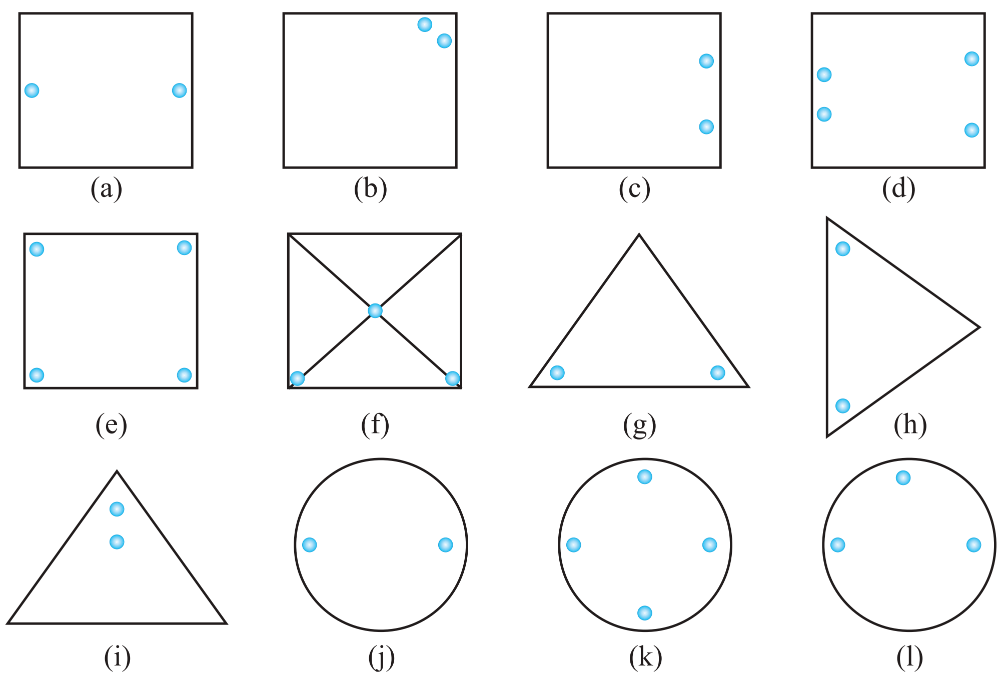
एक कागज़ को 2 आधों में मोड़िए एक छेद करिए मोड़ के निशान के अनुदिश दो छेद

आकृति#47143

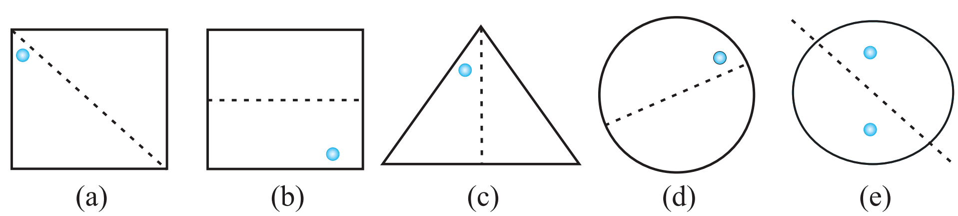
मोड़ का निशान एक सममित रेखा (या अक्ष) है। मोड़े हुए कागज़ पर विभिन्न स्थानों पर बनाए गए छेदों तथा संगत सममित रेखाओं का अध्ययन कीजिए +आकृति#47143,।

प्रश्नावली

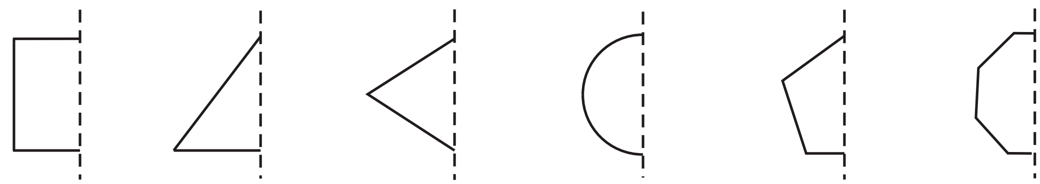
41 निम्नलिखित छेद की हुई आकृतियों की प्रतिलिपियाँ बनाकर (खींच कर) उनमें से प्रत्येक की सममित रेखाएँ ज्ञात कीजिए :



51 नीचे सममित रेखा (रेखाएँ) दी हुई हैं। अन्य छेद ज्ञात कीजिए।

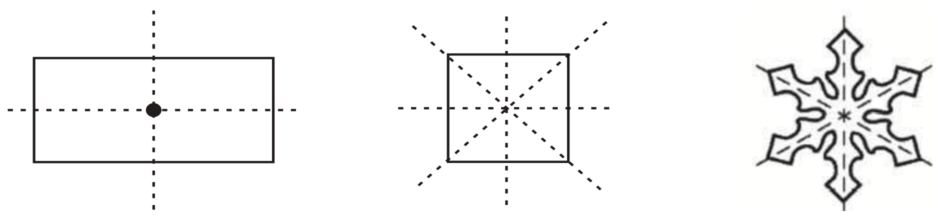


6l निम्नलिखित आकृतियों में, दर्पण रेखा (अर्थात् सममित रेखा) बिंदुकित रेखा के रूप में दी गई है। बिंदुकित (दर्पण) रेखा में प्रत्येक आकृति का परावर्तन करके, प्रत्येक आकृति को पूरा कीजिए। (आप बिंदुकित रेखा के अनुदिश एक दर्पण रख सकते हैं और फिर प्रतिबिंब +lpdjh,#के लिए दर्पण में देख सकते हैं)। क्या आपको पूरी की गई आकृति का नाम याद है ?



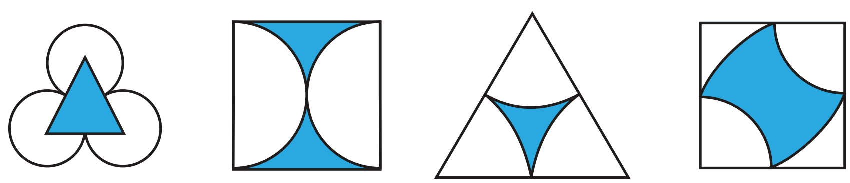
+d, +e, +f, +g, +h, +i,

#7l निम्नलिखित आकृतियों की एक से अधिक सममित रेखाएँ हैं। ऐसी आकृतियों के लिए यह कहा जाता है कि इनकी अनेक सममित रेखाएँ हैं।

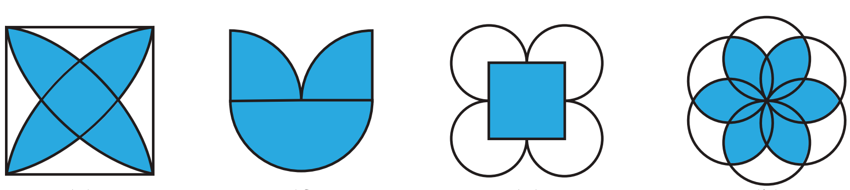


+d, +e, +f,

निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक में विविध सममित रेखाओं (यदि हों तो), की पहचान कीजिए :

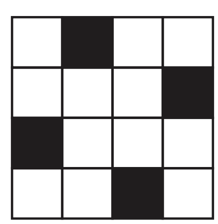


(a) (b) (c) (d)



