गणित

कक्षा 8 के लिए पाठ्यपुस्तक

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन कर सकते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक के सलाहकार डॉ. हृदयकांत दीवान की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम, विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रो. मृणाल मिरी और प्रो. जी.पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित, राष्ट्रीय मानीटरिंग समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नयी दिल्ली
30 नवंबर 2007

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न, समाजवादी, पंथ-निरपेक्ष, लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को:

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**
प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में** व्यक्ति की गरिमा और
राष्ट्र की एकता और अखंडता
सुनिश्चित करने वाली बंधुता बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो ह ाार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

प्रस्तावना

प्रस्तुत पुस्तक उच्चतर प्राथमिक शृंखला की अंतिम पुस्तक है। गणित अधिगमन को भिन्न प्रकार से परिभाषित करना एक रोचक यात्रा रही है। ऐसी सामग्री की रचना करते समय, जो इस स्तर के शिक्षार्थियों की रुचि को संबोधित करे तथा उनके लिए एक पर्याप्त और सुगम्य चुनौती हो, गणित की प्रकृति को सुरक्षित करने और यह प्रश्न कि गणित क्यों पढ़ें, को सम्मिलित करने का प्रयास किया गया है। गणित के उद्देश्य पर अनेक दृष्टिकोण रहे हैं। ये दृष्टिकोण पूर्णतया उपयोगी से संपूर्णतया सौंदर्यपूर्ण या सुरुचिपूर्ण अवबोधनों तक विचरित हैं। इन दोनों का ही अंततः सार है कि अवधारणों में न उलझना तथा जीवन में प्रतिभागी बनने के लिए शिक्षार्थी को उपलब्ध उपकरणों में संवर्धन करना। NCF में विचारों और शायद अनुभवों के भी गणितीयकरण की क्षमता विकसित करने पर बल दिया गया है। वह क्षमता जिससे एक समृद्ध जीवन और आसपास के परिवेश से अर्थपूर्ण संबंध ज्ञात करने के संघर्ष में गणित द्वारा प्रदान किए गए विचारों और रूपरेखा को समझने में सहायता होती है।

इसे समझना तक भी सरल नहीं है, इसको क्रियान्वित करना तो और भी अधिक कठिन है। परंतु NCF ने इसमें एक और कठिन लक्ष्य जोड़ दिया है। यह लक्ष्य है कि कक्षा में या उसके बाहर गणित करने में उस आयु के प्रत्येक व्यक्ति को संबद्ध किया जाए। यही वह उद्देश्य है जिसे हम इस शृंखला में प्रेरित करने का प्रयास करते आ रहे हैं।

इसलिए हमने बच्चों को चिंतन में व्यस्त रखने, हल की गई समस्याओं / कार्यों और उनके विचारों को तर्कसंगत रूप से स्वयं अपने नियम और परिभाषाएँ रचित करने के लिए स्थान प्रदान किया है। बल इस बात पर नहीं है कि एल्गोरिथ्मों को याद रखा जाए, जटिल अंकगणितीय समस्याओं को हल किया जाए या उपपत्तियों को याद रखा जाए, अपितु बल इस बात पर है कि यह समझना कि गणित कैसे कार्य करती है तथा उस विधि की पहचान करने में समर्थ होना है जिससे समस्याएँ हल करने की ओर अग्रसर होने में सहायता होती है।

सबसे महत्त्वपूर्ण चिंता हमारे सम्मुख यह सुनिश्चित करने की थी कि इस स्तर पर सभी विद्यार्थी गणित सीखें तथा गणित को दैनिक जीवन से संबंधित करने में विश्वस्तता अनुभव करना प्रारंभ करने लगें। हमने पुस्तक को पढ़ने में बच्चों की सहायता करने तथा प्रत्येक चरण पर जहाँ नयी अवधारणा प्रस्तुत की जाती है, उन्हें रोकने और चिंतन कराने का प्रयत्न किया है। इस पुस्तक की भयावहता को कम करने के लिए, हमने आकृतियों और आरेखों का प्रयोग किया है। ये आकृति और आरेख पाठ्यसामग्री के साथ मिलकर बच्चे को अवधारणा समझने में सहायता करते हैं। पूरी शृंखला में और इस पुस्तक में भी, हमने तकनीकी शब्दों के प्रयोग और जटिल सूत्रों से बचने का प्रयत्न किया है। हमने अनेक बातें विद्यार्थियों पर उनकी व्याख्या करने और उन्हें स्वयं अपने शब्दों में लिखने के लिए छोड़ दी हैं।

हमने एक ऐसी भाषा का प्रयोग करने का प्रयास किया है जिसे बच्चे आसानी से समझ सकें। कुछ बातों पर ध्यान आकर्षित करने के लिए विज्ञापन-संकेतों का प्रयोग करके लंबे स्पष्टीकरणों के भार को कम करने का प्रयास किया गया है। ये आकृतियाँ और पूरक, एकदिष्टता को तोड़ने तथा संदर्भ प्रदान करने का भी प्रयत्न करते हैं।

कक्षा 8 कक्षा 9 के लिए एक सेतु है, जहाँ बच्चे अधिक औपचारिक गणित करेंगे। यहाँ प्रयत्न यह किया गया है कि कुछ विचारों को ऐसे रूप में दिया जाए, जो औपचारिक बनने की ओर अग्रसर हों। उपरोक्त पुस्तक में सम्मिलित कार्यों में यह आशा की जाती है कि बच्चा ऐसी भाषा के निरंतर प्रयोग से व्यापकीकरण करे।

इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने वाले दल में अनुभवी तथा बच्चों द्वारा गणित सीखने को महत्त्व देने वाले अध्यापक सम्मिलित थे। इस दल में ऐसे भी सदस्य थे जिन्हें गणित शिक्षण-अधिगम पर अनुसंधान का अनुभव था तथा बच्चों के लिए सामग्री निर्मित करने का भी अनुभव था। इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करते समय, कक्षा 6 और 7 की पाठ्यपुस्तकों

पर प्राप्त सुझावों को ध्यान में रखा गया है। पुस्तक विकसित करने की इस प्रक्रिया में पांडुलिपि पर आयोजित समीक्षा कार्यशाला में अध्यापकों के साथ हुई चर्चाएँ भी सम्मिलित हैं।

मैं, प्रोफ़ेसर कृष्ण कुमार, *निदेशक* एन.सी.ई.आर.टी., प्रोफ़ेसर जी. रविन्द्रा, *संयुक्त निदेशक* एन.सी.ई.आर.टी. तथा प्रोफ़ेसर हुकुम सिंह, *अध्यक्ष* डी.ई.एस.एम. के प्रति अपने दल की ओर से आभार प्रकट करना चाहूँगा, जिन्होंने हमें स्वतंत्रता और पूर्ण सहायता के साथ यह कार्य करने का अवसर प्रदान किया। मैं विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रो. जे. वी. नारलीकर का भी उनके सुझावों के लिए आभारी हूँ। मैं एन.सी.ई.आर.टी. से अपने दल के सदस्यों प्रो. एस. के. सिंह गौतम और डॉ. वी.पी. सिंह तथा विशेष रूप से डॉ. आशुतोष के. वझलवार का आभारी हूँ, जिन्होंने इस कार्य का समन्वयन किया तथा संभव व्यवस्थाएँ कीं। अंत में, मुझे एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग का उसकी सहायता और सलाह के लिए तथा विद्या भवन के उन व्यक्तियों का भी, जिन्होंने इस पुस्तक के निर्माण में सहायता की, आभार प्रकट करना चाहिए। यह कहने की आवश्यकता नहीं है, परंतु मैं यह कहे बिना रह नहीं सकता कि सभी लेखकों ने एक दल की तरह कार्य किया तथा हमने एक दूसरे के विचारों और सलाह को स्वीकार किया। हमने अपनी संपूर्ण क्षमता के साथ कार्य किया है और आशा करते हैं कि हम अपने सम्मुख प्रस्तुत चुनौती के साथ कुछ न्याय कर पाए हैं।

सामग्री विकसित करने की प्रक्रिया एक सतत प्रक्रिया है और हम इस पुस्तक को और भी अधिक अच्छा बनाना चाहेंगे। इस पुस्तक पर सुझावों और टिप्पणियों का सहर्ष स्वागत किया जाएगा।

डॉ. एच. के. दीवान
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक विकास समिति

शिक्षक के लिए दो शब्द

यह इस शृंखला की तीसरी और अंतिम पुस्तक है। यह गणित के गूढ़ सिद्धांतों एवं विचारों को समझने में विद्यार्थियों की सहायता के लिए शुरू की गई प्रक्रिया का विस्तार है। हमारे विद्यार्थियों को गणितीय विचारों से जूझने एवं उनका उपयोग सीखने के लिए तर्कसंगत आधार की आवश्यकता है जिससे वे गूढ़ रहस्यों को समझने, अभिगृहीतों के उपयोग और नए सूत्रों की रचना करने योग्य बनें। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 (NCF-2005) में उल्लेखित मुख्य बिंदु बच्चों में गणित की सहायता से व्यापक योग्यताएँ विकसित करने, जटिल परिकलनों से दूर रहने और कलन विधि से समझ पैदा करने एवं समझ का एक ढाँचा तैयार करने का सुझाव देते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, गणितीय विचार केवल बताने से विकसित नहीं होते हैं। केवल व्याख्या करने से भी ये विचार बच्चों को समझ में नहीं आते हैं। बच्चों को अवधारणाओं की स्वयं अपनी रूपरेखा की आवश्यकता है और उन्हें एक ऐसे कक्षा-कक्ष की आवश्यकता है जहाँ पर वे अपने विचारों पर चर्चा कर सकें, अपनी समस्याओं का समाधान ढूँढ़ सकें, नयी समस्याएँ बना सकें, समस्या हल करने की अपनी विधि ढूँढ़ सकें और स्वयं अपनी परिभाषाएँ तैयार कर सकें।

जैसा कि हम पहले कह चुके हैं, बच्चों को यह सीखने में सहायता करना आवश्यक है कि वे पाठ्यपुस्तक एवं गणित से संबंधित दूसरी पुस्तकों को समझ के साथ पढ़ें। स्पष्टत: सामग्री के अध्ययन की आवश्यकता बच्चे को और अधिक गणित सीखने में सहायता करने के लिए है। कृपया कक्षा 8 में इस बात का ध्यान रखिए कि विद्यार्थियों ने क्या सीखा है और उन्हें ऐसी विषय-वस्तु पढ़ने के अधिक अवसर प्रदान कीजिए जिनमें संकेतों सहित भाषा का उपयोग किया गया हो और किसी प्रकार की अधिकता के बिना लघुता एवं संक्षिप्तता हो। इसके लिए यदि संभव है तो उन्हें दूसरी विषय-वस्तु भी पढ़ने दें। आप उनके द्वारा सीखे जा रहे भौतिक विज्ञान और रसायन विज्ञान के समीकरणों का उनके द्वारा सीखे गए गणित के विचारों के साथ संबंध स्थापित कर सकते हैं। ये विभिन्न विषयों के संदर्भ गणित के उद्देश्य एवं रूपरेखा तैयार करने में उनकी सहायता करेंगे। उन्हें तर्कसंगत तर्कों की फिर से रचना करने योग्य होने की आवश्यकता है और इन्हें दूसरे क्षेत्रों से संबंध स्थापित करते समय कुछ कारणों एवं बंधनों को समझने की आवश्यकता है। कक्षा 8 के बच्चों को इन सभी के लिए अवसर प्रदान करने की आवश्यकता है।

जैसा कि हम पहले ही ज़ोर देकर कह चुके हैं कि उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित गूढ़ होने के साथ-साथ बच्चे के अनुभव और वातावरण के अनुरूप होना चाहिए। विषय की सुलभता और उसके अनुभव से जुड़े मॉडलों (प्रतिरूपों) से उसे विचारों पर कार्य करने के लिए आगे बढ़ने की आवश्यकता है। गूढ़ तथ्यों की समझ तर्क-वितर्कों को समझने और उन्हें सूत्र रूप में वर्णित करने में सहायता करती है। अवधारणाओं के बीच परस्पर संबंधों को देखने का सामर्थ्य दूसरे विषयों में भी प्रश्नों के उत्तर देने में सहायता करता है। यह अधिक अच्छे प्रतिरूप एवं मानचित्र बनाने में, क्षेत्रफल एवं घन का मान करने में और आकारों एवं मापों में समानता देखने और समझने में हमारी सहायता करता है। यद्यपि यह बात दूसरे क्षेत्रों के ज्ञान के गणित के साथ संबंध के बारे में है, फिर भी हमारे वातावरण और जीवन में इसके अर्थ पर पुन: ज़ोर देने की आवश्यकता है।

बच्चे प्रासंगिक स्थितियों में उपयोग किए जाने वाले सिद्धांतों को पहचानने योग्य बनने के लिए समस्याओं के समाधान के लिए प्रथम चरण के रूप में समस्या का सूक्ष्म परीक्षण करने एवं समस्या के अनुरूप सूचना चुनने के योग्य बनने चाहिए। एक बार विद्यार्थी यह योग्यता प्राप्त कर लें, उसके बाद उन्हें अपने ज्ञान का उपयोग करने की विधि ढूँढ़ने और समस्या की आवश्यकतानुसार उसका हल ढूँढ़ने के योग्य बनने की आवश्यकता है। उन्हें एक समस्या को पहचानने और

उसे परिभाषित करने, संभावित हल तैयार करने और यदि आवश्यक हो तो इन चरणों को फिर से दोहराने अथवा तैयार करने की आवश्यकता है। जैसे-जैसे वे आगे बढ़ेंगे, उनका कार्य अधिक व्यापक होगा। कक्षा 8 में उनको हमें उनके द्वारा अनुसरण किए जाने वाले चरणों के बारे में सचेत रखना है। बच्चों में समस्या को विभिन्न भागों में बाँटकर उचित मॉडल तैयार करने की योग्यता विकसित करने में, स्वयं अपनी व्यूह रचना विकसित करने में एवं समस्या का विश्लेषण करने में सहायता करना अत्यंत आवश्यक है। यह कार्य किसी समस्या के समाधान के लिए नियमानुसार कलन विधि बताने के स्थान पर किया जाता है। गणित को सीखना केवल विधियों अथवा हलों को याद करना नहीं है बल्कि यह जानना भी है कि समस्या का समाधान कैसे किया जाए और समस्या के हल के लिए रुचिकर स्थितियों का निर्माण करने के योग्य कैसे बना जाए।

सहयोगात्मक अधिगम, बातचीत के माध्यम से अधिगम, एक दूसरे से सीखने की इच्छा एवं क्षमता और यह स्वीकार कर लेना कि बातचीत, शोर नहीं है और परामर्श करना किसी प्रकार का धोखा नहीं है, अध्यापक के रूप में आपकी और विद्यार्थियों की भी, सोच में परिवर्तन का एक महत्त्वपूर्ण अंग है। विद्यार्थियों को उनके स्वयं के अनुभवों के प्रसंगों से उदाहरणों में सम्मिलित करते हुए सामूहिक प्रस्तुतीकरण के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए। उनको सामूहिक रूप से पुस्तक पढ़ने के लिए और जो कुछ उन्होंने पुस्तक से समझा है उसे व्यक्त करने के लिए एवं सूत्र रूप में वर्णित करने के लिए उत्साहित करना चाहिए। मूल्यांकन पद्धति में भी इस कार्य की पहचान और मान होना चाहिए एवं कक्षा को इस प्रकार समूहों में विभाजित करना चाहिए जिससे कि सभी बच्चे एक दूसरे के साथ रहकर मौज-मस्ती से और समूह के अधिगम में अपना योगदान करें। जैसा कि आपने देखा होगा विभिन्न समूह विभिन्न व्यूह रचनाओं का उपयोग करते हैं। जब वे अपने मॉडलों एवं विचारों का उल्लेख करते हैं तो उनमें से कुछ उतने अधिक प्रभावशाली नहीं होते जितने कि दूसरे होते हैं। ये सभी उपयुक्त हैं और बच्चों के साथ इनका विश्लेषण किए जाने की आवश्यकता है। विभिन्न व्यूह रचनाओं का प्रदर्शन गणितीय समझ को गहरा करता है। प्रत्येक समूह अपनी एक स्थिति से शुरू करता है और उसे इसके लिए अवसर प्रदान किए जाने की आवश्यकता है।

गणित अधिगम के मुख्य विचारों को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत किया जा रहा है और हम चाहेंगे कि आप अपने कक्षा-कक्ष में इनका ध्यान रखें।

1. समझने के लिए जाँच-पड़ताल करना एक स्वाभाविक विधि है जिसकी सहायता से विद्यार्थी ज्ञान अर्जित करते हैं और उसकी रचना करते हैं। इस विधि से ज्ञान प्राप्त करने के लिए अनेक प्रेक्षणों का उपयोग करना पड़ सकता है। विद्यार्थियों को विभिन्न प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने एवं चुनौतीपूर्ण अनुसंधान (खोजपूर्ण, विभिन्न उत्तरों वाले, प्रासंगिक और यहाँ तक कि ज्यामिति, अंकगणित और बीजीय संबंधों में त्रुटि ज्ञात करना इत्यादि) करने की आवश्यकता है।
2. बच्चों को तर्कसंगत तर्क-वितर्क देने और उनका अनुसरण करने, प्रस्तुत तर्क-वितर्कों से बाहर निकलने का रास्ता ढूँढ़ने एवं प्रमाण की आवश्यकता की समझ सीखने की आवश्यकता है। अब बच्चे औपचारिक अवस्था में प्रवेश कर चुके हैं। उन्हें सर्जनात्मकता एवं कल्पना को धारण करने और अपने गणितीय तर्कण को मौखिक एवं लिखित दोनों रूपों में कहने के लिए प्रोत्साहित करने की आवश्यकता है।
3. गणित की कक्षा में भाषा का गणित के अधिगम से संबंध स्थापित होना चाहिए। बच्चों को अपनी भाषा और अनुभवों का उपयोग करते हुए अपने विचारों के बारे में बात करनी चाहिए। उनको अपने स्वयं के शब्द एवं भाषा का उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए परंतु धीरे-धीरे औपचारिक भाषा और संकेतों का उपयोग करने के लिए भी प्रोत्साहित करना चाहिए।
4. संख्या पद्धति का परिमेय संख्याओं एवं उनके गुणधर्मों के सामान्यीकरण तक के स्तर का अध्ययन किया जा रहा है और एक ऐसी रूप-रेखा विकसित की जा रही है जिसमें पिछली सभी पद्धतियों को परिमेय संख्याओं के व्यापक रूप के उपसमुच्चय के रूप में सम्मिलित किया गया है। सामान्यीकरण को गणितीय भाषा में प्रस्तुत करना है और बच्चों को यह देखना है कि बीजगणित और इसकी भाषा अधिकतर विषय सामग्री को सूक्ष्म सांकेतिक रूप में प्रस्तुत करने में सहायता करता है।