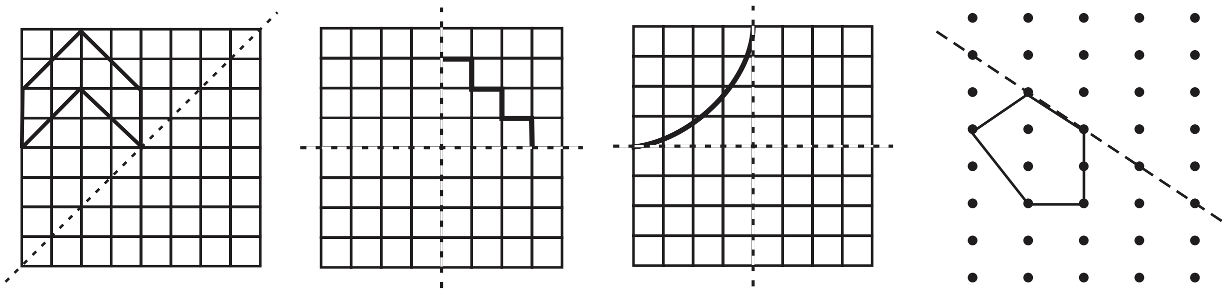
(e) (f) (g) (h)

8l यहाँ दी हुई आकृति की प्रतिलिपि बनाइए।



किसी एक विकर्ण की सममित रेखा लीजिए तथा कुछ और वर्गों को इस तरह छायांकित कीजिए, कि यह आकृति इस विकर्ण के अनुदिश सममित हो जाए। क्या ऐसा करने की एक से अधिक विधियाँ हैं ? क्या यह आकृति दोनों विकर्णों के अनुदिश सममित होगी B

91 निम्नलिखित आरेखों की प्रतिलिपियाँ बनाइए तथा प्रत्येक आकार को इस तरह पूरा कीजिए ताकि वह आकार दर्पण रेखा (या रेखाओं) के अनुदिश सममित हो :



+d, +e, +f, +g

:1 निम्नलिखित आकृतियों के लिए सममित रेखाओं की संख्याएँ बताइए :

+d, एक समबाहु त्रिभुज +e, एक समद्विबाहु त्रिभुज +f, एक विषमबाहु त्रिभुज
+g, एक वर्ग +h, एक आयत +i, एक समचतुर्भुज
+j, एक समांतर चतुर्भुज +k, एक चतुर्भुज +l, एक सम षड्भुज
+m, एक वृत्त

;1 अंग्रेजी वर्णमाला के किन अक्षरों में निम्नलिखित के अनुदिश परावर्तन सममिति (दर्पण परावर्तन से संबंधित सममिति) है :

+d, एक ऊर्ध्वाधर दर्पण +e, एक क्षैतिज दर्पण
+f, ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दर्पण दोनों

<1 ऐसे आकारों के तीन उदाहरण दीजिए, जिनमें कोई सममित रेखा न हो।

431 आप निम्नलिखित आकृतियों की सममित रेखा के लिए अन्य क्या नाम दे सकते हैं?

+d, एक समद्विबाहु त्रिभुज +e, एक वृत्त

घूर्णन सममिति

जब घड़ी की सुइयाँ घूमती हैं, तो आप क्या कहते हैं? आप कहते हैं कि ये घूर्णन +Urwdwh#कर रही हैं।

घड़ी की सुइयाँ केवल एक ही दिशा में घूमती हैं। यह घूमना एक बिंदु के चारों ओर होता है, जो घड़ी के पटल +idfh,#का केंद्र है।

घड़ियों की सुइयाँ जिस दिशा में घूमती हैं, वह घूर्णन +urwdwlrq,#दक्षिणावर्त +forfnzlvh,#घूर्णन कहलाता है, अन्यथा घूर्णन वामावर्त +dqwlforfnzlvh#urwdwlrq,#कहलाता है।

छत के पंखे की पँखुड़ियों के घूर्णन के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या ये दक्षिणावर्त दिशा में घूमती हैं या वामावर्त दिशा में घूमती हैं? अथवा क्या ये दोनों दिशाओं में घूमती हैं?

यदि आप साइकिल के एक पहिए को घुमाते हैं, तो वह घूर्णन करता है। यह दोनों ही दिशाओं, अर्थात् दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं में घूर्णन कर सकता है। #+l,#दक्षिणावर्त घूर्णन और +ll,#वामावर्त घूर्णन में से प्रत्येक के लिए तीन उदाहरण दीजिए।

जब कोई वस्तु घूर्णन करती है, तो उसके आकार और माप में कोई परिवर्तन नहीं होता है। घूर्णन उस वस्तु को एक निश्चित बिंदु के चारों तरफ घुमाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का**

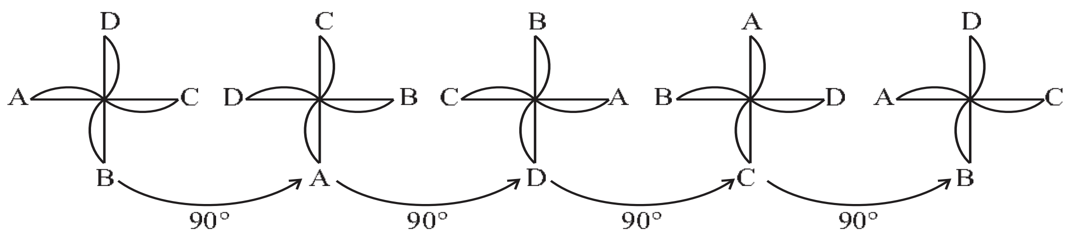
केंद्र +fhqwuh#ri#urwdwlrq,#कहलाता है। घड़ी की सुईयों के घूर्णन का केंद्र क्या है ? इसके बारे में सोचिए।

घूर्णन के दौरान घूमे गए कोण को **घूर्णन कोण +dqjoh#ri#urwdwlrq,#**कहते हैं। आप जानते हैं कि एक पूरे चक्कर में 693°##का घूर्णन होता है। +l,#एक आधे या अर्ध चक्कर और #+ll,#एक चौथाई चक्कर के घूर्णन कोणों के क्रमश: क्या माप हैं ? एक अर्ध चक्र का अर्थ 4;3°#का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ <3°#का घूर्णन है।

जब 12 बजते हैं, तो घड़ी की दोनों सुइयाँ एक साथ होती हैं। 3 बजने तक मिनट की सुई तो तीन पूरे चक्कर लगा लेती है, परंतु घंटे की सुई केवल एक-चौथाई चक्कर ही लगा पाती है। 6 बजे की उनकी स्थितियों के बारे में आप क्या कह सकते हैं ?

क्या आपने कभी कागज़ की हवाई चकरी (या फिरकी) +sdshu#zlqgploo, बनाई है ? आकृति में दिखाई गई कागज़ की हवाई चकरी सममित दिखाई देती है +आकृति#47144,/#परंतु आपको इसकी कोई सममिति रेखा प्राप्त नहीं होती है। इसको किसी प्रकार से मोड़ने पर भी दोनों आधे भाग संपाती नहीं होंगे। यदि आप इसके केंद्र (बीच) वाले स्थिर (या निश्चत) बिंदु के परित <3°#के कोण पर घुमाएँ, तो आप देखेंगे की हवाई चकरी का आकार, आकृति 14.11 की स्थिति के अनुसार, पहले जैसा ही है। हम कहते हैं कि चकरी में एक घूर्णन सममिति +urwdwlrqdo#v|pphwu|,#है।

आकृति#47144

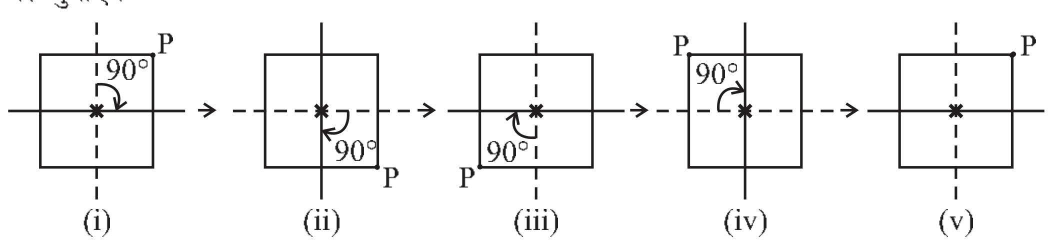


आकृति 47145

एक पूरे चक्कर में, ऐसी **चार स्थितियाँ** हैं (<3°/#4;3°/#5:3°#और#693° के कोणों पर घुमाने या घूर्णन करने पर), जब चकरी पहली जैसी ही दिखती है। (आकृति 14.12)। इसी कारण, हम कहते हैं कि चकरी में **क्रम** 4 (**rughu#7**) की घूर्णन सममिति है।

घूर्णन सममिति का एक और उदाहरण देखिए। एक वर्ग पर विचार कीजिए, जिसका एक कोना (या शीर्ष) S है (आकृति 14.13)।

आइए इस वर्ग के केंद्र को   से अंकित करके इसके परित इस वर्ग को एक-चौथाई चक्कर पर घुमाएँ।



आकृति#147146

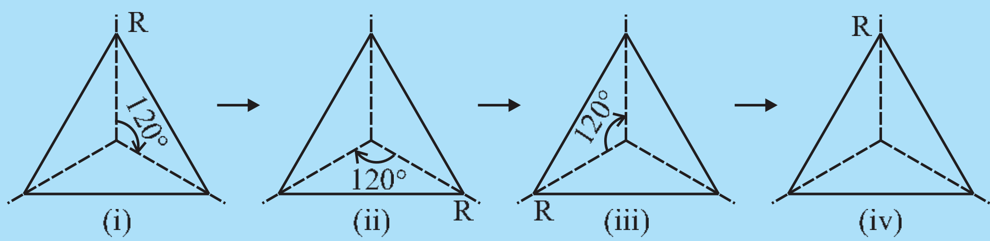
आकृति 14.13#+l,#इसकी प्रारंभिक स्थिति है। केंद्र के चारों ओर <3°#घूमाने पर आकृति 14.13#+ll,#प्राप्त होती है। अब बिंदु S#की स्थिति को देखिए। वर्ग को पुन: <3°##के कोण पर घुमाइए (घूर्णन दीजिए)। आपको आकृति 14.13+lll, प्राप्त होती है। इस प्रकार, जब आप वर्ग को चार एक-चौथाई चक्कर घुमा देते हैं, तो वह अपनी प्रारंभिक स्थिति पर आ जाती है। अब यह आकृति 14.13#+l, जैसी ही दिखती है। इसे S#द्वारा ली गई विभिन्न स्थितियों से देखा जा सकता है।

इस प्रकार, एक वर्ग में उसके केंद्र के चारों ओर **क्रम 4 की घूर्णन सममिति** होती है। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में,

+l, घूर्णन का केंद्र वर्ग का केंद्र है। +ll, घूर्णन का कोण <3°#है।
+lll, घूर्णन की दिशा दक्षिणावर्त है। +ly, घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

प्रयास कीजिए

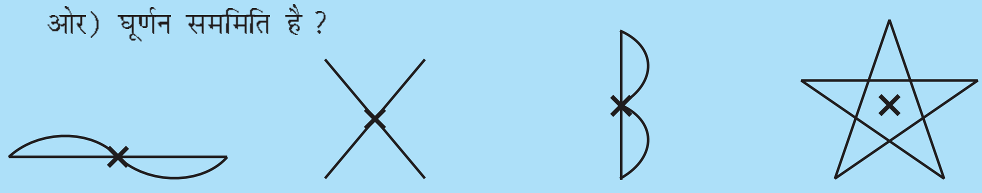
4l +d, क्या अब आप एक समबाहु त्रिभुज के लिए, घूर्णन सममिति के क्रम को बता सकते हैं (आकृति 14.14)?



आकृति#47147

+e, जब उपरोक्त त्रिभुज को उसके केंद्र के परित (चारों ओर)#453° के कोण पर घुमाया जाता है, तो कितनी स्थितियों में त्रिभुज (स्थिति के अनुसार) पहले जैसा ही लगता है?

5l निम्नलिखित में से कौन-से आकारों (आकृति 14.15) में अंकित बिंदु के परित (चारों ओर) घूर्णन सममिति है?



आकृति#47148

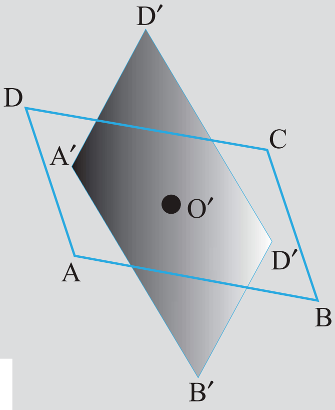
इन्हें कीजिए

दो एक जैसे (सर्वासम समांतर चतुर्भुज खींचिए, एक समांतर चतुर्भुज DEFG#एक कागज़ पर तथा दूसरा समांतर चतुर्भुज D*E*F*G*#एक पारदर्शक शीट (wudqvsduhqw#vkhhw, पर। उनके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदुओं को क्रमश: R#और#R*#से अंकित (या व्यक्त) कीजिए (आकृति 14.16)।

समांतर चतुर्भुजों को इस प्रकार रखिए कि#D′#शीर्ष D#पर रहे,#E′#शीर्ष E#पर रहे, इत्यादि।

इन आकारों में, अब बिंदु R#पर एक पिन को लगाइए। अब पारदर्शक शीट को दक्षिणावर्त दिशा में घुमाइए। एक पूरे चक्कर में पारदर्शक शीट पर बना आकार कागज़ पर बने आकार से कितनी बार संपाती होता है? इसमें घूर्णन सममिति का क्या क्रम है?

वह बिंदु, जहाँ हमने पिन लगाई है, घूर्णन का केंद्र है। इस स्थिति में, यह विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु है।

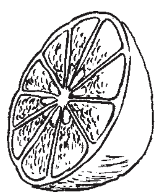


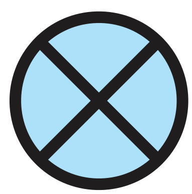
आकृति#47149

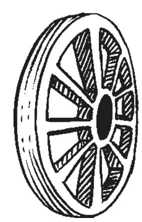
प्रत्येक वस्तु (या आकृति) में, क्रम 1 की घूर्णन सममिति होती है, क्योंकि 693°##के घूर्णन के बाद (अर्थात् पूरे एक चक्कर के बाद) वह अपनी प्रारंभिक स्थिति में आ जाता है। ऐसी स्थितियों में हमारी कोई रूचि नहीं होगी।

आपके परिवेश में अनेक ऐसे आकार हैं जिनमें घूर्णन सममिति होती है (आकृति 14.17)।

उदाहरणार्थ, जब कुछ फलों को काटते हैं, तो उनके अनुप्रस्थ काट **+furvv0vhfwlrq,**#ऐसे आकारों के होते हैं, जिनमें घूर्णन सममिति होती है। जब आप इन्हें देखेंगे तो आप आश्चर्यचकित हो सकते हैं [आकृति 14.17 (1)]।


फल
+l,


सड़क संकेत
+ll,


पहिया
+lll,

आकृति#4714:

ऐसे कई सड़क संकेत#+urdg#vljqv,#भी हैं, जो घूर्णन सममिति प्रदर्शित करते हैं। अगली बार जब आप किसी व्यस्त सड़क पर घूमने निकलें, तो ऐसे सड़क संकेतों को पहचानिए और उनकी घूर्णन सममिति के क्रमों को ज्ञात कीजिए ^आकृति#4714:+ll,‘।