5. पहले की तरह बच्चों से यह अपेक्षा की जानी चाहिए कि वे अधिक से अधिक समस्याएँ पैदा करें और उनको हल करें। हम आशा करते हैं कि जैसे-जैसे बच्चे विभिन्न प्रकार की जटिल समस्याएँ पैदा करेंगे वैसे-वैसे अपने विचारों के प्रति उनका आत्मविश्वास बढ़ेगा।
6. कक्षा 8 की पुस्तक में गणित के विभिन्न रूपों को एक जगह लाने का प्रयास किया गया है और साधारण विधियों पर ज़ोर दिया गया है। ऐकिक विधि, अनुपात एवं समानुपात, ब्याज एवं लाभांश एक ही तर्कसंगत रूप रेखा के भाग हैं। गणित की किसी भी शाखा में अज्ञात राशि ज्ञात करने के लिए अचर एवं समीकरणों के विचार की आवश्यकता होती है।

हम आशा करते हैं कि यह पुस्तक आनंद के साथ बच्चों को गणित सीखने में सहायता करेगी और इस पुस्तक में सम्मिलित अवधारणाओं के प्रति बच्चों में आत्मविश्वास पैदा होगा। हम व्यक्तिगत एवं सामूहिक रूप से सोचने के लिए अवसर पैदा करने की अनुशंसा करते हैं।

इस पुस्तक के बारे में आपके विचारों एवं सुझावों का हम स्वागत करेंगे और आशा करते हैं कि अध्यापन के दौरान आपके द्वारा विकसित प्रश्नों एवं क्रियाकलापों को आप हमारे पास भेजेंगे ताकि उन्हें पुस्तक के अगले संस्करण में सम्मिलित किया जा सके। यह तभी संभव हो सकता है जब आप बच्चों को ध्यानपूर्वक सुनने के लिए समय निकालेंगे एवं कमियों को पहचानेंगे और उन्हें अपने विचारों को व्यक्त करने का अवसर प्रदान करेंगे।

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित सलाहकार समिति
जयंत विष्णु नारलीकर, *इमिरिटस प्रोफ़ेसर, अध्यक्ष*, इंटर यूनिवर्सिटी सेंटर फॉर ॲसट्रॉनॉमि एंड ॲसट्रोफिजिक्स (IUCCA), गणेशखिंड, पुणे यूनिवर्सिटी, पुणे (महाराष्ट्र)

मुख्य सलाहकार
हृदयकांत दीवान, विद्याभवन सोसायटी, उदयपुर (राजस्थान)

मुख्य समन्वयक
हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

सदस्य
अवंतिका दाम, *टी.जी.टी.*, सी.आई.ई., एक्सपेरिमेंटल स्कूल, शिक्षा विभाग, दिल्ली
अंजली गुप्ते, *अध्यापिका*, विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)
आर. आत्मारामन, *गणित शिक्षा सलाहकार*, टी.आई.मैट्रिक हायर सेकेंडरी स्कूल और ए.एम.टी.आई., चेन्नई (तमिलनाडु)
आशुतोष के. वझलवार, *प्रवाचक* (समन्वयक अंग्रेज़ी संस्करण), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एच.सी.प्रधान, *प्रोफ़ेसर*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, टी.आई.एफ.आर., मुंबई (महाराष्ट्र)
के.ए.एस.एस.वी. कामेश्वर राव, *प्रवक्ता*, रीजनल इंस्टीट्यूट ऑफ एजुकेशन, श्यामला हिल्स, भोपाल (म.प्र.)
पी. भास्कर कुमार, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, लेपाक्षी, ज़िला अनंतुर (आंध्र प्रदेश)
बी.सी. बस्ती, *वरिष्ठ प्रवक्ता*, रीजनल इंस्टीट्यूट ऑफ एजुकेशन, मैसूर (कर्नाटक)
महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
मीना श्रीमाली, *अध्यापिका*, विद्या भवन सीनियर सेकेंडरी स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)
वी.पी.सिंह, *प्रवाचक*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
राम अवतार, *प्रोफ़ेसर* (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
शैलेश शिराली, ऋषि वैली स्कूल, ऋषि वैली, मदनपल्ली (आंध्र प्रदेश)
सुरेश कुमार सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
सुजाता दास, *वरिष्ठ प्रवक्ता*, एस.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
श्रद्धा अग्रवाल, *प्रिंसिपल*, फ्लोरेट्स इंटरनेशनल स्कूल, पनकी, कानपुर (उत्तर प्रदेश)

हिंदी अनुवादक
डी.आर.शर्मा, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, मुँगेशपुर, दिल्ली
बी.एम.गुप्ता, *पी.जी.टी.* (अवकाशप्राप्त) एस.सी.ई.आर.टी., दिल्ली
महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
राजकुमार धवन, *पी.जी.टी.,पी.* ॲण्ड टी. सीनियर सेकेंडरी स्कूल, दिल्ली
संजय कुमार बोल्या, *वरिष्ठ अध्यापक*, विद्याभवन बु.मा. विद्यालय, उदयपुर

सदस्य समन्वयक
आशुतोष के. वझलवार, *प्रवाचक*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

आभार

परिषद् पाठ्यपुस्तक समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों के बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार व्यक्त करती है। प्रदीप भारद्वाज, *टी.जी.टी.* (गणित), बाल स्थली पब्लिक सेकंडरी स्कूल, किरारी, नांगलोई, नयी दिल्ली; शंकर मिश्रा, *गणित शिक्षक*, डेमॉन्स्ट्रेशन मल्टीपरपस स्कूल, आर.आई.ई., भुवनेश्वर (ओडी़सा); मनोहर एम. ढोक, *सुपरवाइज़र*, एम.पी.देव स्मृति लोकांची शाला, नागपुर (महाराष्ट्र); मंजीत सिंह जांगरा, *गणित शिक्षक*, राजकीय सीनियर सेकंडरी स्कूल, सेक्टर 4/7, गुड़गाँव (हरियाणा); के बालाजी, *टी.जी.टी.* (गणित), केंद्रीय विद्यालय नं. 1, तिरुपति (आंध्र प्रदेश); माला मणी, एमिटी इंटरनेशनल स्कूल, सेक्टर-44, नोएडा; ओमलता सिंह, *टी.जी.टी.* (गणित), प्रेज़ेंटेशन कॉन्वेंट सीनियर सेकंडरी स्कूल, दिल्ली; मंजू दत्ता, आर्मी पब्लिक स्कूल, धौला कुआँ, नयी दिल्ली; निरुपमा साहनी, *टी.जी.टी.* (गणित), श्री महावीर दिगंबर जैन सीनियर सेकंडरी स्कूल, जयपुर (राजस्थान); श्री नागेश मोने, *हेडमास्टर*, कांतीलाल पुरुषोत्तम दास शाह प्रशाला, विश्रामबाग, सांगली (महाराष्ट्र); अनिल भास्कर जोशी, *सीनियर टीचर* (गणित), मनुताई कन्या शाला, तिलक रोड, अकोला (महाराष्ट्र); डॉ. सुषमा जयरथ, *प्रवाचक*, डी. डब्ल्यू. एस., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; ईश्वर चंद्र, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

परिषद्, डॉ. आर.पी. मौर्य, *प्रवाचक*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; डॉ. संजय मुद्गल, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; डॉ. टी.पी.; शर्मा, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली द्वारा दिए गए सुझावों और टिप्पणियों के प्रति उनका आभार व्यक्त करती है।

गणित पाठ्यपुस्तक विकास समिति की कार्यशाला के दरम्यान दिए गए योगदान के लिए परिषद् निम्न प्रतिभागियों की आभारी है : श्री दीपक मंत्री, विद्याभवन बेसिक स्कूल, उदयपुर; श्री इंदर मोहन सिंह छाबरा, वी.बी.ई.आर.सी., उदयपुर।

परिषद् हिंदी रूपांतरण के पुनरावलोकन हेतु एन.सी.ई.आर.टी. में आयोजित कार्यशाला में निम्न भागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है: अशोक कुमार गुप्ता, *पी.जी.टी.*, राजकीय सर्वोदय बाल विद्यालय, आनंदवास (लोक विहार), दिल्ली; सुरेन्द्र कुमार, *टी.जी.टी.*, राजकीय सहशिक्षा सेकंडरी स्कूल, पंजाबी बस्ती, दिल्ली; ज्योती त्यागी, *टी.जी.टी.*, शारदा सेन आर.एस.के.वी., त्रिलोकपुरी, दिल्ली; राजेंद्र कुमार पूनीवाला, यू.डी.टी., गवर्नमेंट सुभाष स्कूल फॉर एक्सेलंस, बुरहानपुर (मध्य प्रदेश); चंद्रशेखर सिंह, सनबीम एकेडमी, वाराणसी, (उत्तर प्रदेश); जी.डी. ढल, *प्रवाचक* (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

पाठ्यपुस्तक विकास समिति की कार्यशालाओं में सुविधा एवं संसाधन प्रदान करने हेतु परिषद्, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर और उसके संकाय सदस्यों की आभारी है। पुस्तकालय सहायता के लिए निदेशक, सेंटर फॉर साइंस एजुकेशन एंड कम्युनिकेशन (C-SEC) दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रति भी परिषद् आभार ज्ञापित करती है।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् प्रोफ़ेसर हुकुम सिंह, *विभाग प्रमुख*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली की आभारी है।

परिषद् सज्जाद हैदर अंसारी, राकेश कुमार, प्रतुल वशिष्ठ *डी.टी.पी. ऑपरेटर*; अवध किशोर सिंह *कॉपी एडीटर*; अभिमनु मोहांती *प्रूफ रीडर*, एन.सी.ई.आर.टी.; दीपक कपूर *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी; ए.पी.सी. ऑफिस एवं प्रशासन विभाग, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. एवं प्रकाशन विभाग, एन.सी.ई.आर.टी. के प्रति हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके; और

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।

विषय सूची

भारत का संविधान

भाग-3 (अनुच्छेद 12-35)
(अनिवार्य शर्तों, कुछ अपवादों और युक्तियुक्त निर्बंधन के अधीन)
द्वारा प्रदत्त

मूल अधिकार

समता का अधिकार

- विधि के समक्ष एवं विधियों के समान संरक्षण;
- धर्म, मूलवंश, जाति, लिंग या जन्मस्थान के आधार पर;
- लोक नियोजन के विषय में;
- अस्पृश्यता और उपाधियों का अंत।

स्वातंत्र्य-अधिकार

- अभिव्यक्ति, सम्मेलन, संघ, संचरण, निवास और वृत्ति का स्वातंत्र्य;
- अपराधों के लिए दोष सिद्धि के संबंध में संरक्षण;
- प्राण और दैहिक स्वतंत्रता का संरक्षण;
- छः से चौदह वर्ष की आयु के बच्चों को निःशुल्क एवं अनिवार्य शिक्षा;
- कुछ दशाओं में गिरफ्तारी और निरोध से संरक्षण।

शोषण के विरुद्ध अधिकार

- मानव के दुर्व्यापार और बलात श्रम का प्रतिषेध;
- परिसंकटमय कार्यों में बालकों के नियोजन का प्रतिषेध।

धर्म की स्वतंत्रता का अधिकार

- अंतःकरण की और धर्म के अबाध रूप से मानने, आचरण और प्रचार की स्वतंत्रता;
- धार्मिक कार्यों के प्रबंध की स्वतंत्रता;
- किसी विशिष्ट धर्म की अभिवृद्धि के लिए करों के संदाय के संबंध में स्वतंत्रता;
- राज्य निधि से पूर्णतः पोषित शिक्षा संस्थाओं में धार्मिक शिक्षा या धार्मिक उपासना में उपस्थित होने के संबंध में स्वतंत्रता।

संस्कृति और शिक्षा संबंधी अधिकार

- अल्पसंख्यक-वर्गों को अपनी भाषा, लिपि या संस्कृति विषयक हितों का संरक्षण;
- अल्पसंख्यक-वर्गों द्वारा अपनी शिक्षा संस्थाओं का स्थापन और प्रशासन।

सांविधानिक उपचारों का अधिकार

- उच्चतम न्यायालय एवं उच्च न्यायालय के निर्देश या आदेश या रिट द्वारा प्रदत्त अधिकारों को प्रवर्तित कराने का उपचार।

अध्याय

1

परिमेय संख्याएँ

1.1 भूमिका

गणित में हमें प्राय: साधारण समीकरण दिखाई देते हैं। उदाहरणार्थ समीकरण

$$x + 2 = 13 \quad (1)$$

को $x = 11$ के लिए हल किया जाता है क्योंकि x का यह मान इस समीकरण को संतुष्ट करता है। हल 11, एक **प्राकृत संख्या** है। दूसरी तरफ समीकरण

$$x + 5 = 5 \quad (2)$$

का हल शून्य है जो एक **पूर्ण संख्या** है। यदि हम केवल प्राकृत संख्याओं तक सीमित रहें तो समीकरण (2) को हल नहीं किया जा सकता। समीकरण (2) जैसे समीकरणों को हल करने के लिए हमने प्राकृत संख्याओं के समूह में शून्य को शामिल किया और इस नए समूह को पूर्ण संख्याओं का नाम दिया। यद्यपि

$$x + 18 = 5 \quad (3)$$

जैसे समीकरणों को हल करने के लिए पूर्ण संख्याएँ भी पर्याप्त नहीं हैं। क्या आप जानते हैं 'क्यों'? हमें संख्या -13 की आवश्यकता है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है। इसने हमें **पूर्णांकों (धनात्मक एवं ऋणात्मक)** के बारे में सोचने के लिए प्रेरित किया। ध्यान दीजिए धनात्मक पूर्णांक प्राकृत संख्याओं के अनुरूप हैं। आप सोच सकते हैं कि सभी साधारण समीकरणों को हल करने के लिए हमारे पास उपलब्ध पूर्णांकों की सूची में पर्याप्त संख्याएँ हैं। निम्नलिखित समीकरणों के बारे में विचार करते हैं :

$$2x = 3 \quad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \quad (5)$$

इनका हल हम पूर्णांकों में ज्ञात नहीं कर सकते (इसकी जाँच कीजिए)।

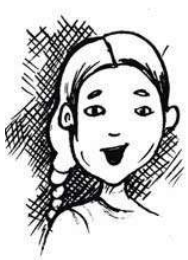
समीकरण (4) को हल करने के लिए संख्या $\frac{3}{2}$ और समीकरण (5) को हल करने के लिए संख्या $\frac{-7}{5}$ की आवश्यकता है। इससे हम **परिमेय संख्याओं** के समूह की तरफ अग्रसर होते हैं। हम पहले ही परिमेय संख्याओं पर मूल संक्रियाएँ पढ़ चुके हैं। अभी तक हमने जितनी भी विभिन्न प्रकार की संख्याएँ पढ़ी हैं उनकी संक्रियाओं के कुछ गुणधर्म खोजने का अब हम प्रयत्न करते हैं।

1.2 परिमेय संख्याओं के गुणधर्म

1.2.1 संवृत

(i) पूर्ण संख्याएँ

आइए, एक बार पुन: संक्षेप में पूर्णसंख्याओं के लिए सभी संक्रियाओं पर संवृत गुणधर्म की चर्चा करते हैं।



संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	$0 + 5 = 5$, एक पूर्णसंख्या है। $4 + 7 = ...$क्या यह एक पूर्ण संख्या है? व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्ण संख्या है।	पूर्ण संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत हैं।
व्यवकलन	$5 - 7 = -2$, जो कि एक पूर्ण संख्या नहीं है।	पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।
गुणन	$0 \times 3 = 0$, एक पूर्ण संख्या है। $3 \times 7 = ...$ क्या यह एक पूर्ण संख्या है? व्यापक रूप से यदि a तथा b कोई भी दो पूर्ण संख्याएँ हैं तो उनका गुणनफल ab एक पूर्ण संख्या है।	पूर्ण संख्याएँ गुणन के अंतर्गत संवृत हैं।
भाग	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, यह एक पूर्ण संख्या नहीं है।	पूर्ण संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।

प्राकृत संख्याओं के लिए सभी चार संक्रियाओं के अंतर्गत संवृत गुण की जाँच कीजिए।

(ii) पूर्णांक

आइए, अब हम उन संक्रियाओं का स्मरण करते हैं जिनके अंतर्गत पूर्णांक संवृत हैं।

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	$-6 + 5 = -1$, एक पूर्णांक है। क्या $-7 + (-5)$ एक पूर्णांक है ? क्या $8 + 5$ एक पूर्णांक है ? व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्णांक है।	पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत हैं।

व्यवकलन	$7-5=2$, एक पूर्णांक है। क्या $5-7$ एक पूर्णांक है ? $-6-8=-14$, एक पूर्णांक है। $-6-(-8)=2$, एक पूर्णांक है क्या $8-(-6)$ एक पूर्णांक है ? व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a-b$ भी एक पूर्णांक है। जाँच कीजिए कि क्या $b-a$ भी एक पूर्णांक है।	पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं।
गुणन	$5\times 8=40$, एक पूर्णांक है। क्या -5×8 एक पूर्णांक है? $-5\times(-8)=40$, एक पूर्णांक है। व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a\times b$ भी एक पूर्णांक है।	पूर्णांक गुणन के अंतर्गत संवृत हैं।
भाग	$5\div 8=\frac{5}{8}$, यह एक पूर्णांक नहीं हैं।	पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।

आपने देखा कि पूर्ण संख्याएँ योग और गुणन के अंतर्गत संवृत हैं परंतु भाग और व्यवकलन के अंतर्गत संवृत नहीं हैं। तथापि पूर्णांक योग, व्यवकलन एवं गुणन के अंतर्गत संवृत हैं लेकिन भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।

(iii) परिमेय संख्याएँ

स्मरण कीजिए कि ऐसी संख्या परिमेय संख्या कहलाती है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q **पूर्णांक** हैं तथा $q\neq 0$ है। उदाहरणार्थ $-\frac{2}{3}, \frac{6}{7}$ परिमेय संख्याएँ हैं। क्योंकि संख्याएँ 0, –2, 4, $\frac{p}{q}$, के रूप में लिखी जा सकती हैं इसलिए ये भी परिमेय संख्याएँ हैं। (इसकी जाँच कीजिए।)

(a) आप जानते हैं कि परिमेय संख्याओं को कैसे जोड़ा जाता है। आइए कुछ युग्मों का योग ज्ञात करते हैं

$$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56} \qquad \text{(एक परिमेय संख्या)}$$

$$\frac{-3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=\ldots \qquad \text{(क्या यह एक परिमेय संख्या है?)}$$

$$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=\ldots \qquad \text{(क्या यह एक परिमेय संख्या है?)}$$

हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग भी एक परिमेय संख्या है। कुछ और परिमेय संख्याओं के युग्मों के लिए इसकी जाँच कीजिए। इस प्रकार हम कहते हैं कि *परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत हैं। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं* a *तथा* b *के लिए* $a + b$ *भी एक परिमेय संख्या है।*

(b) क्या दो परिमेय संख्याओं का अंतर भी एक परिमेय संख्या होगा?

हम प्राप्त करते हैं, $\frac{-5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21}$ (एक परिमेय संख्या है?)

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25 - 32}{40} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right) = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्मों के लिए इसकी जाँच कीजिए। इस प्रकार हम पाते हैं कि *परिमेय संख्याएँ व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं* a *तथा* b *के लिए* $a - b$ *भी एक परिमेय संख्या है।*

(c) आइए, अब हम दो परिमेय संख्याओं के गुणनफल की चर्चा करते हैं।

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}; \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (दोनों गुणनफल परिमेय संख्याएँ हैं)

$-\frac{4}{5} \times \frac{-6}{11} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्म लीजिए और जाँच कीजिए कि उनका गुणनफल भी एक परिमेय संख्या है। अतः हम कह सकते हैं कि *परिमेय संख्याएँ गुणन के अंतर्गत संवृत हैं। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं* a *तथा* b *के लिए* $a \times b$ *भी एक परिमेय संख्या है।*

(d) हम नोट करते हैं कि $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (एक परिमेय संख्या है)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

$\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

क्या आप कह सकते हैं कि परिमेय संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत हैं? हम जानते हैं कि किसी भी परिमेय संख्या a के लिए $a \div 0$ परिभाषित नहीं है। अतः परिमेय संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं। तथापि, यदि हम शून्य को शामिल नहीं करें तो दूसरी सभी परिमेय संख्याओं का समूह, भाग के अंतर्गत संवृत है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

संख्याएँ	अंतर्गत संवृत हैं			
	योग के	व्यवकलन के	गुणन के	भाग के
परिमेय संख्याएँ	हाँ	हाँ	...	नहीं
पूर्णांक	...	हाँ	...	नहीं
पूर्ण संख्याएँ	...	...	हाँ	...
प्राकृत संख्याएँ	...	नहीं	...	...

1.2.2 क्रम विनिमेयता

(i) पूर्ण संख्याएँ

निम्नलिखित सारणी के रिक्त स्थानों को भरते हुए विभिन्न संक्रियाओं के अंतर्गत पूर्ण संख्याओं की क्रमविनिमेयता का स्मरण कीजिए :

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = ... + ... = ...$ किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए $a + b = b + a$	योग क्रमविनिमेय है।
व्यवकलन(घटाना)	....	व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं है।
गुणन	....	गुणन क्रम विनिमेय है।
भाग	....	भाग क्रम विनिमेय नहीं है

जाँच कीजिए कि क्या प्राकृत संख्याओं के लिए भी ये संक्रियाएँ क्रम विनिमेय हैं।

(ii) पूर्णांक

निम्नलिखित सारणी के रिक्त स्थानों को भरिए और पूर्णांकों के लिए विभिन्न संक्रियाओं की क्रम विनिमेयता जाँचिए :

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	....	योग क्रम विनिमेय है।
व्यवकलन	क्या $5 - (-3) = -3 - 5$?	व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं है।
गुणन	....	गुणन क्रम विनिमेय है।
भाग	....	भाग क्रम विनिमेय नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

आप जानते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को कैसे जोड़ा जाता है। आइए, हम यहाँ कुछ युग्मों को जोड़ते हैं।

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21} \text{ और } \frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{21}$$

इसलिए, $\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

इसके अतिरिक्त $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots$ और $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots$

क्या $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right)$?

क्या $\frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)$?

आप पाते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। हम कहते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए योग क्रम विनिमेय है। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a+b=b+a$ ।

(b) व्यवकलन

क्या $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$ है?

क्या $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ है?

आप पाएँगे कि परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं है।

(c) गुणन

हम पाते हैं, $\frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$

क्या $\frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$ है?

ऐसे कुछ और गुणनफलों के लिए भी जाँच कीजिए।

आप पाएँगे कि *परिमेय संख्याओं के लिए गुणन क्रम विनिमेय है। व्यापक रूप से किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a\times b=b\times a$* होता है।

(d) भाग

क्या $\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ है?

आप पाएँगे कि दोनों पक्षों के व्यंजक समान नहीं हैं।

इसलिए परिमेय संख्याओं के लिए भाग **क्रम विनिमेय नहीं है**।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

संख्याएँ	क्रमविनिमेय			
	योग के लिए	व्यवकलन के लिए	गुणन के लिए	भाग के लिए
परिमेय संख्याएँ	हाँ	...	...	...
पूर्णांक	...	नहीं	...	...
पूर्ण संख्याएँ	...	...	हाँ	...
प्राकृत संख्याएँ	...	...	...	नहीं

1.2.3 साहचर्यता (सहचारिता)

(i) पूर्ण संख्याएँ

निम्नलिखित सारणी के माध्यम से पूर्ण संख्याओं के लिए चार संक्रियाओं की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	....	योग साहचर्य है।
व्यवकलन	....	व्यवकलन साहचर्य नहीं है।
गुणन	क्या $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? क्या $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं a, b तथा c के लिए $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	गुणन साहचर्य है।
भाग	....	भाग साहचर्य नहीं है।

इस सारणी को भरिए और अंतिम स्तंभ में दी गई टिप्पणियों को सत्यापित कीजिए।
प्राकृत संख्याओं के लिए विभिन्न संक्रियाओं की साहचर्यता की स्वयं जाँच कीजिए।

(ii) पूर्णांक

पूर्णांकों के लिए चार संक्रियाओं की साहचर्यता निम्नलिखित सारणी से देखी जा सकती है :

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	क्या $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3)] + (-4)$ है?	योग साहचर्य है।

	क्या $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ है? किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं a, b तथा c के लिए $a + (b + c) = (a + b) + c$	
व्यवकलन	क्या $5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ है?	व्यवकलन साहचर्य **नहीं** है।
गुणन	क्या $5 \times [(-7) \times (-8)$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ है? क्या $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ है? किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं a, b तथा c के लिए $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	गुणन साहचर्य है।
भाग	क्या $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ है?	भाग साहचर्य **नहीं** है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

हम पाते हैं :

$$\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \frac{-2}{3} + \left(\frac{-7}{30}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

$$\left[\frac{-2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{15} + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

इसलिए, $\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \left[\frac{-2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right)$

ज्ञात कीजिए $\frac{-1}{2} + \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ और $\left[\frac{-1}{2} + \frac{3}{7}\right] + \left(\frac{-4}{3}\right)$

क्या ये दोनों योग समान हैं?

कुछ और परिमेय संख्याएँ लीजिए, उपर्युक्त उदाहरणों की तरह उन्हें जोड़िए और देखिए कि क्या दोनों योग समान हैं। हम पाते हैं कि *परिमेय संख्याओं के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b तथा c के लिए* $a + (b + c) = (a + b) + c$ ।

(b) व्यवकलन

क्या $\frac{-2}{3} - \left[\frac{-4}{5} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{-4}{5}\right)\right] - \frac{1}{2}$ है?

स्वयं जाँच कीजिए।

परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन *साहचर्य नहीं* है।

(c) गुणन

आइए, हम गुणन के लिए साहचर्यता की जाँच करते हैं।

$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\ldots$$

हम पाते हैं कि $\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$

क्या $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$ है?

कुछ और परिमेय संख्याएँ लीजिए और स्वयं जाँच कीजिए। हम पाते हैं कि *परिमेय संख्याओं के लिए गुणन साहचर्य है। अर्थात् किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b तथा c के लिए $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ ।*

(d) भाग

आइए, देखते हैं कि क्या

$$\frac{1}{2}\div\left[\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right]=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$$ है? हम पाते हैं,

बायाँ पक्ष (L.H.S) $=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right)$

$=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{2}\right)$ ($\frac{2}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{2}$ है)

$=\frac{1}{2}\div\left(-\frac{5}{6}\right)$

$=\ldots$

पुनः दायाँ पक्ष (R.H.S) $=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}$

$=\frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=\ldots$

क्या L.H.S. = R.H.S. है? स्वयं जाँच कीजिए। आप पाएँगे कि परिमेय संख्याओं के लिए **भाग साहचर्य नहीं** है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

संख्याएँ	साहचर्य			
	योग के लिए	व्यवकलन के लिए	गुणन के लिए	भाग के लिए
परिमेय संख्याएँ	...	...	...	नहीं
पूर्णांक	...	...	हाँ	..
पूर्ण संख्याएँ	हाँ	...	...	...
प्राकृत संख्याएँ	...	नहीं	...	...

उदाहरण 1 : ज्ञात कीजिए $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

हल : $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

$$= \frac{198}{462}+\left(\frac{-252}{462}\right)+\left(\frac{-176}{462}\right)+\left(\frac{105}{462}\right)$$

(नोट कीजिए कि 7, 11, 21 तथा 22 का ल.स.प. 462 है।)

$$= \frac{198-252-176+105}{462} = \frac{-125}{462}$$

हम इसे निम्नलिखित प्रकार से भी हल कर सकते हैं :

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$$

$$= \left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$$ (क्रम विनिमेयता और साहचर्यता के उपयोग से)

$$= \left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$$

(7 और 21 का ल.स.प. 21 है। 11 और 22 का ल.स.प. 22 है।)

$$= \frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right) = \frac{22-147}{462} = \frac{-125}{462}$$

क्या आप सोचते हैं कि क्रमविनिमेयता और साहचर्यता के गुणधर्मों की सहायता से परिकलन आसान हो गया है?

उदाहरण 2 : ज्ञात कीजिए $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

हल : हमें प्राप्त है,

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(-\frac{4 \times 3}{5 \times 7}\right) \times \left(\frac{15 \times (-14)}{16 \times 9}\right)$$

$$= \frac{-12}{35} \times \left(\frac{-35}{24}\right) = \frac{-12 \times (-35)}{35 \times 24} = \frac{1}{2}$$

हम इसे निम्नलिखित प्रकार से भी हल कर सकते हैं :

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{-4}{5} \times \frac{15}{16}\right) \times \left[\frac{3}{7} \times \left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (क्रमविनिमेयता और साहचर्यता के उपयोग से)

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

1.2.4 शून्य (0) की भूमिका

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (शून्य को पूर्ण संख्या में जोड़ना)

$-5 + 0 = ... + ... = -5$ (शून्य को पूर्णांक में जोड़ना)

$\frac{-2}{7} + ... = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (शून्य को परिमेय संख्या में जोड़ना)

आप पहले भी इस प्रकार के योग ज्ञात कर चुके हैं।

ऐसे कुछ और योग ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं? आप पाएँगे कि जब किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ा जाता है तो योग फिर से वही पूर्ण संख्या होती है। यह तथ्य पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है।

व्यापक रूप से $a + 0 = 0 + a = a,$ (जहाँ a एक पूर्ण संख्या है)

$b + 0 = 0 + b = b,$ (जहाँ b एक पूर्णांक है)

$c + 0 = 0 + c = c,$ (जहाँ c एक परिमेय संख्या है)

परिमेय संख्याओं के योग के लिए शून्य एक तत्समक कहलाता है। यह पूर्णांकों और पूर्ण संख्याओं के लिए भी योज्य तत्समक है।

1.2.5 1 की भूमिका

हम प्राप्त करते हैं कि

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5 \qquad \text{(पूर्ण संख्या के साथ 1 का गुणन)}$$

$$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

आप क्या पाते हैं?

आप पाएँगे कि जब आप किसी भी परिमेय संख्या के साथ 1 से गुणा करते हैं तो आप उसी परिमेय संख्या को गुणनफल के रूप में पाते हैं। कुछ और परिमेय संख्याओं के लिए इसकी जाँच कीजिए। आप पाएँगे कि किसी भी परिमेय संख्या a के लिए, $a \times 1 = 1 \times a = a$ है। हम कहते हैं कि 1 *परिमेय संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक है*। क्या 1 पूर्णांकों और पूर्ण संख्याओं के लिए भी गुणनात्मक तत्समक हैं?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि कोई गुणधर्म परिमेय संख्याओं के लिए सत्य है तो क्या वह गुणधर्म, पूर्णांकों, पूर्ण संख्याओं के लिए भी सत्य होगा? कौन-से गुणधर्म इनके लिए सत्य होंगे और कौन-से सत्य नहीं होंगे?

1.2.6 एक संख्या का ऋणात्मक

पूर्णांकों का अध्ययन करते समय आपने पूर्णांकों के ऋणात्मक पाए हैं। 1 का ऋणात्मक क्या है? यह -1 है, क्योंकि $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$ है।

अत: (-1) का ऋणात्मक क्या होगा? यह 1 होगा।

इसके अतिरिक्त, $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ है। इस प्रकार हम कहते हैं कि -2 का ऋणात्मक अथवा योज्य प्रतिलोम 2 है जो विलोमत: भी सत्य है। व्यापक रूप से किसी भी पूर्णांक a के लिए $a + (-a) = (-a) + a = 0$; इस प्रकार $-a$ का ऋणात्मक a है और a का ऋणात्मक $-a$ है।

किसी परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ के लिए, हम पाते हैं,

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$$

इसके अतिरिक्त $\quad \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0 \qquad$ (कैसे ?)

इसी प्रकार $\quad \frac{-8}{9} + \ldots = \ldots + \left(\frac{-8}{9}\right) = 0$

$$\ldots + \left(\frac{-11}{7}\right) = \left(\frac{-11}{7}\right) + \ldots = 0$$

व्यापक रूप से किसी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$ प्राप्त है।

हम कहते हैं कि $\frac{a}{b}$ *का योज्य प्रतिलोम* $-\frac{a}{b}$ *है और* $\left(-\frac{a}{b}\right)$ *का योज्य प्रतिलोम* $\frac{a}{b}$ है।

1.2.7 व्युत्क्रम

आप $\frac{8}{21}$ को किस परिमेय संख्या से गुणा करेंगे ताकि गुणनफल 1 हो जाए? स्पष्ट रूप से $\frac{21}{8}$ से, क्योंकि $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$ है।

इसी प्रकार, $\frac{-5}{7}$ को $\frac{7}{-5}$ से गुणा करना चाहिए ताकि गुणनफल 1 प्राप्त हो सके।

हम कहते हैं कि $\frac{8}{21}$ का व्युत्क्रम $\frac{21}{8}$ है और $\frac{-5}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{-5}$ है।

क्या आप बता सकते हैं कि शून्य का व्युत्क्रम क्या है? क्या कोई ऐसी परिमेय संख्या है जिसे शून्य से गुणा करने पर 1 प्राप्त हो जाए। अतः शून्य का कोई व्युत्क्रम नहीं है। हम कहते हैं कि–

एक परिमेय संख्या $\frac{c}{d}$ दूसरी संख्या $\frac{a}{b}$ का **व्युत्क्रम** अथवा **गुणात्मक प्रतिलोम** कहलाती है यदि $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$ है।

1.2.8 परिमेय संख्याओं के लिए गुणन की योग पर वितरकता

इस तथ्य को समझने के लिए परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{4},\frac{2}{3}$ और $\frac{-5}{6}$ को लीजिए :

$$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right\}=\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

इसके अतिरिक्त $$\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{-3\times 2}{4\times 3}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$$

और $$\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}=\frac{5}{8}$$

इसलिए, $$\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$$

योग एवं व्यवकलन पर गुणन की वितरकता

सभी परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए

$a(b+c)=ab+ac$

$a(b-c)=ab-ac$

अत: $$\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \frac{-5}{6}\right\} = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$$

प्रयास कीजिए

वितरकता के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{12}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16} \times \frac{4}{12}\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times \frac{-3}{9}\right\}$

उदाहरण 3 : निम्नलिखित के योज्य प्रतिलोम लिखिए :

जब आप वितरकता का उपयोग करते हैं तो आप एक गुणनफल को दो गुणनफलों के योग अथवा अंतर के रूप में विभक्त करते हैं।

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

हल :

(i) $\frac{7}{19}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-7}{19}$ है क्योंकि $\frac{-7}{19} + \frac{7}{19} = \frac{-7+7}{19} = \frac{0}{19} = 0$ है।

(ii) $\frac{21}{112}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-21}{112}$ है। (जाँच कीजिए)

उदाहरण 4 : सत्यापित कीजिए कि निम्न के लिए $-(-x)$ और x समान हैं।

(i) $x = \frac{13}{17}$ (ii) $x = \frac{-21}{31}$

हल :

(i) हमें प्राप्त है $x = \frac{13}{17}$

$x = \frac{13}{17}$ का योज्य प्रतिलोम $-x = \frac{-13}{17}$ है, क्योंकि $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$ है।

समिका $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$, दर्शाती है कि $\frac{-13}{17}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{13}{17}$ है,

अथवा $-\left(\frac{-13}{17}\right) = \frac{13}{17}$, अर्थात् $-(-x) = x$

(ii) $x = \frac{-21}{31}$ का योज्य प्रतिलोम $-x = \frac{21}{31}$ है, क्योंकि $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$ है।

समिका $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$, दर्शाती है कि $\frac{21}{31}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-21}{31}$ है, अर्थात् $-(-x) = x$ है।

उदाहरण 5 : ज्ञात कीजिए $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5}$

हल : $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$ (क्रमविनिमेयता से)

$= \frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} + \left(\frac{-3}{7}\right) \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14} = \frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{14}$ (वितरकता से)

$= \frac{-3}{7} \times 1 - \frac{1}{14} = \frac{-6-1}{14} = \frac{-1}{2}$

प्रश्नावली 1.1

1. उचित गुणधर्मों के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $-\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{14} \times \frac{2}{5}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक के योज्य प्रतिलोम लिखिए :