घूर्णन सममिति के कुछ अन्य उदाहरणों के बारे में सोचिए। प्रत्येक स्थिति में, निम्नलिखित की चर्चा कीजिए :

+l, घूर्णन का केंद्र

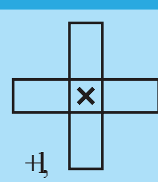
+ll, घूर्णन का कोण

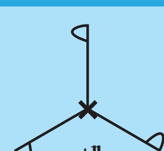
+lll, घूर्णन किस दिशा में किया गया है

+ly, घूर्णन सममिति का क्रम

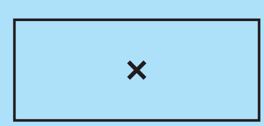
प्रयास कीजिए

दी हुई आकृतियों के लिए #से अंकित बिंदु के परित घूर्णन सममिति का क्रम बताइए (आकृति 14.18)।


+l,

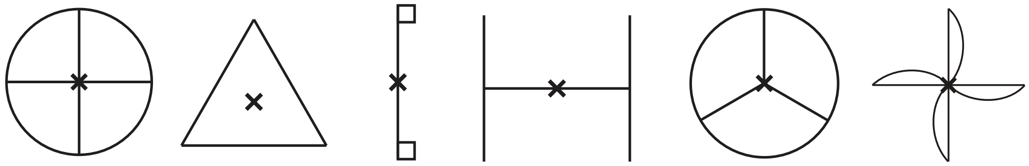

+ll,

आकृति#4714;


+lll,

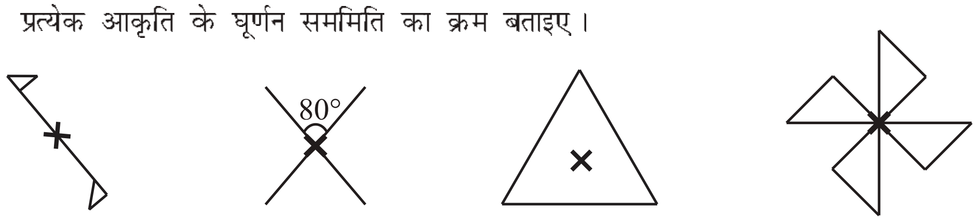
प्रश्नावली 4715

4. निम्नलिखित आकृतियों में से किन आकृतियों में 1 से अधिक क्रम की घूर्णन सममिति है?

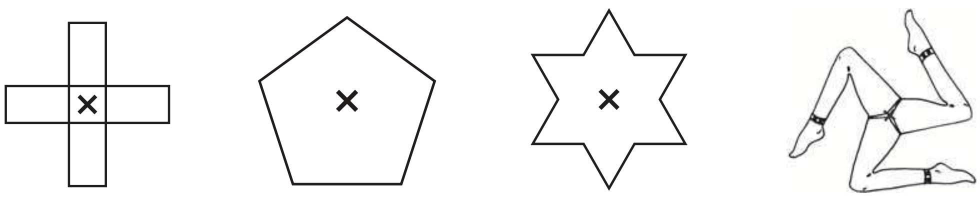


+d, +e, +f, +g, +h, +i,

5. प्रत्येक आकृति के घूर्णन सममिति का क्रम बताइए।



+d, +e, +f, +g,

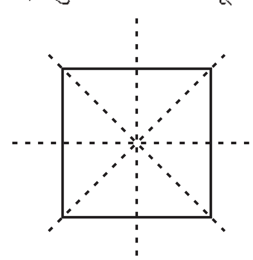


+h, +i, +j, +k,

रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति

आप अभी तक अनेक आकारों और उनकी सममितियों को देखते आ रहे हैं। अब तक आपने यह समझ लिया होगा कि कुछ आकारों में केवल रैखिक सममिति होती है, कुछ में केवल घूर्णन सममिति होती है तथा कुछ आकारों में रैखिक तथा घूर्णन दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं।

उदाहरणार्थ, एक वर्ग के आकार को देखिए (आकृति 14.19)।
इसकी कितनी सममित रेखाएँ हैं?
क्या इसमें कोई घूर्णन सममिति है?
यदि उत्तर 'हाँ' है, तो इस घूर्णन सममिति का क्रम क्या है?
इसके बारे में सोचिए।



आकृति#4714<

एक वृत्त सबसे अधिक पूर्ण सममित आकृति है, क्योंकि इसको इसके केंद्र के परित किसी भी कोण पर घुमा कर वही आकृति प्राप्त की जा सकती है, अर्थात् इसमें अपरिमित रूप से अनेक क्रम की घूर्णन सममिति है तथा साथ ही इसकी अपरिमित सममित रेखाएँ हैं। वृत्त के किसी भी प्रतिरूप को देखिए। केंद्र से होकर जाने वाली प्रत्येक रेखा (अर्थात् प्रत्येक व्यास) परावर्तन सममिति की एक सममिति रेखा है तथा केंद्र के परित प्रत्येक कोण के लिए इसकी एक घूर्णन सममिति है।

इन्हें कीजिए

अंग्रेज़ी वर्णमाला के कुछ अक्षरों में अद्भुत एवं आकर्षक सममितीय संरचनाएँ +vwuxfwxuhv,#हैं । किन बड़े अक्षरों में केवल एक ही सममित रेखा है +जैसे#H, ?#किन बड़े अक्षरों में क्रम 2 की घूर्णन सममिति है#जैसे L, ?

उपरोक्त प्रकार से सोचते हुए, आप निम्नलिखित सारणी को भरने में समर्थ हो पाएँगे:

वर्णमाला का अक्षर	रैखिक सममिति	सममित रेखाओं की संख्या	घूर्णन सममित	घूर्णन सममिति का क्रम
Z	नहीं	3	हाँ	5
S				
	हाँ		हाँ	
	हाँ		हाँ	
	हाँ			
			हाँ	

प्रश्नावली 4716

41 किन्हीं दो आकृतियों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।

51 जहाँ संभव हो, निम्नलिखित की एक रफ़ आकृति खींचिए :

+l, एक त्रिभुज, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।

+ll, एक त्रिभुज, जिसमें केवल रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।

+lll, एक चतुर्भुज जिसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति हो, परंतु रैखिक सममिति न हो।

+ly, एक चतुर्भुज जिसमें केवल रैखिक सममिति हो और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।

61 यदि किसी आकृति की दो या अधिक सममित रेखाएँ हों, तो क्या यह आवश्यक है कि उसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति होगी ?

71 रिक्त स्थानों को भरिए :

#आकार	वर्ग	आयत	समचतुर्भुज	समबाहु त्रिभुज	समषड्भुज	वृत्त	अर्धवृत्त
घूर्णन का केंद्र							
घूर्णन सममिति का क्रम							
घूर्णन का कोण							

8l ऐसे चतुर्भुजों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।

9l किसी आकृति को उसके केंद्र के परित 93°#के कोण पर घुमाने पर, वह उसकी प्रारंभिक स्थिति जैसी ही दिखाई देती है। इस आकृति के लिए ऐसे कौन-से अन्य कोणों के लिए भी हो सकता है ?

:1 क्या हमें कोई ऐसी क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति प्राप्त हो सकती है, जिसके घूर्णन के कोण निम्नलिखित हों ?

+l, 78°   +ll, 4:°

हमने क्या चर्चा की ?