   (i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

3. (i) $x = \frac{11}{15}$ (ii) $x = -\frac{13}{17}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $-(-x) = x$

4. निम्नलिखित के गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

   (i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{7}$

   (v) $-1 \times \frac{-2}{5}$ (vi) -1

5. निम्नलिखित प्रत्येक में गुणन के अंतर्गत उपयोग किए गए गुणधर्म का नाम लिखिए :

   (i) $\frac{-4}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17} \times \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \times \frac{-13}{17}$

   (iii) $\frac{-19}{29} \times \frac{29}{-19} = 1$

6. $\frac{6}{13}$ को $\frac{-7}{16}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

7. बताइए कौन से गुणधर्म की सहायता से आप $\frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{4}{3}\right)$ को $\left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \frac{4}{3}$ के रूप में अभिकलन करते हैं।

8. क्या $-1\frac{1}{8}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{8}{9}$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

9. क्या $3\frac{1}{3}$ का गुणनात्मक प्रतिलोम 0.3 है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

10. लिखिए :

(i) ऐसी परिमेय संख्या जिसका कोई व्युत्क्रम नहीं है।

(ii) परिमेय संख्याएँ जो अपने व्युत्क्रम के समान है।

(iii) परिमेय संख्या जो अपने ऋणात्मक के समान है।

11. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) शून्य का व्युत्क्रम _________ है।

(ii) संख्याएँ _________ तथा _________ स्वयं के व्युत्क्रम हैं।

(iii) -5 का व्युत्क्रम _________ है।

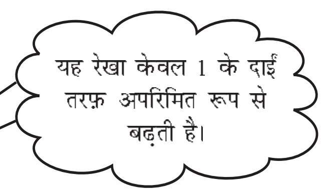
(iv) $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ का व्युत्क्रम _________ है।

(v) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल हमेशा ________ है।

(vi) किसी धनात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम _________ है।

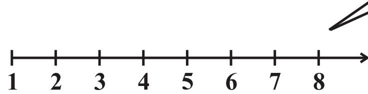
1.3 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

आप प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीख चुके हैं। हम उनकी पुनरावृत्ति करेंगे।



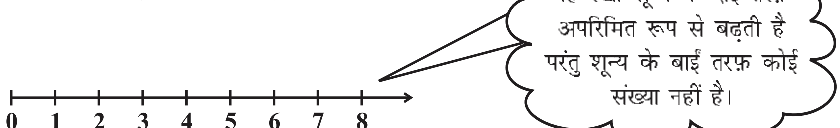
प्राकृत संख्याएँ

(i)



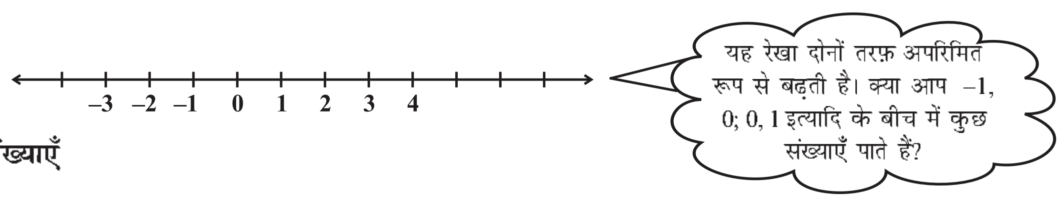
पूर्ण संख्याएँ

(ii)



पूर्णांक

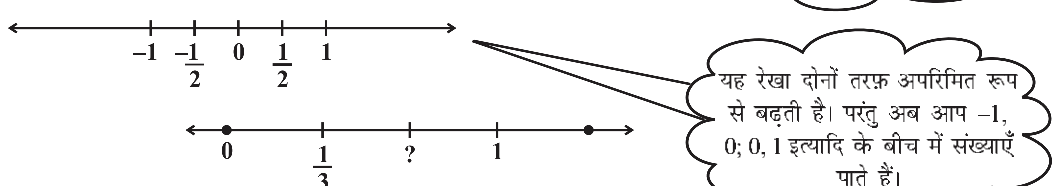
(iii)



परिमेय संख्याएँ

(iv)

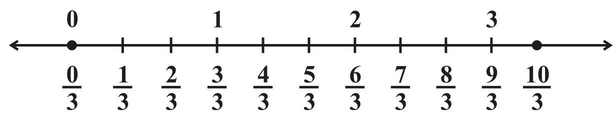
(v)



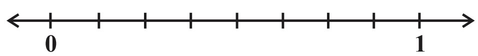
संख्या रेखा (iv) पर वह बिंदु जो 0 और 1 के मध्य स्थित है उसे $\frac{1}{2}$ के रूप में अंकित किया गया है। संख्या रेखा (v) पर 0 और 1 के बीच की दूरी को तीन बराबर भागों में बाँटने वाले समदूरस्थ बिंदुओं में से प्रथम बिंदु को $\frac{1}{3}$ के रूप में अंकित किया जा सकता है। संख्या रेखा (v) पर भाजक बिंदुओं में से दूसरे बिंदु को आप कैसे अंकित करेंगे?

अंकित किए जाने वाला यह बिंदु शून्य के दाईं तरफ़ $\frac{1}{3}$ के रूप में अंकित बिंदु से दुगुनी दूरी पर है, इस प्रकार यह $\frac{1}{3}$ से दुगुना है, अर्थात् $\frac{2}{3}$ है। आप इसी प्रकार संख्या रेखा पर समदूरस्थ बिंदुओं को अंकित कर सकते हैं। अगला चिह्न 1 है। आप देख सकते हैं कि 1 और $\frac{3}{3}$ एक समान हैं।

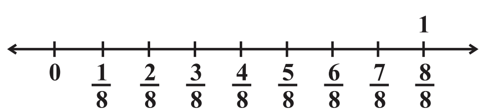
जैसा की संख्या रेखा (vi) पर दर्शाया गया है इसके पश्चात् $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$ (अथवा 2), $\frac{7}{3}$ आते हैं।

(vi)


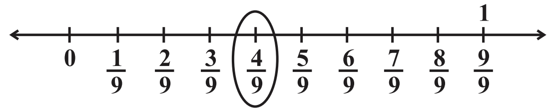
इसी प्रकार, $\frac{1}{8}$ को निरूपित करने के लिए संख्या रेखाखंड को आठ बराबर भागों में बाँटा जा सकता है जैसा कि निम्न आकृति में दर्शाया गया है :

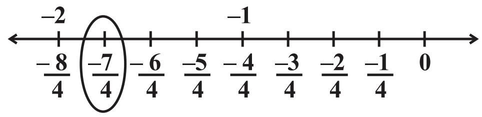


इस विभाजन के प्रथम बिंदु को नाम देने के लिए हम संख्या $\frac{1}{8}$ का उपयोग करते हैं। विभाजन का दूसरा बिंदु $\frac{2}{8}$ के रूप में अंकित किया जाएगा, तीसरा बिंदु $\frac{3}{8}$ के रूप में और इसी प्रकार आगे भी, जैसा कि संख्या रेखा (vii) पर दर्शाया गया है।

(vii)


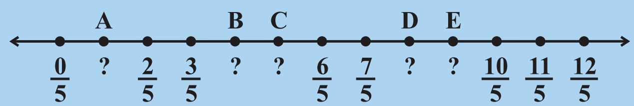
इसी प्रकार संख्या रेखा पर किसी भी परिमेय संख्या को निरूपित किया जा सकता है। एक परिमेय संख्या में रेखा के नीचे का संख्यांक अर्थात् हर, यह दर्शाता है कि प्रथम इकाई को कितने समान भागों में बाँटा गया है। रेखा के ऊपर का संख्यांक अर्थात् अंश, यह दर्शाता है कि इन समान भागों में से कितने भागों को शामिल किया गया है। इस प्रकार परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ का अर्थ है कि शून्य के दाईं तरफ़ नौ समान भागों में से चार को लिया गया है (संख्या रेखा viii) और $\frac{-7}{4}$, के लिए हम शून्य से शुरू करते हुए बाईं तरफ़ 7 चिह्न लगाते हैं जिनमें से प्रत्येक की दूरी $\frac{1}{4}$ है। सातवाँ चिह्न $\frac{-7}{4}$ है [संख्या रेखा (ix)]।

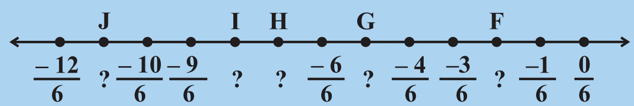
(viii) 

(ix) 

प्रयास कीजिए

अक्षर द्वारा अंकित प्रत्येक बिंदु के लिए परिमेय संख्या लिखिए :

(i) 

(ii) 

1.4 दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ

क्या आप 1 और 5 के बीच प्राकृत संख्याएँ बता सकते हैं? वे प्राकृत संख्याएँ 2, 3 और 4 हैं।
7 और 9 के बीच में कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं? केवल एक, और वह है 8
10 और 11 के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं? स्पष्ट रूप से एक भी नहीं।
–5 और 4 के बीच स्थित पूर्णांकों की सूची बनाइए। यह है, – 4, – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.
–1 और 1 के बीच कितने पूर्णांक हैं?
–9 और –10 के बीच कितने पूर्णांक हैं?
आप दो प्राकृत संख्याओं (पूर्णांकों) के बीच निश्चित प्राकृत संख्याएँ (पूर्णांक) पाएँगे।

$\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ हैं? शायद आप सोच सकते हैं कि ये संख्याएँ $\frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ और $\frac{6}{10}$ हैं। परंतु आप $\frac{3}{10}$ को $\frac{30}{100}$ और $\frac{7}{10}$ को $\frac{70}{100}$ लिख सकते हैं।

अब संख्याएँ, $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}, \ldots \frac{68}{100}, \frac{69}{100}$, सभी $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच में हैं। इन परिमेय संख्याओं की संख्या 39 है।

इसके अतिरिक्त $\frac{3}{10}$ को $\frac{3000}{10000}$ तथा $\frac{7}{10}$ को $\frac{7000}{10000}$ के रूप में लिखा जा सकता है। अब हम पाते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, \ldots, \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$ सभी $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच में हैं। ये कुल 3999 संख्याएँ हैं।

इस प्रकार हम $\frac{3}{10}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच में अधिक से अधिक संख्याओं का समावेश कर सकते हैं। इसलिए प्राकृत संख्याओं और पूर्णांकों की तरह दो परिमेय संख्याओं के बीच पाई जाने वाली परिमेय संख्याएँ परिमित नहीं हैं। एक और उदाहरण पर विचार करते हैं। $\frac{-1}{10}$ और $\frac{3}{10}$ के बीच में कितनी परिमेय संख्याएँ हैं? स्पष्ट रूप से दी हुई संख्याओं के बीच में $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$ परिमेय संख्याएँ हैं।

यदि हम $\frac{-1}{10}$ को $\frac{-10000}{100000}$ तथा $\frac{3}{10}$ को $\frac{30000}{100000}$ के रूप में लिखते हैं तो हम $\frac{-1}{10}$ और $\frac{3}{10}$ के बीच में $\frac{-9999}{100000}, \frac{-9998}{100000}, ..., \frac{-29998}{100000}, \frac{29999}{100000}$, परिमेय संख्याएँ प्राप्त करते हैं।

आप कोई भी दो परिमेय संख्याओं के बीच में अपरिमित परिमेय संख्याएँ प्राप्त करेंगे।

उदाहरण 6 : –2 और 0 के मध्य 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : –2 को $\frac{-20}{10}$ और 0 को $\frac{0}{10}$ के रूप में लिखा जा सकता है। अतः हम –2 और 10 के बीच में $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-16}{10}, \frac{-15}{10}, ..., \frac{-1}{10}$ परिमेय संख्याएँ प्राप्त करते हैं। आप इनमें से कोई भी तीन संख्याएँ ले सकते हैं।

उदाहरण 7 : $\frac{-5}{6}$ और $\frac{5}{8}$ के बीच में दस परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम हम $\frac{-5}{6}$ और $\frac{5}{8}$ को समान हर वाली परिमेय संख्याओं के रूप में परिवर्तित करते हैं।

$$\frac{-5 \times 4}{6 \times 4} - \frac{-20}{24} \quad \text{और} \quad \frac{5 \times 3}{8 \times 3} - \frac{15}{24}$$

इसी प्रकार हम $\frac{-20}{24}$ और $\frac{15}{24}$ के मध्य निम्नलिखित परिमेय संख्याएँ प्राप्त करते हैं। आप इनमें से कोई भी दस संख्याएँ ले सकते हैं $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, ..., \frac{14}{24}$

अन्य विधि

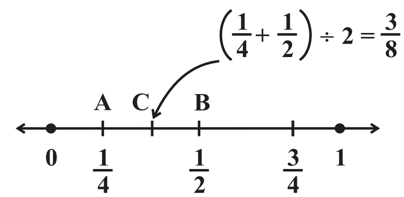
आइए 1 और 2 के बीच में परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं। उनमें से एक संख्या 1.5 अथवा $1\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{2}$ है। यह 1 और 2 का माध्य है। आपने कक्षा VII में माध्य के बारे में पढ़ा है।

इस प्रकार हम पाते हैं कि दी हुई दो संख्याओं के बीच में पूर्णांक प्राप्त होना आवश्यक नहीं है परंतु दी हुई दो संख्याओं के बीच में एक परिमेय संख्या हमेशा स्थित होती है। हम दी हुई दो परिमेय संख्याओं के बीच में परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए माध्य की अवधारणा का उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 8 : $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम दी हुई परिमेय संख्याओं का माध्य ज्ञात करते हैं

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \left(\frac{1+2}{4}\right) \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$



$\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य $\frac{3}{8}$ स्थित है।

इसे संख्या रेखा पर भी देखा जा सकता है।

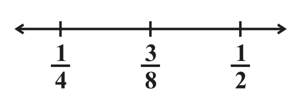
हम AB का मध्य बिंदु C प्राप्त करते हैं जो $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{8}$ द्वारा निरूपित है। हम पाते हैं कि $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ है।

यदि a और b कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं तो a और b के मध्य $\frac{a+b}{2}$ एक परिमेय संख्या इस प्रकार है कि $a < \frac{a+b}{2} < b$

इससे यह भी प्रदर्शित होता है कि दी हुई दो परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।

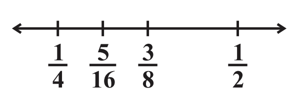
उदाहरण 9 : $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : हम दी हुई संख्याओं का माध्य ज्ञात करते हैं। जैसा कि उपर्युक्त उदाहरण में दिया हुआ है इन संख्याओं का माध्य $\frac{3}{8}$ है और $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ है।



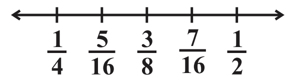
अब $\frac{1}{4}$ और $\frac{3}{8}$ के बीच में एक और परिमेय संख्या ज्ञात करते हैं। इसके लिए हम पुनः $\frac{1}{4}$ और $\frac{3}{8}$ का माध्य ज्ञात करते हैं। अर्थात् $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) \div 2 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$ है।

$$\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$$



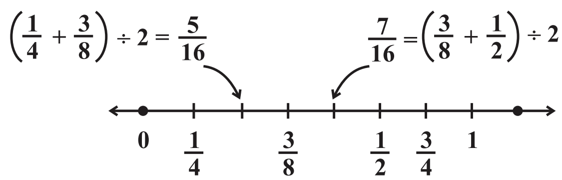
अब $\frac{3}{8}$ और $\frac{1}{2}$ का माध्य ज्ञात कीजिए। हम $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\div 2 = \frac{7}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{16}$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार हमें $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।



इस प्रकार $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$ हैं।

इसे स्पष्ट रूप से संख्या रेखा पर निम्न रूप में दर्शाया जा सकता है :



इसी प्रकार हम दी हुई दो परिमेय संख्याओं के बीच में अपनी इच्छानुसार कितनी भी परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। आप देख चुके हैं कि दी हुई दो परिमेय संख्याओं के बीच में अपरिमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए : (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$

2. $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

3. ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए जो 2 से छोटी हों।

4. $\frac{-2}{5}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य दस परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

5. (i) $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ और $\frac{5}{3}$

(iii) $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

6. -2 से बड़ी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

7. $\frac{3}{5}$ और $\frac{3}{4}$ के बीच में दस परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. परिमेय संख्याएँ योग व्यवकलन और गुणन की संक्रियाओं के अंतर्गत **संवृत** हैं।
2. परिमेय संख्याओं के लिए योग और गुणन की संक्रियाएँ
   (i) **क्रमविनिमेय** हैं।
   (ii) **साहचर्य** हैं।
3. परिमेय संख्याओं के लिए परिमेय संख्या शून्य **योज्य तत्समक** है।
4. परिमेय संख्याओं के लिए परिमेय संख्या 1 **गुणनात्मक तत्समक** है।
5. परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का **योज्य प्रतिलोम** $-\frac{a}{b}$ है और विलोमतः भी सत्य है।
6. यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} - 1$ तो परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का **व्युत्क्रम** अथवा **गुणनात्मक प्रतिलोम** $\frac{c}{d}$ है।
7. परिमेय संख्याओं की **वितरकता** : परिमेय संख्याएँ a, b और c के लिए
   $a(b + c) = ab + ac$ और $a(b - c) = ab - ac$ है।
8. परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।
9. दी हुई दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित परिमेय संख्याएँ होती हैं। दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने में माध्य की अवधारणा सहायक है।

नोट

नोट

अध्याय

2

एक चर वाले रैखिक समीकरण

2.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने अनेक **बीजीय व्यंजकों** और **समीकरणों** के बारे में जानकारी प्राप्त की है। ऐसे व्यंजक जो हमने देखे, उनके कुछ उदाहरण हैं–

$$5x,\ 2x - 3,\ 3x + y,\ 2xy + 5,\ xyz + x + y + z,\ x^2 + 1,\ y + y^2$$

समीकरणों के कुछ उदाहरण हैं: $5x = 25$, $2x - 3 = 9$, $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$, $6z + 10 = -2$

आपको याद होगा कि समीकरणों में सदैव *समता* '=' का चिह्न प्रयोग होता है, जो व्यंजकों में नहीं होता।

इन व्यंजकों में, कुछ में एक से अधिक चर प्रयोग हुए हैं। उदाहरण के लिए, $2xy + 5$ में दो चर हैं। तथापि, हम अब समीकरण बनाने में केवल एक चर वाले व्यंजक ही प्रयोग करेंगे और जो व्यंजक समीकरण बनाने में लिखे जाएँगे वे रैखिक ही होंगे। इससे तात्पर्य है कि व्यंजकों में प्रयोग होने वाले चर की अधिकतम घात एक होगी।

कुछ रैखिक व्यंजक हैं–

$$2x,\ 2x + 1,\ 3y - 7,\ 12 - 5z,\ \frac{5}{4}(x - 4) + 10$$

ये रैखिक व्यंजक **नहीं** हैं: $x^2 + 1$, $y + y^2$, $1 + z + z^2 + z^3$

(ध्यान दीजिए चर की अधिकतम घात 1 से अधिक है)

अब हम समीकरणों में, केवल एक चर वाले व्यंजकों का ही प्रयोग करेंगे। ऐसे समीकरण, **एक चर वाले रैखिक समीकरण** कहलाते हैं। पिछली कक्षाओं में जिन सरल समीकरणों को आपने हल करना सीखा वे इसी प्रकार के थे।

आइए, जो हम जानते हैं, उसे संक्षिप्त में दोहरा लें–

(a) एक बीजीय समीकरण में चरों को प्रयोग करते हुए एक समता होती है। इसमें एक समता का चिह्न होता है। इस समता के बाईं ओर वाला व्यंजक बायाँ पक्ष (LHS) और दाईं ओर वाला व्यंजक दायाँ पक्ष (RHS) कहलाता है।

चर समता

$2x - 3 = 7$ समीकरण

$2x - 3$ = बायाँ पक्ष

7 = दायाँ पक्ष

(b) एक समीकरण में *बाएँ पक्ष में व्यंजक का मान, दाएँ पक्ष में व्यंजक के मान के बराबर होता है।* ऐसा, चर के कुछ मानों के लिए ही संभव होता है और चर के ऐसे मानों को ही चर के **हल** कहते हैं।

$2x - 3 = 7$. इस समीकरण का हल है– $x = 5$ क्योंकि $x = 5$ होने पर बाएँ पक्ष का मान होगा $2 \times 5 - 3 = 7$ जो दाएँ पक्ष का मान है लेकिन $x = 10$ इसका हल नहीं है, क्योंकि $x = 10$ होने पर बाएँ पक्ष का मान होगा, $2 \times 10 - 3 = 17$ जो दाएँ पक्ष के बराबर नहीं है।

(c) *किसी समीकरण का हल कैसे ज्ञात करें?*

हम मानते हैं कि समीकरण के दोनों पक्ष, तुला के पलड़ों की तरह संतुलन में हैं। अत: हम समीकरण के दोनों पक्षों पर एक जैसी ही गणितीय संक्रियाएँ करते हैं जिससे समीकरण का संतुलन बना रहे; बिगड़े नहीं, लेकिन समीकरण सरल, अधिक सरल होता जाए। इस प्रकार कुछ चरणों के बाद समीकरण का हल प्राप्त हो जाता है।

2.2 समीकरणों को हल करना, जिनके एक पक्ष में रैखिक व्यंजक तथा दूसरे में केवल संख्या हो

कुछ उदाहरण लेकर, समीकरणों को हल करने की विधि फिर ध्यान में लाते हैं। हलों पर ध्यान दीजिए। हल के रूप में कोई भी परिमेय संख्या प्राप्त हो सकती है।

उदाहरण 1 : हल ज्ञात कीजिए $2x - 3 = 7$

हल :

चरण 1 दोनों पक्षों में 3 जोड़ने पर

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3 \qquad \text{(संतुलन नहीं बिगड़ा)}$$

या $$2x = 10$$

चरण 2 दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

या $$x = 5 \qquad \text{(अपेक्षित हल)}$$

उदाहरण 2 : हल कीजिए $2y + 9 = 4$

हल : 9 का, दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर

$$2y = 4 - 9$$

या $$2y = -5$$

दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर, $$y = \frac{-5}{2} \qquad \text{(हल)}$$

हल की जाँच : बायाँ पक्ष $= 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5 + 9 = 4 =$ दायाँ पक्ष (जैसा चाहिए)

क्या आपने ध्यान दिया कि संख्या $\frac{-5}{2}$ एक परिमेय संख्या है? सातवीं कक्षा में जो समीकरण हल किए गए उनके हल ऐसी संख्याएँ नहीं थीं।

उदाहरण 3 : हल कीजिए $\frac{x}{3}+\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

हल : $\frac{5}{2}$ को दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर $\frac{x}{3} = \frac{-3}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{8}{2}$

या $\frac{x}{3} = -4$

दोनों पक्षों को 3 से गुणा करने पर $x = -4 \times 3$

या $x = -12$ (हल)

जाँच : बायाँ पक्ष $= -\frac{12}{3}+\frac{5}{2} = -4+\frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2} = \frac{-3}{2} =$ दायाँ पक्ष (जैसा चाहिए)

ध्यान दीजिए कि समीकरण में चर का गुणांक आवश्यक नहीं कि सदैव एक पूर्णांक ही हो।

उदाहरण 4 : हल कीजिए $\frac{15}{4} - 7x = 9$

हल : ज्ञात है $\frac{15}{4} - 7x = 9$

या $-7x = 9 - \frac{15}{4}$ ($\frac{15}{4}$ दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

या $-7x = \frac{21}{4}$

या $x = \frac{21}{4\times(-7)}$ (दोनों पक्षों को –7 से भाग करने पर)

या $x = -\frac{3\times 7}{4\times 7}$

या $x = -\frac{3}{4}$ (अपेक्षित हल)

जाँच : बायाँ पक्ष $= \frac{15}{4} - 7\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{15}{4}+\frac{21}{4}=\frac{36}{4} = 9 =$ दायाँ पक्ष (जैसा चाहिए)

प्रश्नावली 2.1

निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

1. $x - 2 = 7$ **2.** $y + 3 = 10$ **3.** $6 = z + 2$

4. $\frac{3}{7} + x = \frac{17}{7}$ **5.** $6x = 12$ **6.** $\frac{t}{5} = 10$

7. $\frac{2x}{3} = 18$ 8. $1.6 = \frac{y}{1.5}$ 9. $7x - 9 = 16$

10. $14y - 8 = 13$ 11. $17 + 6p = 9$ 12. $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$

2.3 कुछ अनुप्रयोग

हम एक सरल उदाहरण से आरंभ करते हैं :

दो संख्याओं का योग 74 है। उनमें एक संख्या दूसरी से 10 अधिक है। वे संख्याएँ कौन-सी हैं? यह एक पहेली की तरह है। हमें दोनों में कोई भी संख्या पता नहीं और उन्हें ज्ञात करना है। हमें दो शर्तें दी गई हैं :

(i) एक संख्या दूसरी से 10 अधिक है, तथा

(ii) उनका योग 74 है।

हम कक्षा VII में सीख चुके हैं कि इस तरह की समस्या कैसे आरंभ करते हैं। हम मानते हैं कि छोटी संख्या x है। तब बड़ी संख्या है x से 10 अधिक अर्थात् $x + 10$ ।

दूसरी शर्त है कि संख्याओं का योग 74 है।

अत: $x + (x + 10) = 74$

या $2x + 10 = 74$

10 को दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर $2x = 74 - 10$

या $2x = 64$

दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर $x = 32$

अर्थात् छोटी संख्या है 32 तथा दूसरी बड़ी संख्या है $x + 10 = 32 + 10 = 42$

अर्थात् अपेक्षित संख्याएँ 32 तथा 42 हैं, जो दोनों शर्तें भी पूरी करती हैं। इस विधि की उपयोगिता दिखाने के लिए हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 5 : परिमेय संख्या $\frac{-7}{3}$ के दुगुने में क्या जोड़ा जाए जिससे $\frac{3}{7}$ प्राप्त हो?

हल : परिमेय संख्या $\frac{-7}{3}$ का दुगुना है $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right) = \frac{-14}{3}$.

माना इसमें x जोड़ने पर $\frac{3}{7}$ प्राप्त होता है। अत: $x + \left(\frac{-14}{3}\right) = \frac{3}{7}$

या $x - \frac{14}{3} = \frac{3}{7}$

या $x = \frac{3}{7} + \frac{14}{3}$ ($\frac{-14}{3}$ को दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

$$= \frac{(3 \times 3) + (14 \times 7)}{21} = \frac{9 + 98}{21} = \frac{107}{21}.$$

इस प्रकार $\frac{3}{7}$ प्राप्त करने के लिए $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right)$ में $\frac{107}{21}$ जोड़ा जाना चाहिए।

उदाहरण 6 : एक आयत का परिमाप 13 cm है और उसकी चौड़ाई $2\frac{3}{4}$ cm है। उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लेते हैं कि आयत की लंबाई x cm है।

आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

$$= 2 \times \left(x + 2\frac{3}{4}\right) = 2 \times \left(x + \frac{11}{4}\right)$$

परिमाप 13 cm दिया गया है।

अतः $$2\left(x + \frac{11}{4}\right) = 13$$

या $$x + \frac{11}{4} = \frac{13}{2}$$

(दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर)

या $$x = \frac{13}{2} - \frac{11}{4}$$ ($\frac{11}{4}$ को दाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

$$= \frac{26}{4} - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

आयत की लंबाई $3\frac{3}{4}$ cm है।

उदाहरण 7 : साहिल की माँ की वर्तमान आयु साहिल की वर्तमान आयु की तीन गुनी है। 5 वर्ष बाद उन दोनों की आयु का योग 66 वर्ष हो जाएगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना साहिल की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

हम साहिल की 5 वर्ष बाद वाली आयु x वर्ष मानकर भी चल सकते थे। आप इस प्रकार चलकर प्रयत्न कीजिए।

	साहिल	माँ	योग
वर्तमान आयु	x	$3x$	
5 वर्ष बाद आयु	$x + 5$	$3x + 5$	$4x + 10$

उनकी आयु का योग 66 वर्ष दिया है

अतः $$4x + 10 = 66$$

इस समीकरण में x साहिल की वर्तमान आयु है। समीकरण हल करने के लिए 10 दाएँ पक्ष में पक्षांतरित करते हैं।

$$4x = 66 - 10$$

या $$4x = 56$$

या $$x = \frac{56}{4} = 14$$ (हल)

इस प्रकार साहिल की वर्तमान आयु 14 वर्ष है तथा उसकी माँ की आयु 42 वर्ष है। आप जाँच कर सकते हैं कि 5 वर्ष बाद उन दोनों की आयु का योग 66 वर्ष हो जाएगा।

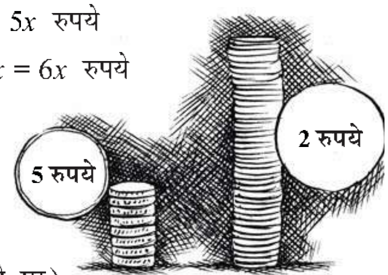
उदाहरण 8 : बंसी के पास कुछ सिक्के 2 रुपये वाले तथा कुछ 5 रुपये वाले हैं। यदि 2 रुपये वाले सिक्कों की संख्या 5 रुपये वाले सिक्कों की संख्या की तिगुनी है और उनके मूल्यों का कुल योग 77 रुपये है तो दोनों प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना बंसी के पास 5 रुपये वाले सिक्कों की संख्या x है।

तब 2 रुपये वाले सिक्कों की संख्या $= 3x$

अतः (i) 5 रुपये वाले x सिक्कों का मूल्य $= 5 \times x = 5x$ रुपये

तथा (ii) 2 रुपये वाले $3x$ सिक्कों का मूल्य $= 2 \times 3x = 6x$ रुपये



अतः कुल मूल्य $= 5x + 6x = 11x$ रुपये

कुल मूल्य दिया है 77 रुपये

अतः $11x = 77$

या $x = \dfrac{77}{11} = 7$ (दोनों पक्षों को 11 से भाग करने पर)

अर्थात् 5 रुपये वाले सिक्कों की संख्या $= x = 7$

तथा 2 रुपये वाले सिक्कों की संख्या $= 3x = 21$ (हल)

आप जाँच कर सकते हैं कि इन दोनों का मूल्य 77 रुपये ही होता है।

उदाहरण 9 : यदि 11 के तीन लगातार गुणजों का योग 363 है तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : यदि 11 का एक गुणज x है तब अगला गुणज होगा $x + 11$

और उससे अगला गुणज होगा $x + 11 + 11$ या $x + 22$

दिया है कि 11 के इन तीनों लगातार गुणजों का योग 363 है। इससे हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है –

$$x + (x + 11) + (x + 22) = 363$$

या $x + x + 11 + x + 22 = 363$

या $3x + 33 = 363$

या $3x = 363 - 33$

या $3x = 330$

या $x = \dfrac{330}{3} = 110$

अर्थात् ये तीन लगातार गुणज हैं 110, 121 तथा 132 ।

वैकल्पिक हल : 11 के तीनों लगातार गुणजों में हम मध्य वाला x मानते हैं। इसके पहले वाला गुणज होगा $x - 11$ और इसके बाद वाला गुणज होगा $x + 11$

अतः समीकरण होगा –

$$(x - 11) + x + (x + 11) = 363$$

या $3x = 363$

दोनों पक्षों को 3 से भाग करने पर

$$x = \frac{363}{3} = 121$$

इस प्रकार $x = 121$, $x - 11 = 110$, $x + 11 = 132$

अतः 11 के तीन लगातार गुणज हैं 110, 121 व 132

हम यहाँ देखते हैं कि समस्या को विभिन्न प्रकार से कैसे हल किया जा सकता है।

उदाहरण 10 : दो पूर्ण संख्याओं का अंतर 66 है। यदि उनमें 2 : 5 का अनुपात है तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि दोनों संख्याएँ 2 : 5 के अनुपात में हैं, अत: हम एक संख्या $2x$ और दूसरी $5x$ मान सकते हैं। (ध्यान दीजिए $2x : 5x$ में 2 : 5 का अनुपात है।)

इनमें अंतर है, $5x - 2x$ जो 66 के बराबर दिया है।

अत: $$5x - 2x = 66$$

या $$3x = 66$$

या $$x = 22$$

क्योंकि संख्याएँ $2x$ तथा $5x$ हैं। अत: संख्याएँ हुईं 2×22 तथा 5×22 अर्थात् 44 तथा 110 और इनका अंतर $110 - 44 = 66$ ही है जो वांछित है।

उदाहरण 11 : देवेशी के पास 50 रुपये, 20 रुपये तथा 10 रुपये वाले कुल मिलाकर 25 नोट हैं जिनका मूल्य 590 रुपये बनता है। यदि 50 रुपये तथा 20 रुपये वाले नोटों की संख्या में अनुपात 3 : 5 है तो प्रत्येक प्रकार के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : मानते हैं कि 50 रुपये तथा 20 रुपये वाले नोटों की संख्या क्रमश: $3x$ तथा $5x$ है।

लेकिन कुल नोटों की संख्या 25 है।

अत: 10 रुपये वाले नोटों की संख्या $= 25 - (3x + 5x) = 25 - 8x$

इन नोटों से उसके पास धन हुआ

50 रुपये वाले नोटों से : $3x \times 50 = 150x$ रुपये

20 रुपये वाले नोटों में : $5x \times 20 = 100x$ रुपये

10 रुपये वाले नोटों में $(25 - 8x) \times 10 = (250 - 80x)$ रुपये

और कुल धन हुआ $= 150x + 100x + (250 - 80x)$

$= (170x + 250)$ रुपये

यह धन 590 रुपये के बराबर दिया है। अत: $170x + 250 = 590$

या $$170x = 590 - 250 = 340$$

या $$x = \frac{340}{170} = 2$$

अर्थात् देवेशी के पास 50 रुपये वाले नोट $= 3x$

$= 3 \times 2 = 6$ नोट

20 रुपये वाले नोट $= 5x = 5 \times 2 = 10$ नोट

तथा 10 रुपये वाले नोट $= 25 - 8x$

$= 25 - (8 \times 2) = 25 - 16 = 9$

प्रश्नावली 2.2

1. अगर आपको किसी संख्या से $\frac{1}{2}$ घटाने और परिणाम को $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर $\frac{1}{8}$ प्राप्त होता है तो वह संख्या क्या है?
2. एक आयताकार तरण-ताल (swimming pool) की लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से 2 मीटर अधिक है। यदि इसका परिमाप 154 मीटर है तो इसकी लंबाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का आधार $\frac{4}{3}$ cm तथा उसका परिमाप $4\frac{2}{15}$ cm है। उसकी दो बराबर भुजाओं की माप ज्ञात कीजिए।
4. दो संख्याओं का योग 95 है। यदि एक संख्या दूसरी से 15 अधिक है तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. दो संख्याओं में अनुपात 5 : 3 है। यदि उनमें अंतर 18 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. तीन लगातार पूर्णांकों का योग 51 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
7. 8 के तीन लगातार गुणजों का योग 888 है। गुणजों को ज्ञात कीजिए।
8. तीन लगातार पूर्णांक बढ़ते क्रम में लेकर उन्हें क्रमश: 2, 3 तथा 4 से गुणा कर योग करने पर योगफल 74 प्राप्त होता है। तीनों पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
9. राहुल और हारुन की वर्तमान आयु में अनुपात 5 : 7 है। 4 वर्ष बाद उनकी आयु का योग 56 वर्ष हो जाएगा। उनकी वर्तमान आयु क्या है?
10. किसी कक्षा में बालक और बालिकाओं की संख्याओं में अनुपात 7 : 5 है। यदि बालकों की संख्या बालिकाओं की संख्या से 8 अधिक है तो कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी हैं?
11. बाइचुंग के पिताजी उसके दादाजी से 26 वर्ष छोटे हैं और उससे 29 वर्ष बड़े हैं। यदि उन तीनों की आयु का योग 135 वर्ष है तो उनकी आयु अलग-अलग ज्ञात कीजिए।
12. 15 वर्ष बाद रवि की आयु, उसकी वर्तमान आयु से चार गुनी हो जाएगी। रवि की वर्तमान आयु क्या है?
13. एक परिमेय संख्या को $\frac{5}{2}$ से गुणा कर $\frac{2}{3}$ जोड़ने पर $-\frac{7}{12}$ प्राप्त होता है। वह संख्या क्या है?