4l एक आकृति मे **रैखिक सममिति** तब होती है, जब कोई ऐसी रेखा प्राप्त की जा सके जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, उसके दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाएँ।

5l सम बहुभुजों में बराबर भुजाएँ और बराबर कोण होते हैं। उनकी अनेक अर्थात् एक से अधिक, सममित रेखाएँ होती हैं।

6l प्रत्येक सम बहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ होती हैं।

समबहुभुज	समषड्भुज	समपंचभुज	वर्ग	समबाहु त्रिभुज
सममित रेखाओं की संख्या	9	8	7	6

7l दर्पण परावर्तन से ऐसी सममिति प्राप्त होती है, जिसमें बाएँ-दाएँ अभिमुखों का ध्यान रखना होता है।

8l घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिंदु के परित घुमाया जाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का केंद्र** कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे **घूर्णन का कोण** कहते हैं। आधे या अर्ध चक्कर का अर्थ 4;3° का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ <3° का घूर्णन है। घूर्णन दक्षिणावर्त और वामावर्त दोनों ही दिशाओं में हो सकता है।

9l यदि घूर्णन के बाद, वस्तु, स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमें **घूर्णन सममिति** है।

:1 एक पूरे चक्कर#+693°#के#में, एक वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूर्णन **सममिति का क्रम** कहलाती है। उदाहरणार्थ, एक वर्ग की घूर्णन सममिति का क्रम 4 है तथा एक समबाहु त्रिभुज की घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।

;1 कुछ आकारों में केवल एक ही सममिति रेखा होती है, जैसे अक्षर#H#कुछ में केवल घूर्णन सममिति ही होती है, जैसे अक्षर V#तथा कुछ में दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं, जैसे अक्षर K#है। सममिति का अध्ययन इसलिए महत्वपूर्ण है, क्योंकि इसका दैनिक जीवन में अधिकांशत: प्रयोग होता है तथा इससे भी अधिक महत्व इस कारण है कि यह हमें सुंदर एवं आकर्षक डिज़ाइन प्रदान कर सकती है।

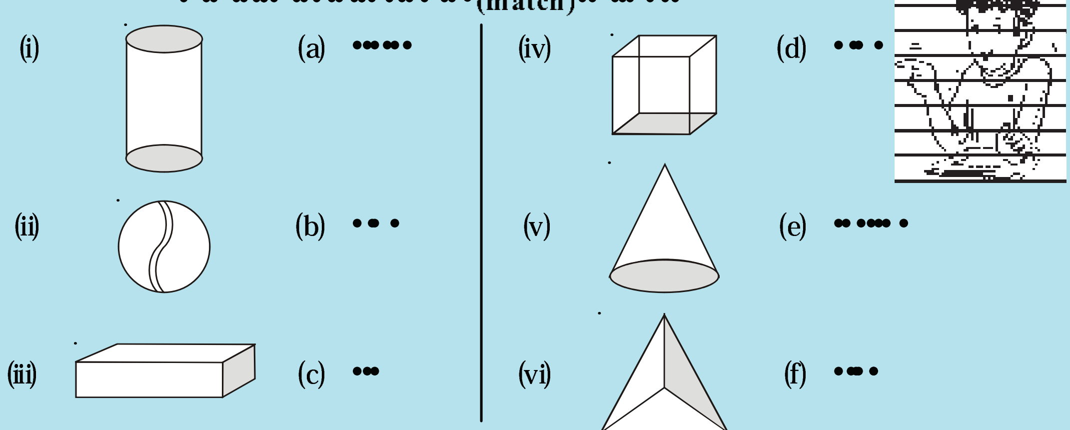
15

(dimensions)

(common)

(threedimensional shapes)

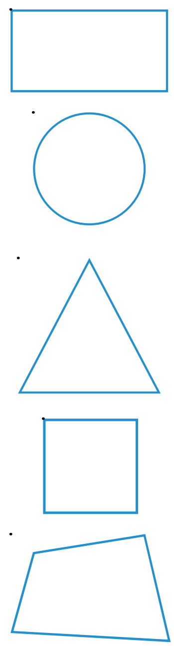
(match)



15.1

(two dimensional)

15.2):



(i) (a)

(ii) (b)

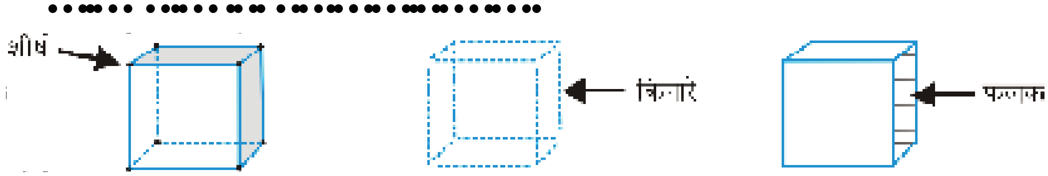
(iii) (c)

(iv) (d)

(v) (e)

15.2

2-D 3-D

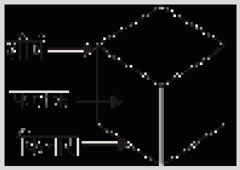
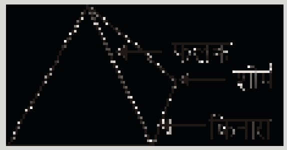
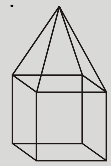
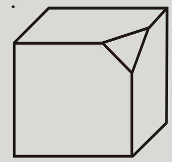


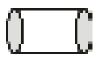
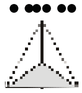
(i) (ii) (iii)

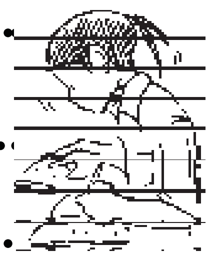
15.3

(vertices) (edges) (faces)

15.1

				
(F)	6	4		
(E)	12			
(V)	8	4		



3-D 2-D

(net)

3-D

(box) (flat)

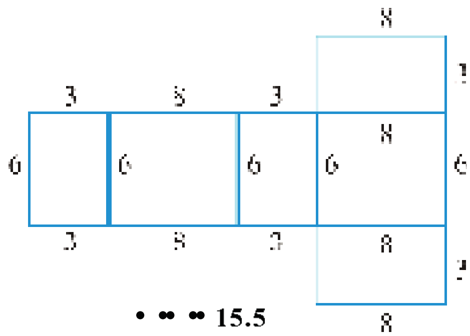
2-D

(15.4 (i)) (15.4 (ii))

3-D (15.4 (iii))

(i) (ii) (iii)

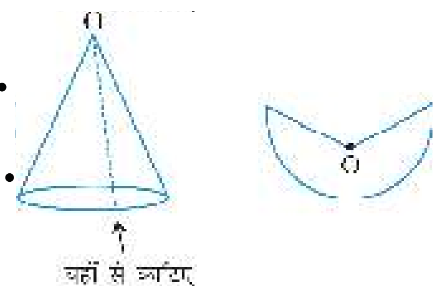
15.4



15.5

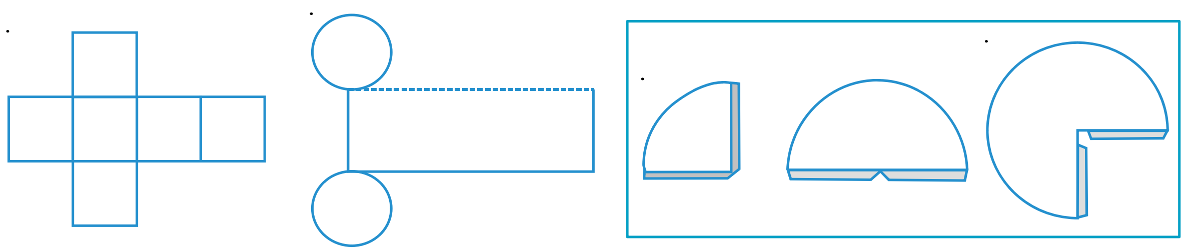
(15.5) (enlarge)

(units) (cuboid) 3-D (15.6)



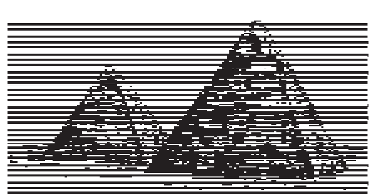
15.6

(15.7) 3-D (clips)

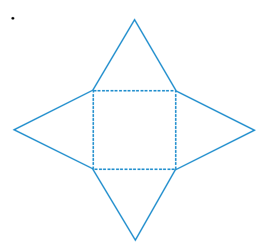


(i) (ii) 15.7 (iii)

(Great Pyramid) (15.8)

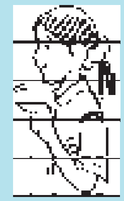


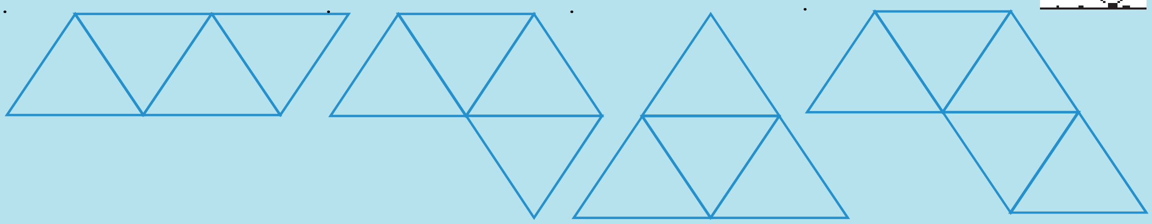
15.8



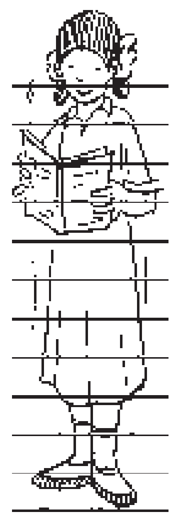
15.9

(15.10) (tetrahedron)

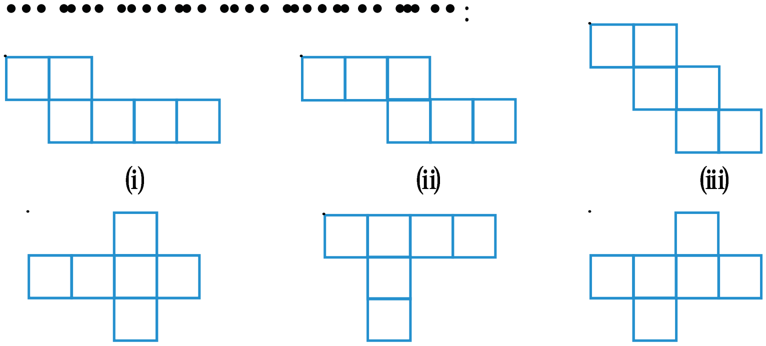




15.10



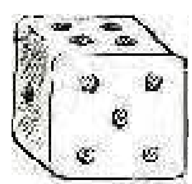
1.

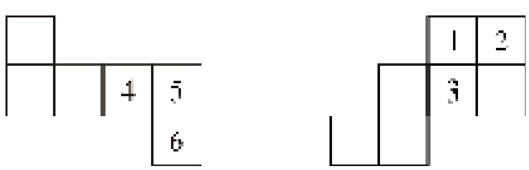


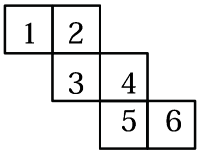
(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

2. (dice) (dots)

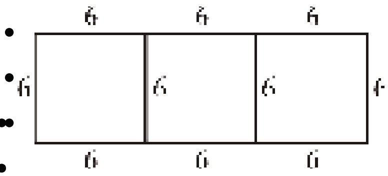




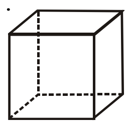


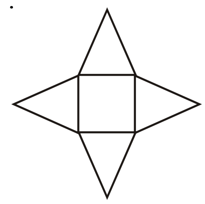
3. [illegible]

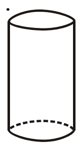
4. [illegible]

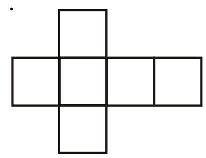


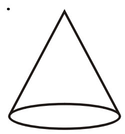
5. [illegible]

(a) 

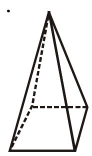
(i) 

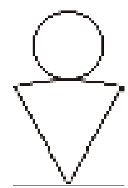
(b) 

(ii) 

(c) 

(iii) 

(d) 

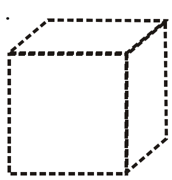
(iv) 

[illegible]

[illegible] 3-D [illegible] 3-D [illegible]

[illegible]

[illegible]



[illegible] 15.11

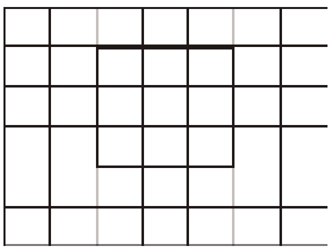
15.4.1 [illegible]

[illegible] ([illegible] 15.11) [illegible]

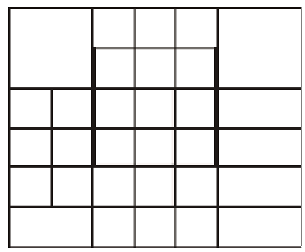
(oblique sketch)

$3 \times 3 \times 3$

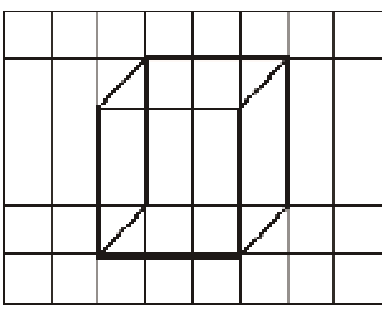
(15.12)



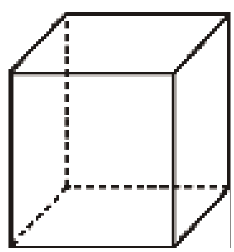
1



2



3



4

15.12

(i)

(ii)

(isometric sheet)

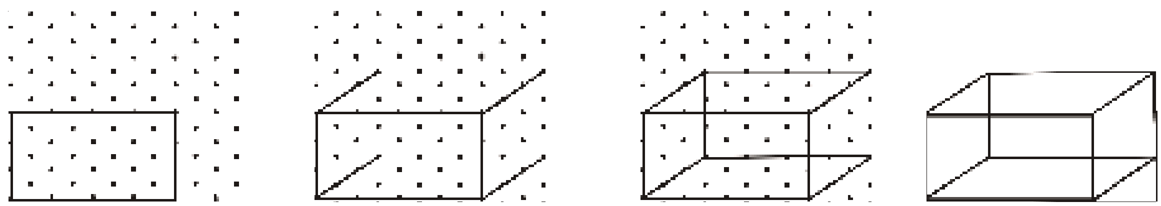
4 cm 3 cm 3 cm

15.4.2

(sample)

$4 \times 3 \times 3$

(15.13)



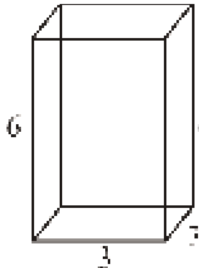
1 — 4×3

2

3

4

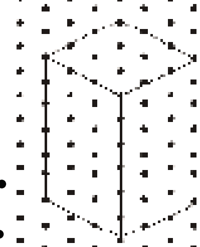
15.13



15.14 (i)

(15.14 (i))