14. लक्ष्मी एक बैंक में खजांची है। उसके पास नगदी के रूप में 100 रुपये, 50 रुपये व 10 रुपये वाले नोट हैं। उनकी संख्याओं में क्रमश: 2 : 3 : 5 का अनुपात है और उनका कुल मूल्य 4,00,000 रुपये है। उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने नोट हैं?
15. मेरे पास 300 रुपये मूल्य के, 1 रुपये, 2 रुपये और 5 रुपये वाले सिक्के हैं। 2 रुपये वाले सिक्कों की संख्या 5 रुपये वाले सिक्कों की संख्या की तिगुनी है और सिक्कों की कुल संख्या 160 है। मेरे पास प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने सिक्के हैं?
16. एक निबंध प्रतियोगिता में आयोजकों ने तय किया कि प्रत्येक विजेता को 100 रुपये और विजेता को छोड़कर प्रत्येक प्रतिभागी को 25 रुपये पुरस्कार के रूप में दिए जाएँगे। यदि पुरस्कारों में बाँटी गई राशि 3,000 रुपये थी तो कुल 63 प्रतिभागियों में विजेताओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

2.4 समीकरण हल करना जब दोनों ही पक्षों में चर उपस्थित हो

एक समीकरण, दो बीजीय व्यंजकों के मानों में समता होती है। समीकरण $2x - 3 = 7$ में एक व्यंजक है $2x - 3$ तथा दूसरा है 7। अभी तक लिए गए लगभग सभी उदाहरणों में दाएँ पक्ष में एक ही संख्या थी। लेकिन ऐसा होना सदैव आवश्यक नहीं है। चर राशि दोनों पक्षों में भी हो सकती है। उदाहरण के लिए, समीकरण $2x - 3 = x + 2$ में, दोनों ही पक्षों में चर वाले व्यंजक हैं। बाएँ पक्ष में व्यंजक है $(2x - 3)$ तथा दाएँ में है $(x + 2)$।

- अब हम ऐसे ही समीकरणों के हल करने की चर्चा करेंगे जिनके दोनों ही पक्षों में चर वाले व्यंजक हों।

उदाहरण 12 : हल कीजिए $2x - 3 = x + 2$

हल : दिया है: $2x = x + 2 + 3$

या $2x = x + 5$

या $2x - x = x + 5 - x$ (दोनों पक्षों से x घटाने पर)

या $x = 5$ (हल)

यहाँ, हमने समीकरण के दोनों पक्षों से, एक संख्या या स्थिरांक ही नहीं, बल्कि चर वाला पद घटाया। हम ऐसा कर सकते हैं क्योंकि चर का मान भी कोई संख्या ही है। ध्यान दीजिए कि x दोनों पक्षों से घटाने से तात्पर्य है x को बाएँ पक्ष में पक्षांतरण करना।

उदाहरण 13 : हल कीजिए $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$

हल : दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

या $(2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$

या $10x + 7 = 3x - 28$

या $10x - 3x + 7 = -28$ ($3x$ को बाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

या $7x + 7 = -28$

या $7x = -28 - 7$

या $7x = -35$

या $x = \frac{-35}{7}$

या $x = -5$ (हल)

प्रश्नावली 2.3

निम्न समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $3x = 2x + 18$ **2.** $5t - 3 = 3t - 5$ **3.** $5x + 9 = 5 + 3x$

4. $4z + 3 = 6 + 2z$ 5. $2x - 1 = 14 - x$ 6. $8x + 4 = 3\,(x - 1) + 7$

7. $x = \dfrac{4}{5}\,(x + 10)$ 8. $\dfrac{2x}{3} + 1 = \dfrac{7x}{15} + 3$ 9. $2y + \dfrac{5}{3} = \dfrac{26}{3} - y$

10. $3m = 5\,m - \dfrac{8}{5}$

2.5 कुछ और उदाहरण

उदाहरण 14 : दो अंकों वाली एक संख्या के दोनों अंकों में 3 का अंतर है। इस संख्या में, इसके अंकों को बदलकर प्राप्त संख्या को जोड़ने पर 143 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : उदाहरण के तौर पर दो अंकों वाली कोई एक संख्या, जैसे 56 लेते हैं।

इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है, $56 = (10 \times 5) + 6$

इस संख्या के अंक बदलने पर संख्या मिलती है 65 जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है, $65 = (10 \times 6\,) + 5$

हम दो अंकों वाली संख्या में इकाई का अंक b मानते हैं। क्योंकि दोनों अंकों का अंतर 3 है। अत: दहाई का अंक $= b + 3$

अर्थात् दो अंकों वाली संख्या $= 10\,(b + 3) + b = 10b + 30 + b = 11b + 30$

अंकों के बदलने पर संख्या होगी $10b + (b + 3) = 11b + 3$

इन दोनों संख्याओं को जोड़ने पर मिलता है 143

अत: $(11b + 30) + (11b + 3) = 143$

या $11b + 11b + 30 + 3 = 143$

या $22b + 33 = 143$

या $22b = 143 - 33$

या $22b = 110$

या $b = \dfrac{110}{22}$

या $b = 5$

अर्थात् इकाई का अंक $= 5$

तब दहाई का अंक $= 5 + 3 = 8$

अत: संख्या $= 85$

जाँच : अंक बदलने पर संख्या 58 मिलती है। और 58 तथा 85 का योग है 143 जैसा कि दिया है।

यदि इकाई का अंक b है तब क्या हम दहाई का अंक $(b - 3)$ भी ले सकते हैं? लेकर देखिए क्या उत्तर मिलता है।

ध्यान दीजिए यह हल है जब हमने दहाई का अंक इकाई से 3 अधिक लिया। देखिए, क्या हल मिलता है जब हम दहाई का अंक $(b - 3)$ लेते हैं?

उदाहरण का कथन 58 और 85, दोनों संख्याओं के लिए सत्य है अत: दोनों उत्तर सही हैं।

उदाहरण 15 : अर्जुन की आयु श्रीया की आयु की दुगुनी है। 5 वर्ष पहले उसकी आयु श्रीया की आयु की तिगुनी थी। दोनों की आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना श्रीया की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

तब अर्जुन की वर्तमान आयु $= 2x$ वर्ष

श्रीया की 5 वर्ष पहले आयु थी $(x - 5)$ वर्ष

तथा अर्जुन की 5 वर्ष पहले आयु थी $(2x - 5)$ वर्ष

दिया है कि 5 वर्ष पहले अर्जुन की आयु श्रीया की आयु की तिगुनी थी

अत: $2x - 5 = 3(x - 5)$

या $2x - 5 = 3x - 15$

या $15 - 5 = 3x - 2x$

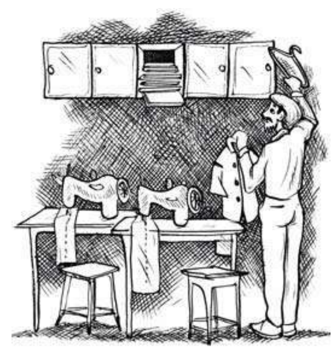
या $10 = x$

अत: श्रीया की वर्तमान आयु $= x = 10$ वर्ष

तथा अर्जुन की वर्तमान आयु $= 2x = 2 \times 10 = 20$ वर्ष

प्रश्नावली 2.4

1. अमीना एक संख्या सोचती है। वह इसमें से $\frac{5}{2}$ घटाकर परिणाम को 8 से गुणा करती है। अब जो परिणाम मिलता है वह सोची गई संख्या की तिगुनी है। वह सोची गई संख्या ज्ञात कीजिए।
2. दो संख्याओं में पहली संख्या दूसरी की पाँच गुनी है। प्रत्येक संख्या में 21 जोड़ने पर पहली संख्या दूसरी की दुगुनी हो जाती है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. दो अंकों वाली दी गई एक संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या के अंकों के स्थान बदलकर प्राप्त संख्या, दी गई संख्या से 27 अधिक है। दी गई संख्या ज्ञात कीजिए।
4. दो अंकों वाली दी गई एक संख्या में एक अंक दूसरे का तीन गुना है। इसके अंकों के स्थान बदलकर प्राप्त संख्या को, दी गई संख्या में जोड़ने पर 88 प्राप्त होता है। दी गई संख्या ज्ञात कीजिए।
5. शोबो की माँ की आयु, शोबो की आयु की छ: गुनी है। 5 वर्ष बाद शोबो की आयु, उसकी माँ की वर्तमान आयु की एक तिहाई हो जाएगी। उनकी आयु ज्ञात कीजिए।
6. महूली गाँव में, एक तंग आयताकार भूखंड विद्यालय बनाने के लिए सुरक्षित है। इस भूखंड की लंबाई और चौड़ाई में 11 : 4 का अनुपात है। गाँव पंचायत को इस भूखंड की बाड़ (fence) कराने में, 100 रुपये प्रति मीटर की दर से 75000 रुपये व्यय करने होंगे। भूखंड की माप (dimension) ज्ञात कीजिए।



7. हसन, स्कूल वर्दी बनाने के लिए दो प्रकार का कपड़ा खरीदता है। इसमें कमीज़ के कपड़े का भाव 50 रुपये प्रति मीटर तथा पतलून के कपड़े का भाव 90 रुपये प्रति मीटर है। वह कमीज़ के प्रत्येक 3 मीटर कपड़े के लिए पतलून का 2 मीटर कपड़ा खरीदता है। वह इस कपड़े को क्रमश: 12% तथा 10% लाभ पर बेचकर 36,600 रुपये प्राप्त करता है। उसने पतलूनों के लिए कितना कपड़ा खरीदा?

8. हिरणों के एक झुंड का आधा भाग मैदान में चर रहा है और शेष का तीन चौथाई पड़ोस में ही खेलकूद रहा है। शेष बचे 9 हिरण एक तालाब में पानी पी रहे हैं। झुंड में हिरणों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. दादाजी की आयु अपनी पौत्री की आयु की दस गुनी है। यदि उनकी आयु पौत्री की आयु से 54 वर्ष अधिक है तो उन दोनों की आयु ज्ञात कीजिए।

10. अमन की आयु उसके पुत्र की आयु की तीन गुनी है। 10 वर्ष पहले उसकी आयु पुत्र की आयु की पाँच गुनी थी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

2.6 समीकरणों को सरल रूप में बदलना

उदाहरण 16 : हल कीजिए : $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

6 से ही क्यों? ध्यान दीजिए हरों का ल.स.प. (L.C.M.) 6 है।

हल : दोनों पक्षों को 6 से गुणा करने पर

$$\frac{6\,(6x+1)}{3}+6\times 1=\frac{6(x-3)}{6}$$

या $\quad 2\,(6x+1)+6=x-3$

या $\quad 12x+2+6=x-3$ (कोष्ठक हटाने पर)

या $\quad 12x+8=x-3$

या $\quad 12x-x+8=-3$

या $\quad 11x+8=-3$

या $\quad 11x=-3-8$

या $\quad 11x=-11$

या $\quad x=-1$ (वांछित हल)

जाँच : बायाँ पक्ष (LHS) $=\frac{6(-1)+1}{3}+1=\frac{-6+1}{3}+1=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{-5+3}{3}=\frac{-2}{3}$

दायाँ पक्ष (RHS) $=\frac{(-1)-3}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$

बायाँ पक्ष (LHS) = दायाँ पक्ष (RHS) (जैसा वांछित था)

उदाहरण 17 : हल कीजिए : $5x-2\,(2x-7)=2\,(3x-1)+\frac{7}{2}$

हल : कोष्ठक हटाने पर

बायाँ पक्ष (LHS) $=5x-4x+14=x+14$

दायाँ पक्ष (RHS) $=6x-2+\frac{7}{2}=6x-\frac{4}{2}+\frac{7}{2}=6x+\frac{3}{2}$

अतः समीकरण $x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$ हुआ

या $$14 = 6x - x + \frac{3}{2}$$

या $$14 = 5x + \frac{3}{2}$$

या $$14 - \frac{3}{2} = 5x \qquad (\tfrac{3}{2} \text{ का पक्षांतरण करने पर})$$

या $$\frac{28-3}{2} = 5x$$

या $$\frac{25}{2} = 5x$$

या $$x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$$

अतः वांछित हल है $$x = \frac{5}{2}$$

क्या आपने ध्यान दिया कि हमने समीकरण को कैसे सरल बनाया? हमने समीकरण के दोनों पक्षों को सभी व्यंजकों के हरों के ल.स.प. से गुणा किया।

जाँच : बायाँ पक्ष (LHS) $= 5 \times \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2} \times 2 - 7\right)$

$$= \frac{25}{2} - 2(5-7) = \frac{25}{2} - 2(-2) = \frac{25}{2} + 4 = \frac{25+8}{2} = \frac{33}{2}$$

दायाँ पक्ष (RHS) $= 2\left(\frac{5}{2} \times 3 - 1\right) + \frac{7}{2}$

$$= 2\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{7}{2} = \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{26+7}{2} = \frac{33}{2} = \text{LHS} \qquad (\text{यथावांछित})$$

ध्यान दीजिए, इस उदाहरण में हमने कोष्ठकों को हटाकर और समान पदों को मिलाकर समीकरण सरल बनाया।

प्रश्नावली 2.5

निम्न रैखिक समीकरणों को हल कीजिए :

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ **2.** $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$ **3.** $x + 7 - \frac{8x}{3} = \frac{17}{6} - \frac{5x}{2}$

4. $\frac{x-5}{3} = \frac{x-3}{5}$ **5.** $\frac{3t-2}{4} - \frac{2t+3}{3} = \frac{2}{3} - t$

6. $m - \frac{m-1}{2} = 1 - \frac{m-2}{3}$

निम्न समीकरणों को सरल रूप में बदलते हुए हल कीजिए :

7. $3(t-3) = 5(2t+1)$ 8. $15(y-4) - 2(y-9) + 5(y+6) = 0$

9. $3(5z-7) - 2(9z-11) = 4(8z-13) - 17$

10. $0.25(4f-3) = 0.05(10f-9)$

2.7 रैखिक रूप में बदल जाने वाले समीकरण

उदाहरण 18 : हल कीजिए : $\dfrac{x+1}{2x+3} = \dfrac{3}{8}$

हल : ध्यान दीजिए यह समीकरण रैखिक नहीं है क्योंकि इसके बाएँ पक्ष में व्यंजक रैखिक नहीं है। लेकिन इसे हम एक रैखिक समीकरण के रूप में बदल सकते हैं। हम समीकरण के दोनों पक्षों को $(2x+3)$ से गुणा करते हैं,

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right) \times (2x+3) = \frac{3}{8} \times (2x+3)$$

ध्यान दीजिए $2x+3 \neq 0$ (क्यों?)

$(2x+3)$ बाएँ पक्ष में निरस्त (cancel) हो जाता है और हमें प्राप्त होता है :

$$x+1 = \frac{3(2x+3)}{8}$$

अब हमें एक रैखिक समीकरण मिला जिसे हम हल करना जानते हैं।

दोनों पक्षों को 8 से गुणा करने पर

$$8(x+1) = 3(2x+3)$$

यह चरण वज्र-गुणन की प्रक्रिया से भी प्राप्त हो सकता है : $\dfrac{x+1}{2x+3} \times \dfrac{3}{8}$

या $8x + 8 = 6x + 9$

या $8x = 6x + 9 - 8$

या $8x = 6x + 1$

या $8x - 6x = 1$

या $2x = 1$

या $x = \dfrac{1}{2}$

अतः हल $x = \dfrac{1}{2}$ है।

जाँच : बाएँ पक्ष में अंश $= \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$ है।

बाएँ पक्ष में हर $= 2x + 3 = 2 \times \dfrac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4$ है।

अतः बायाँ पक्ष $=$ अंश $\div$ हर $= \dfrac{3}{2} \div 4 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8}$

अर्थात् बायाँ पक्ष (LHS) = दायाँ पक्ष (RHS)

उदाहरण 19 : अनु तथा राज की वर्तमान आयु का अनुपात 4 : 5 है। 8 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 5 : 6 होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि अनु तथा राज की वर्तमान आयु क्रमश: $4x$ तथा $5x$ हैं।

8 वर्ष बाद अनु की आयु $= (4x + 8)$ वर्ष

8 वर्ष बाद राज की आयु $= (5x + 8)$ वर्ष

उनकी आयु का अनुपात $= \dfrac{4x+8}{5x+8}$, जो दिया है 5 : 6

अत: $$\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$$

वज्र-गुणन करने पर $$6\,(4x + 8) = 5\,(5x + 8)$$

या $$24x + 48 = 25x + 40$$

या $$24x + 48 - 40 = 25x$$

या $$24x + 8 = 25x$$

या $$8 = 25x - 24x$$

या $$8 = x$$

अत: अनु की वर्तमान आयु $4x = 4 \times 8 = 32$ वर्ष

तथा राज की वर्तमान आयु $5x = 5 \times 8 = 40$ वर्ष

प्रश्नावली 2.6

निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

1. $\dfrac{8x-3}{3x} = 2$ **2.** $\dfrac{9x}{7-6x} = 15$ **3.** $\dfrac{z}{z+15} = \dfrac{4}{9}$

4. $\dfrac{3y+4}{2-6y} = \dfrac{-2}{5}$ **5.** $\dfrac{7y+4}{y+2} = \dfrac{-4}{3}$

6. हरी और हैरी की वर्तमान आयु का अनुपात 5 : 7 है। अब से 4 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 3 : 4 हो जाएगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

7. एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 8 अधिक है। यदि अंश में 17 जोड़ दिया जाए तथा हर में से 1 घटा दिया जाए तब हमें $\dfrac{3}{2}$ प्राप्त होता है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. एक बीजीय समीकरण, चरों में एक समता होती है। यह प्रकट करती है कि समता के चिह्न के एक ओर वाले व्यंजक का मान उसके दूसरी ओर वाले व्यंजक के मान के बराबर होता है।
2. कक्षा VI, VII तथा VIII में सीखे जाने वाले समीकरण, एक चर वाले रैखिक समीकरण हैं। इन समीकरणों में, समीकरण बनाने वाले व्यंजकों में एक ही चर प्रयोग होता है। इसके अतिरिक्त, ये समीकरण रैखिक होते हैं अर्थात् प्रयोग किए गए चर की अधिकतम घात 1 होती है।
3. एक रैखिक समीकरण का हल कोई भी परिमेय संख्या हो सकती है।
4. समीकरण के दोनों पक्षों में कोई रैखिक व्यंजक हो सकते हैं। जो समीकरण हमने कक्षा VI तथा VII में सीखे, उनमें किसी एक पक्ष में केवल संख्या ही होती थी।
5. संख्याओं की भाँति ही चरों को भी एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षांतरित किया जा सकता है।
6. प्राय: समीकरण बनाने वाले व्यंजकों को, उसे हल करने से पहले, सरल बना लिया जाता है। आरंभ में कुछ समीकरण रैखिक नहीं होते। लेकिन उसके दोनों पक्षों को उपयुक्त व्यंजकों से गुणा कर रैखिक समीकरण के रूप में बदला जा सकता है।
7. रैखिक समीकरणों की उपयोगिता, उनके विविध अनुप्रयोगों में है। संख्याओं, आयु, परिमापों तथा मुद्रा के रूप में प्रयोग होने वाले सिक्के व नोटों पर आधारित अनेक प्रकार की समस्याएँ रैखिक समीकरणों का उपयोग कर हल की जा सकती हैं।

अध्याय

3

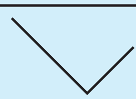
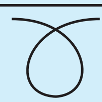
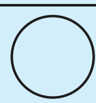
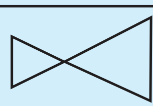
चतुर्भुजों को समझना

3.1 भूमिका

आप जानते हैं कि कागज़, **समतल** का एक प्रतिरूप है। जब आप कागज़ से पेंसिल को हटाए बिना बिंदुओं को आपस में जोड़ते हैं (अकेले बिंदुओं को छोड़कर आकृति के किसी भी भाग को अनुरेखित किए बिना) तो आप एक **समतलीय वक्र** प्राप्त करते हैं।

पिछली कक्षाओं में अलग-अलग प्रकार के देखे गए वक्रों को स्मरण करने का प्रयास कीजिए।

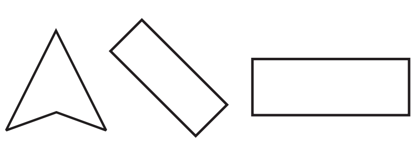
निम्न आकृतियों का सुमेलन कीजिए : (ध्यान रखिए! एक आकृति का एक से अधिक आकृतियों से सुमेलन हो सकता है।)

आकृति	नमूना
(1) 	(a) सरल बंद वक्र है।
(2) 	(b) बंद वक्र जो सरल नहीं है।
(3) 	(c) सरल वक्र जो बंद नहीं है।
(4) 	(d) सरल वक्र नहीं है।

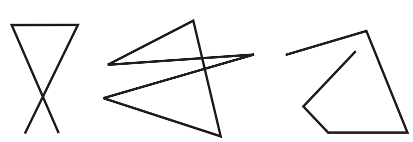
अपने मित्रों से इस मिलान की तुलना कीजिए, क्या वे सहमत हैं?