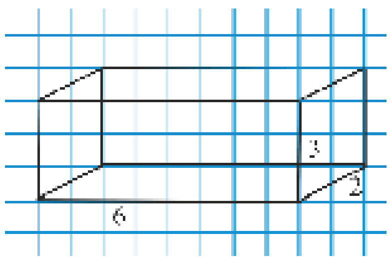
15.14 (ii)



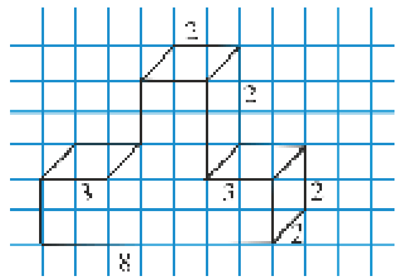
15.14 (ii)

(i) (ii) (iii)

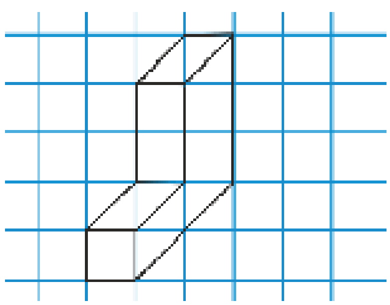
1.



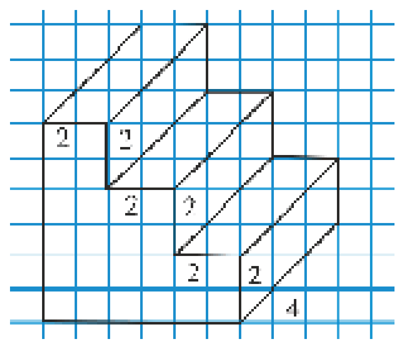
(i)



(ii)



(iii)



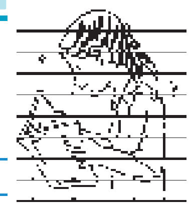
(iv)

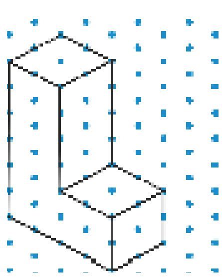
15.15 (i) - (iv)

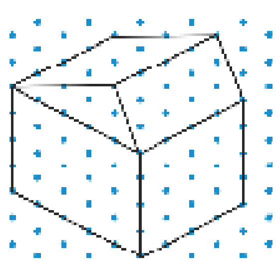
2. cm cm cm

3. cm

4.





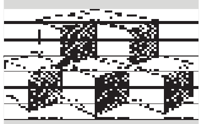


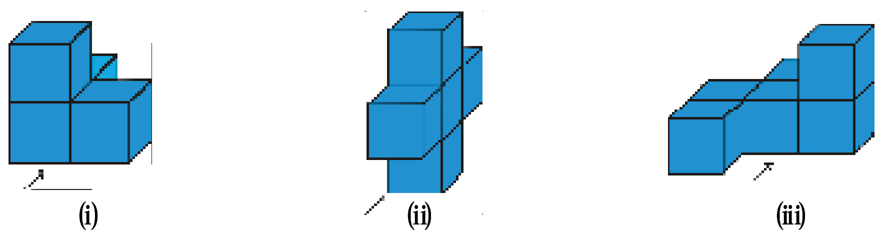
5. (i) (ii)

(a) cm cm cm

(b) cm

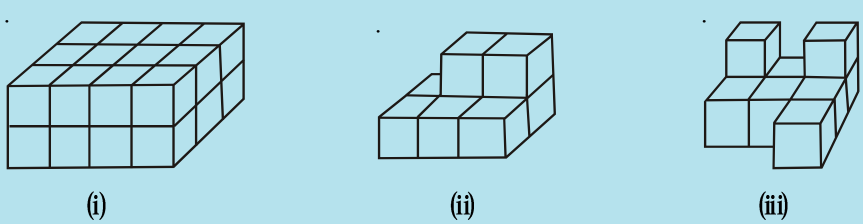
15.4.3



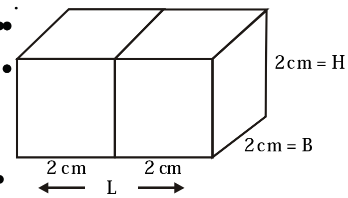


15.16

(15.17)



15.17



15.18

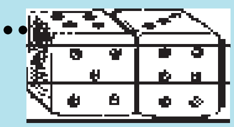
cm × cm × cm

(15.18)

2 + 2 =

4 cm = cm = cm

1.



15.19

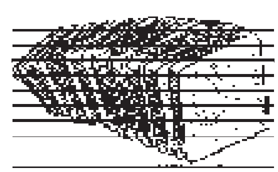
(a) 5 + 6 (b) 4 + 3

2. cm

3-D

15.5.1

(bread) (15.20)

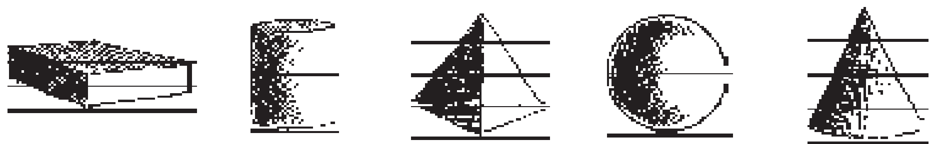


15.20

(cross section)

(models)

(rough)



15.21

1.

(i) (ii)

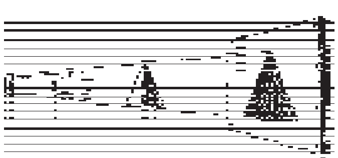
(a) (b) (c)

(d) (e)

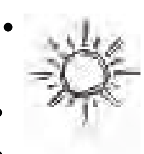
15.5.2

15.22

(shadow play)



15.23

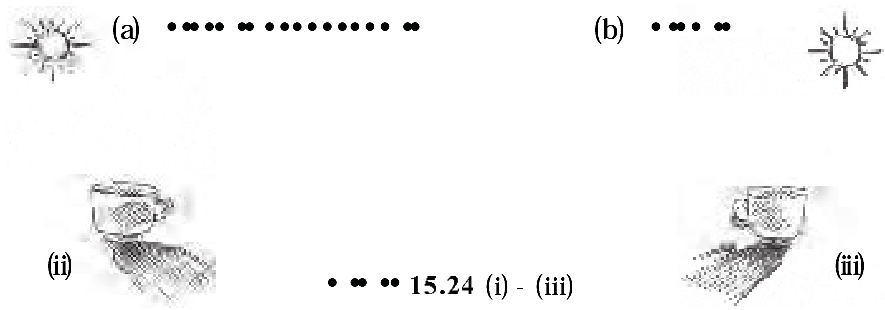


(overhead projector)

(i)

(a)

(b)

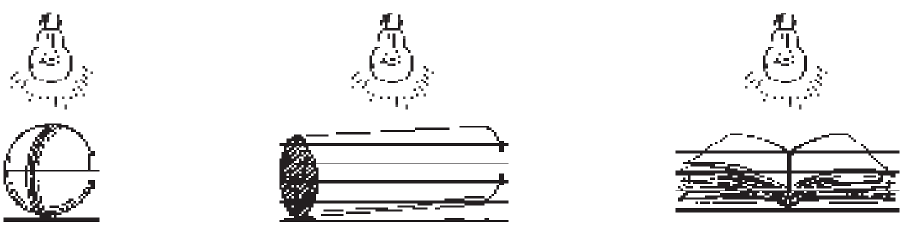


(ii)

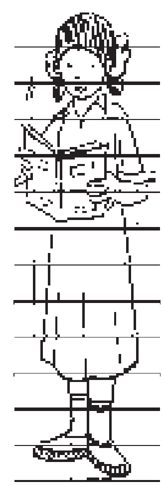
(iii)

15.24 (i) - (iii)

1.

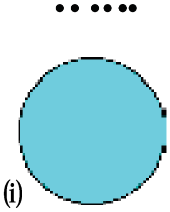
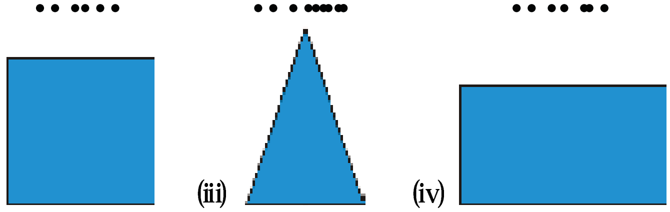


(i) (ii) (iii)



2. 3-D

(i) (ii) (iii) (iv)

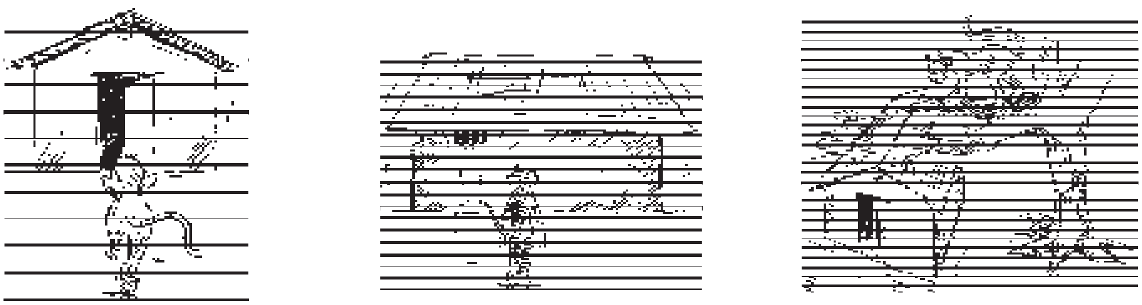
3.

(i)

(ii)

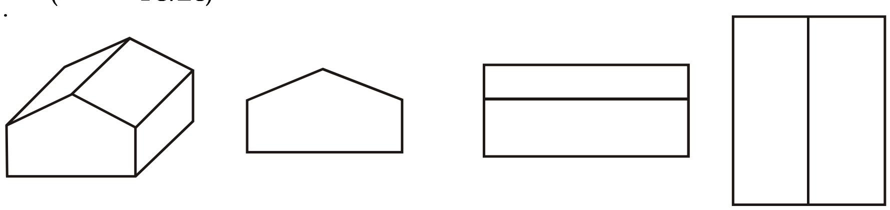
15.5.3

(15.25)

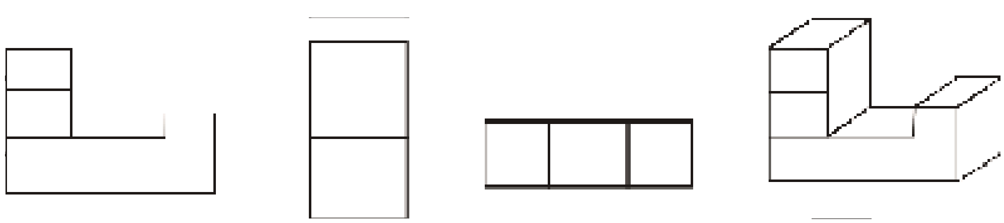


15.25

(15.26)

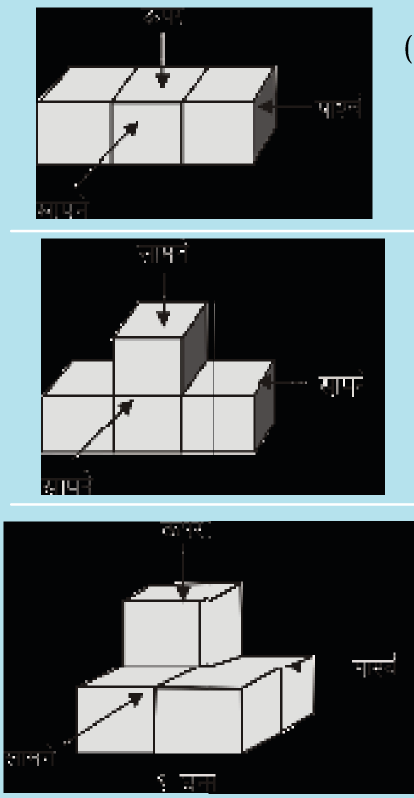


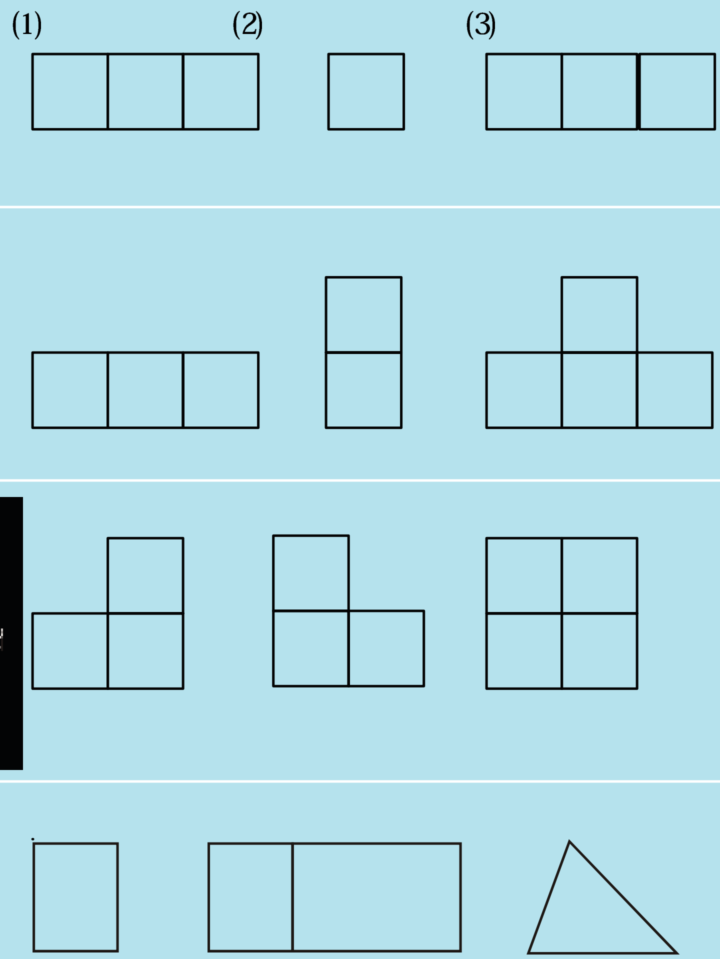
15.26



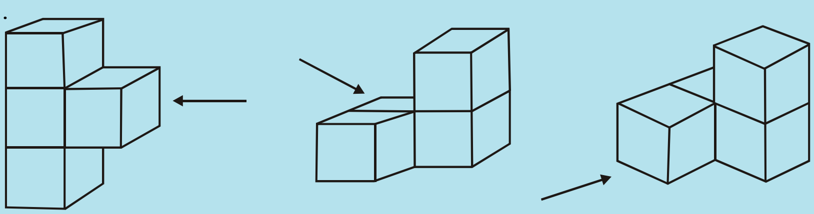
15.27

1.





2.



(i) (ii) (iii)

1.

2. 2-D

3-D

3.

4.

5.

3-D 2-D

6.

(a)

(b)

7.

8.

(a)

(b) 3-D 2-D

(c)