3.2 बहुभुज

केवल रेखाखंडों से बना सरल बंद वक्र **बहुभुज** कहलाता है।



वक्र जो बहुभुज हैं

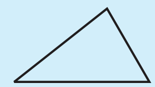
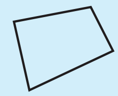
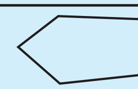
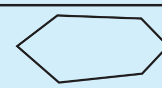
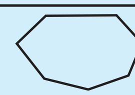
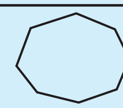
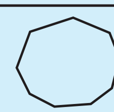
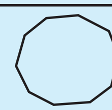


वक्र जो बहुभुज नहीं हैं

कुछ और बहुभुजों के उदाहरण देने का प्रयास कीजिए तथा कुछ और ऐसे उदाहरण दीजिए जो बहुभुज न हों। एक बहुभुज की एक कच्ची (Rough) आकृति खींचिए और उसकी भुजाओं और शीर्षों की पहचान कीजिए।

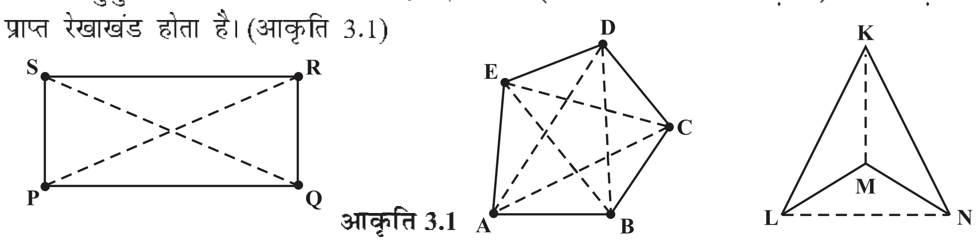
3.2.1 बहुभुजों का वर्गीकरण

हम बहुभुजों का वर्गीकरण उनकी भुजाओं (या शीर्षों) के अनुसार करते हैं।

भुजाओं या शीर्षों की संख्या	वर्गीकरण	आकृति नमूना
3	त्रिभुज	
4	चतुर्भुज	
5	पंचभुज	
6	षड्भुज	
7	सप्तभुज	
8	अष्टभुज	
9	नवभुज	
10	दसभुज	
⋮	⋮	⋮
n	n-भुज	

3.2.2 विकर्ण

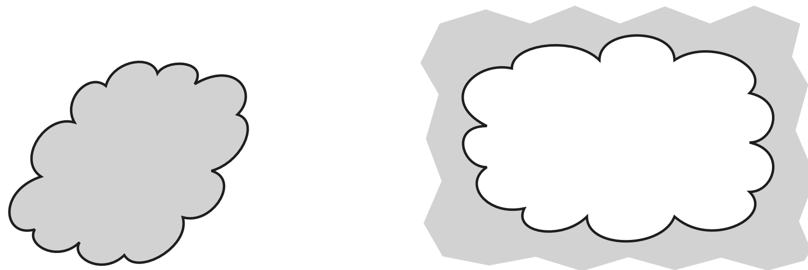
किसी बहुभुज का **विकर्ण** उसके किन्हीं दो शीर्षों (आसन्न शीर्षों को छोड़कर) को जोड़ने से प्राप्त रेखाखंड होता है। (आकृति 3.1)



आकृति 3.1

क्या आप ऊपर दी गई आकृतियों में प्रत्येक विकर्ण का नाम दे सकते हैं? (आकृति 3.1) क्या $\overline{PQ}$ एक विकर्ण है? $\overline{LN}$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

एक बंद वक्र में **अभ्यंतर** और **बहिर्भाग** का क्या अर्थ होता है यह आप भलीभाँति जानते हैं (आकृति 3.2)।

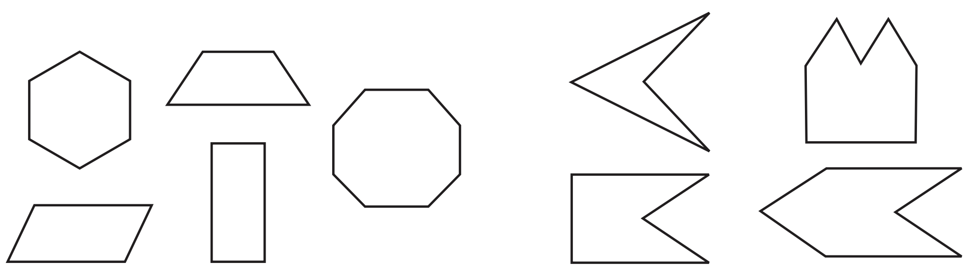


आकृति 3.2

अभ्यंतर की एक परिसीमा होती है। क्या बहिर्भाग की परिसीमा होती है? अपने दोस्तों के साथ चर्चा कीजिए।

3.2.3 उत्तल और अवतल बहुभुज

यहाँ पर कुछ उत्तल (convex) बहुभुज और कुछ अवतल (cocave) बहुभुज दिए गए हैं: (आकृति 3.3)



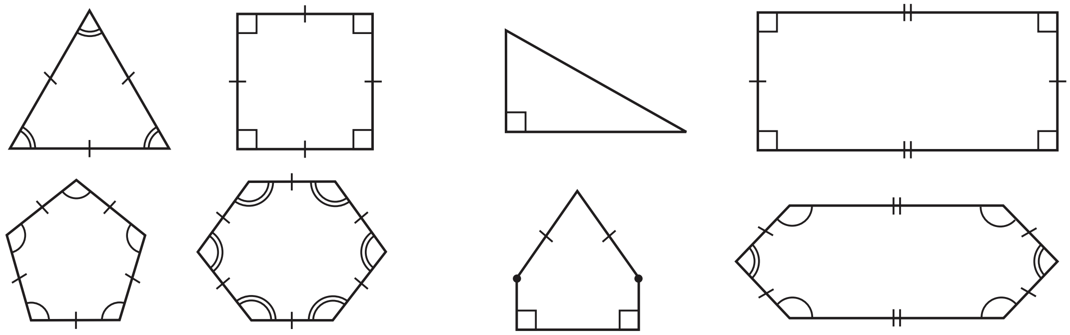
आकृति 3.3

क्या आप बता सकते हैं कि इस प्रकार के बहुभुज एक दूसरे से अलग क्यों हैं? जो बहुभुज उत्तल होते हैं उनके विकर्णों का कोई भी भाग बहिर्भाग में नहीं होता है। क्या यह अवतल बहुभुजों के लिए भी सत्य होता है? दी गई आकृतियों का अध्ययन कीजिए। तदुपरांत अपने शब्दों में उत्तल बहुभुज तथा अवतल बहुभुज समझाने का प्रयास कीजिए। प्रत्येक प्रकार की दो आकृतियाँ बनाइए।

इस कक्षा में हम केवल उत्तल बहुभुजों के बारे में अध्ययन करेंगे।

3.2.4 सम तथा विषम बहुभुज (Regular and Irregular Polygons)

एक सम बहुभुज, समभुज तथा समकोणिक होता है। उदाहरणार्थ, एक वर्ग में भुजाएँ तथा कोण बराबर माप के होते हैं। इसलिए यह एक सम बहुभुज है। एक आयत समकोणिक तो होता है परंतु समभुज नहीं होता है। क्या एक आयत एक सम बहुभुज है? क्या एक समबाहु त्रिभुज एक सम बहुभुज है? क्यों?



सम बहुभुज (Regular polygons) **विषम बहुभुज (Irregular polygons)**

[संकेत : या का उपयोग बराबर लंबाई वाले रेखाखंडों को दर्शाता है]

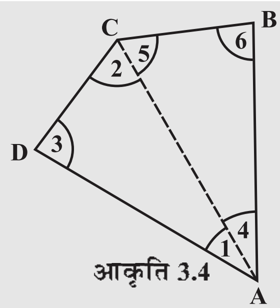
पिछली कक्षाओं में, क्या आप किसी ऐसे चतुर्भुज के बारे में पढ़ा है जो समभुज तो हो परंतु समकोणिक न हो? पिछली कक्षाओं में देखे गए चतुर्भुजों की आकृतियों का स्मरण कीजिए जैसे आयत, वर्ग, सम चतुर्भुज इत्यादि।

क्या कोई ऐसा त्रिभुज है जो समभुज तो हो परंतु समकोणिक न हो?

3.2.5 कोण-योग गुणधर्म

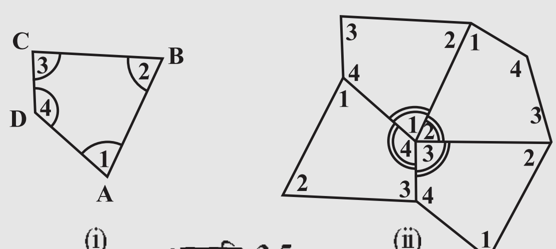
क्या आपको एक त्रिभुज के कोण-योग वाला गुणधर्म याद है? एक त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग $180°$ होता है। हमने इस तथ्य को समझाने के लिए जिस विधि का उपयोग किया उसे स्मरण कीजिए। अब हम इन अवधारणाओं को एक चतुर्भुज के लिए प्रयोग करेंगे।

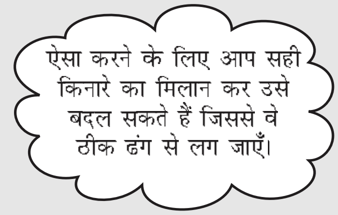
इन्हें कीजिए



आकृति 3.4

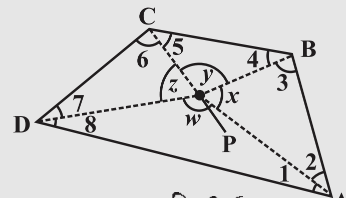
1. कोई एक चतुर्भुज, माना ABCD, लीजिए (आकृति 3.4)। एक विकर्ण खींचकर, इसे दो त्रिभुजों में बाँटिए। आप छः कोण 1, 2, 3, 4, 5 और 6 प्राप्त करते हैं।
   त्रिभुज के कोण-योग वाले गुणधर्म का उपयोग कीजिए और तर्क कीजिए कि कैसे $\angle A, \angle B, \angle C$ तथा $\angle D$ की मापों का योगफल $180° + 180° = 360°$ हो जाता है।
2. किसी चतुर्भुज ABCD, की गत्ते वाली चार सर्वांगसम प्रतिलिपियाँ लीजिए जिनके कोण दर्शाए गए हैं (आकृति 3.5 (i)). इन प्रतिलिपियों को इस प्रकार से व्यवस्थित कीजिए जिससे





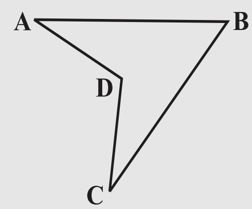
आकृति 3.5

$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ एक ही बिंदु पर मिलें जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है (आकृति 3.5 (ii))। आप $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ तथा $\angle 4$ के योगफल के बारे में क्या कह सकते हैं?
[**टिप्पणी :** हम कोणों को $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ इत्यादि से तथा उनकी मापों को $m\angle 1, m\angle 2, m\angle 3$ इत्यादि से दर्शाते हैं]
एक चतुर्भुज के चारों कोणों की मापों का योगफल ________ होता है।
आप इस परिणाम पर अन्य कई तरीकों से भी पहुँच सकते हैं।



आकृति 3.6

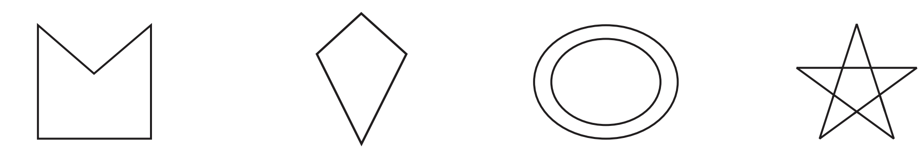
3. चतुर्भुज ABCD पर पुन: विचार कीजिए (आकृति 3.6)। माना इसके अभ्यंतर में कोई बिंदु P स्थित है। P को शीर्षों A, B, C तथा D से जोड़िए। आकृति में, ΔPAB पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि $x = 180° - m\angle 2 - m\angle 3$; इसी प्रकार, ΔPBC, से $y = 180° - m\angle 4 - m\angle 5$, ΔPCD से $z = 180° - m\angle 6 - m\angle 7$ और ΔPDA, $w = 180° - m\angle 8 - m\angle 1$ इसका उपयोग करके कुल माप $m\angle 1 + m\angle 2 + ... + m\angle 8$, ज्ञात कीजिए। क्या यह आप को परिणाम तक पहुँचाने में सहायता करता है? याद रखिए, $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w = 360°$ है।
4. ये सभी चतुर्भुज उत्तल (convex) चतुर्भुज थे। यदि चतुर्भुज उत्तल नहीं होते तो क्या होता? चतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए। इसे दो त्रिभुजों में बाँटिए और अंत:कोणों का योगफल ज्ञात कीजिए? (आकृति 3.7)



आकृति 3.7

प्रश्नावली 3.1

1. यहाँ पर कुछ आकृतियाँ दी गई हैं :



(i) (ii) (iii) (iv)

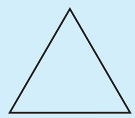
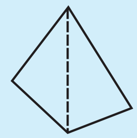
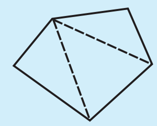
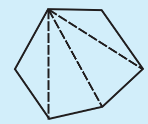
(v) (vi) (vii) (viii)

प्रत्येक का वर्गीकरण निम्नलिखित आधार पर कीजिए :

(a) साधारण वक्र (b) साधारण बंद वक्र (c) बहुभुज
(d) उत्तल बहुभुज (e) अवतल बहुभुज

2. निम्नलिखित प्रत्येक में कितने विकर्ण हैं?
(a) एक उत्तल चतुर्भुज (b) एक समषड्भुज (c) एक त्रिभुज
3. उत्तल चतुर्भुज के कोणों की मापों का योगफल क्या है? यदि चतुर्भुज, उत्तल न हो तो क्या यह गुण लागू होगा? (एक चतुर्भुज बनाइए जो उत्तल न हो और प्रयास कीजिए।)

4. तालिका की जाँच कीजिए : (प्रत्येक आकृति को त्रिभुजों में बाँटिए और कोणों का योगफल ज्ञात कीजिए)

आकृति				
भुजा	3	4	5	6
कोणों का योगफल	$180°$	$2 \times 180°$ $= (4 - 2) \times 180°$	$3 \times 180°$ $= (5 - 2) \times 180°$	$4 \times 180°$ $= (6 - 2) \times 180°$

एक बहुभुज के कोणों के योग के बारे में आप क्या कह सकते हैं जिसकी भुजाओं की संख्या निम्नलिखित हो?

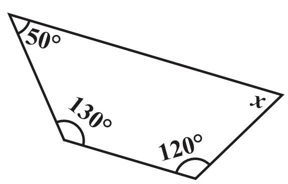
(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) n

5. सम बहुभुज क्या है?

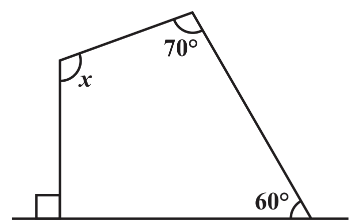
एक सम बहुभुज का नाम बताइए जिसमें

(i) 3 भुजाएँ (ii) 4 भुजाएँ (iii) 6 भुजाएँ हों।

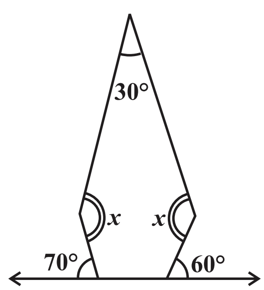
6. निम्नलिखित आकृतियों में x (कोण की माप) ज्ञात कीजिए :



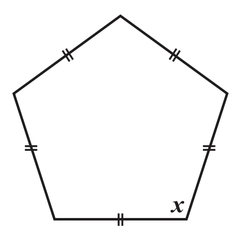
(a)



(b)

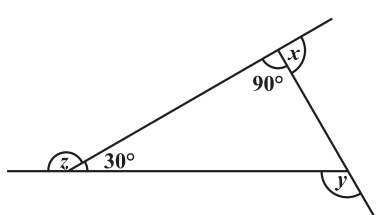


(c)

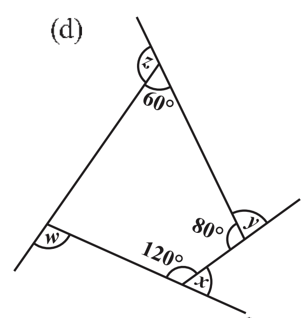


(d)

7.



(a) $x + y + z$ ज्ञात कीजिए।

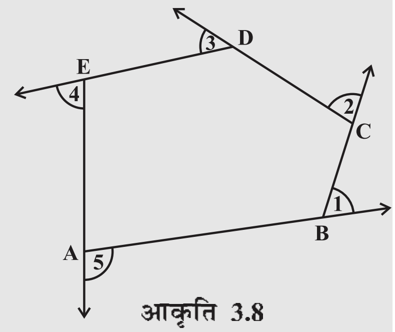


(b) $x + y + z + w$ ज्ञात कीजिए।

3.3 एक बहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग

कई अवसरों पर बाह्य कोणों की जानकारी अंत: कोणों और भुजाओं की प्रकृति पर प्रकाश डालती है।

इन्हें कीजिए



आकृति 3.8

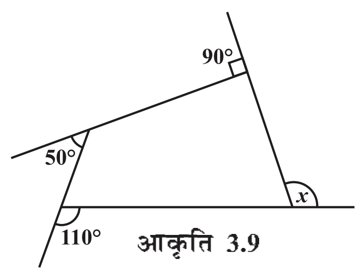
एक चॉक के टुकड़े से फर्श पर एक बहुभुज बनाइए। (आकृति में, एक पंचभुज ABCDE दर्शाया गया है) (आकृति 3.8)। हम सभी कोणों की मापों का योग जानना चाहते हैं, अर्थात् $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$ है। A से आरंभ कीजिए और $\overline{AB}$ के अनुदिश चलिए। B पर पहुँचने के उपरांत, आपको कोण $m\angle 1$ पर घूमने की आवश्यकता है जिससे आप $\overline{BC}$ के अनुदिश चल सकें। C पर पहुँचने के उपरांत, $\overline{CD}$ के अनुदिश चलने के लिए आपको $m\angle 2$ पर घूमने की आवश्यकता है। आप इसी तरीके से चलना जारी रखें जब तक आप A पर नहीं पहुँच जाते। वास्तव में, इस तरह से आपने एक पूरा चक्कर घूम लिया है।

इसलिए, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$ है।

एक बहुभुज की चाहे कितनी भी भुजाएँ हों उन सबके लिए यह सही है।

अत: किसी बहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग 360° होता है।

उदाहरण 1 : आकृति 3.9 में माप x ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.9

हल :

$$x + 90° + 50° + 110° = 360° \quad \text{(क्यों ?)}$$
$$x + 250° = 360°$$
$$x = 110°$$

प्रयास कीजिए

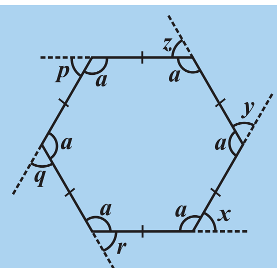
एक सम षड्भुज लीजिए (आकृति 3.10)।

(i) बाह्य कोणों x, y, z, p, q तथा r की मापों का योग क्या है?

(ii) क्या $x = y = z = p = q = r$ है? क्यों?

(iii) प्रत्येक की माप क्या है?
   (i) बाह्य कोण (ii) अंत: कोण

(iv) इस क्रियाकलाप को निम्नलिखित के लिए दोहराएँ
   (i) एक सम अष्टभुज (ii) एक सम 20 भुज



आकृति 3.10

उदाहरण 2 : एक सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए जिसके प्रत्येक बाह्य कोण की माप 45° है।

हल : सभी बाह्य कोणों की कुल माप $= 360°$

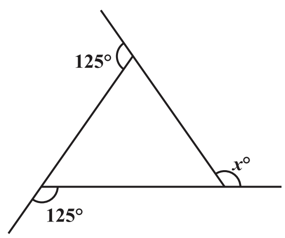
प्रत्येक बाह्य कोण की माप $= 45°$

इसलिए, बाह्य कोणों की संख्या $= \dfrac{360}{45} = 8$

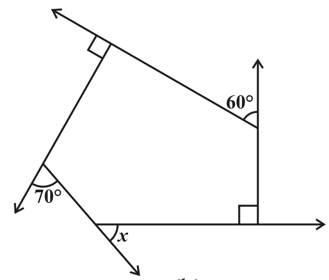
अत: बहुभुज की 8 भुजाएँ हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित आकृतियों में x का मान ज्ञात कीजिए :



(a)



(b)

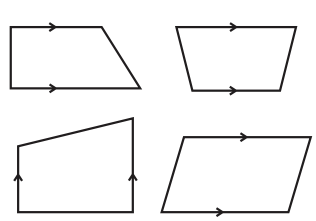
2. एक सम बहुभुज के प्रत्येक बाह्य कोण की माप ज्ञात कीजिए जिसकी
   (i) 9 भुजाएँ (ii) 15 भुजाएँ हों।
3. एक सम बहुभुज की कितनी भुजाएँ होंगी यदि एक बाह्य कोण की माप 24° हो?
4. एक सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए यदि इसका प्रत्येक अंत:कोण 165° का हो?
5. (a) क्या ऐसा सम बहुभुज संभव है जिसके प्रत्येक बाह्य कोण की माप 22° हो?
   (b) क्या यह किसी सम बहुभुज का अंत:कोण हो सकता है? क्यों?
6. (a) किसी सम बहुभुज में कम से कम कितने अंश का अंत:कोण संभव है? क्यों?
   (b) किसी सम बहुभुज में अधिक से अधिक कितने अंश का बाह्य कोण संभव है?

3.4 चतुर्भुजों के प्रकार

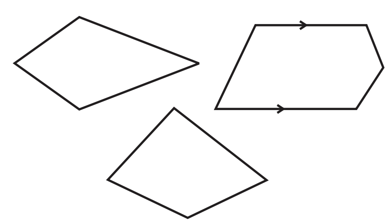
एक चतुर्भुज की भुजाओं व कोणों की प्रकृति के आधार पर इसे विशेष नाम दिए जाते हैं।

3.4.1 समलंब

समलंब एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है।



ये समलंब हैं

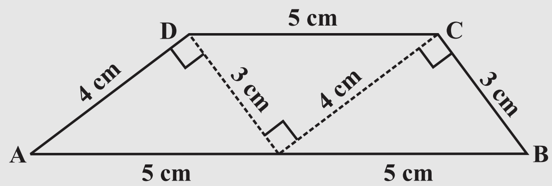


ये समलंब नहीं हैं

उपरोक्त आकृतियों का अध्ययन कीजिए और अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए कि क्यों इनमें से कुछ समलंब हैं और कुछ समलंब नहीं हैं। (**संकेत** : *तीर का निशान समांतर रेखाओं को दर्शाता है।*)

इन्हें कीजिए

1. समान सर्वांगसम त्रिभुजों के कटे हुए भाग लीजिए जिनकी भुजाएँ 3 cm, 4 cm, 5 cm हैं। इन्हें व्यवस्थित कीजिए जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है (आकृति 3.11)।



आकृति 3.11

आपको एक समलंब प्राप्त होता है। (निरीक्षण कीजिए)

यहाँ पर कौन सी भुजाएँ समांतर हैं? क्या असमांतर भुजाएँ बराबर माप की होनी चाहिए?

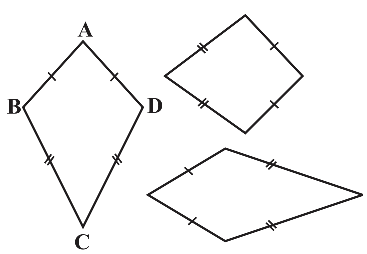
इन समान त्रिभुजों के समूह का उपयोग कर आप दो और समलंब प्राप्त कर सकते हैं। उनको ढूँढिए और उनकी आकृतियों की चर्चा कीजिए।

2. अपने तथा अपने मित्रों के ज्यामितीय बॉक्स से चार सेटस्क्वेयर लीजिए। इन्हें अलग-अलग संख्याओं में उपयोग कर साथ-साथ रखिए और अलग-अलग किस्म के समलंब प्राप्त कीजिए।

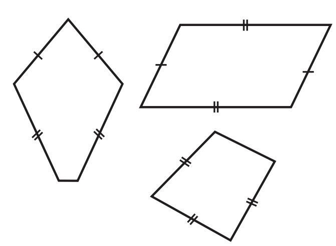
यदि समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर लंबाई की हों तो हम इसे समद्विबाहु समलंब कहते हैं। क्या आपने ऊपर किए गए अपने किसी निरीक्षण में कोई समद्विबाहु समलंब प्राप्त किया है?

3.4.2 पतंग

पतंग विशिष्ट प्रकार का एक चतुर्भुज है। प्रत्येक आकृति में एक जैसे चिह्न बराबर भुजाओं को दर्शाते हैं। उदाहरणार्थ AB = AD और BC = CD



ये पतंग हैं



ये पतंग नहीं हैं

इन आकृतियों का अध्ययन कीजिए और यह बताने का प्रयास कीजिए कि पतंग क्या है। निरीक्षण कीजिए कि :

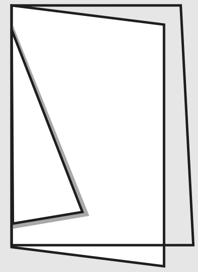
(i) एक पतंग में 4 भुजाएँ होती हैं (यह एक चतुर्भुज है)।

(ii) इसमें **अलग-अलग आसन्न भुजाओं** के दो युग्म होते हैं जिनकी लंबाई बराबर होती है।

इन्हें कीजिए

दिखाइए कि ΔABC एवं ΔADC सर्वांगसम हैं। इससे आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

एक मोटे कागज़ की शीट लीजिए।
इसे दोहरा मोड़िए।
दो अलग-अलग लंबाई वाले रेखाखंडों को खींचिए जैसाकि आकृति 3.12 में दर्शाया गया है।
इन रेखाखंडों के अनुदिश काटकर खोलिए।
आपको एक पतंग की आकृति प्राप्त होती है (आकृति 3.13)।



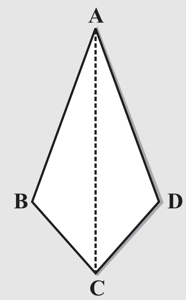
आकृति 3.12

क्या पतंग में कोई सममित रेखा है?

पतंग को दोनों विकर्णों पर मोड़िए। सेट-स्क्वेयर के उपयोग से जाँचिए कि क्या वे एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। क्या विकर्ण बराबर लंबाई के हैं?

जाँचिए (पेपर को मोड़ने या मापने द्वारा) कि क्या विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं?

पतंग के एक कोण को एक विकर्ण के अनुदिश विपरीत मोड़ने पर, बराबर माप वाले कोणों को जाँचिए।



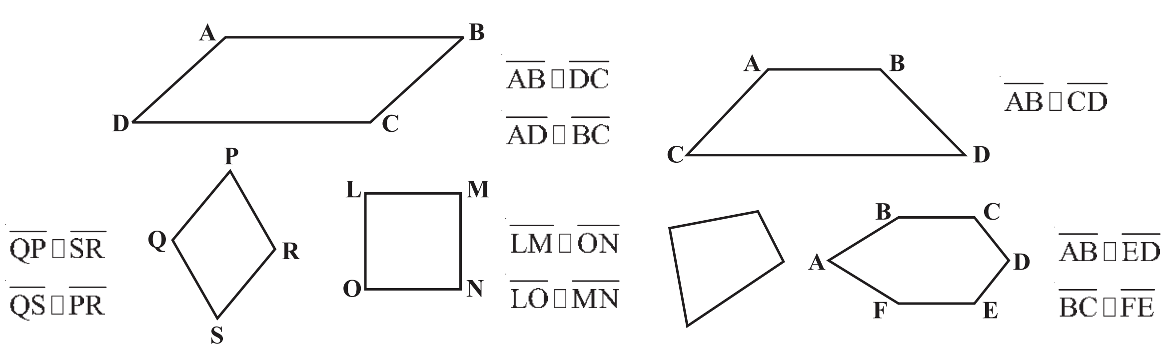
आकृति 3.13

विकर्ण पर पड़ी तह का निरीक्षण कीजिए; क्या यह दर्शाता है कि विकर्ण एक कोण समद्विभाजक होता है?

अपनी जानकारी को साथियों में बाँटिए और उनकी सूची बनाइए। इन परिणामों का सारांश अध्याय में कहीं पर आपके लिए दिया गया है।

3.4.3 समांतर चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज ही है। जैसा कि नाम संकेत करता है इसका संबंध समांतर रेखाओं से है।



ये समांतर चतुर्भुज हैं **ये समांतर चतुर्भुज नहीं हैं**

इन आकृतियों का अध्ययन कीजिए और अपने शब्दों में बताने का प्रयास कीजिए कि समांतर चतुर्भुज क्या है। अपने निष्कर्ष अपने मित्रों के साथ बाँटिए।

इन्हें कीजिए

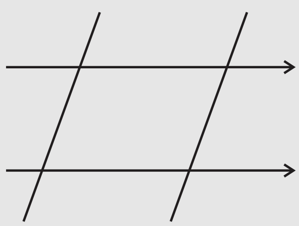
दो अलग-अलग चौड़ाई वाली गत्ते की आयताकार पट्टियाँ लीजिए (आकृति 3.14)।

पट्टी 1 **आकृति 3.14** **पट्टी 2**

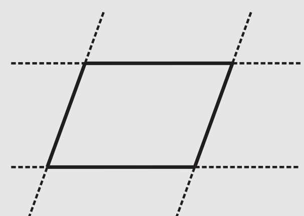
एक गत्ते की पट्टी को समतल पर रखिए और इसके किनारों के अनुदिश रेखाएँ खींचिए जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है (आकृति 3.15)।

आकृति 3.15

अब दूसरी पट्टी को खींची गई रेखाओं के ऊपर तिरछी दिशा में रखिए और इसका उपयोग करते हुए दो और रेखाओं को खींचिए जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है (आकृति 3.16)।



आकृति 3.16

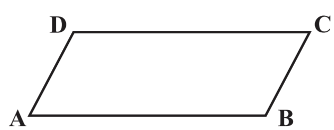


आकृति 3.17

इन चार रेखाओं से बनी बंद आकृति चतुर्भुज है (आकृति 3.17)।

यह समांतर रेखाओं के दो युग्मों से मिलकर बनी है। यह एक समांतर चतुर्भुज है।
समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज होता है जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

3.4.4 समांतर चतुर्भुज के अवयव



आकृति 3.18

एक समांतर चतुर्भुज में चार भुजाएँ और चार कोण होते हैं। इनमें से कुछ बराबर माप के होते हैं। आपको इन अवयवों से संबंधित कुछ तथ्यों को याद रखने की आवश्यकता है।

एक समांतर चतुर्भुज ABCD दिया गया है (आकृति 3.18)।

$\overline{AB}$ और $\overline{DC}$, इसकी **सम्मुख भुजाएँ** हैं। $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म बनाते हैं।

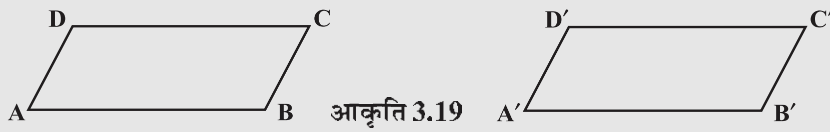
$\angle A$ और $\angle C$ **सम्मुख कोणों** का एक युग्म है और इसी प्रकार $\angle B$ तथा $\angle D$ सम्मुख कोणों का एक दूसरा युग्म है।

$\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ समांतर चतुर्भुज की **आसन्न भुजाएँ** हैं। अर्थात् जहाँ पर एक भुजा समाप्त होती है वहीं से दूसरी भुजा प्रारंभ होती है। क्या $\overline{BC}$ और $\overline{CD}$ भी आसन्न भुजाएँ हैं? दो और आसन्न भुजाओं के युग्मों को ढूँढने का प्रयास कीजिए।

$\angle A$ और $\angle B$ समांतर चतुर्भुज के **आसन्न कोण** हैं। दोनों ही कोण उभयनिष्ठ भुजा के अंत बिंदुओं पर बने हैं। $\angle B$ तथा $\angle C$ भी आसन्न कोण हैं। समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों के दूसरे युग्मों की पहचान कीजिए।

इन्हें कीजिए

दो समान समांतर चतुर्भुजों के कटे हुए भाग ABCD तथा A′B′C′D′ लीजिए (आकृति 3.19).



आकृति 3.19

यहाँ पर भुजा $\overline{AB}$, भुजा $\overline{A'B'}$ के समान है परंतु इनके नाम अलग-अलग हैं। इसी प्रकार, दूसरी संगत भुजाएँ भी समान हैं।

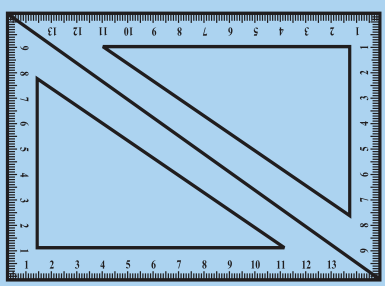
$\overline{A'B'}$ को $\overline{DC}$ के ऊपर रखिए। क्या वे एक दूसरे को पूर्णतया ढकती हैं? अब आप $\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ की लंबाई के बारे में क्या कह सकते हैं?

इसी प्रकार $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ की लंबाई की जाँच कीजिए। आप क्या पाते हैं?

आप $\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ को माप कर इस परिणाम पर पहुँच सकते हैं।

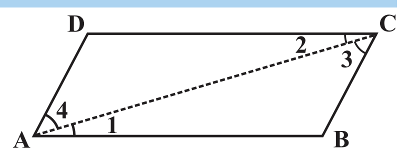
गुण : *समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की होती हैं।*

प्रयास कीजिए



आकृति 3.20

$30° - 60° - 90°$ कोणों वाले दो समान सेट-स्क्वेयर लीजिए। अब इन्हें आपस में इस प्रकार मिलाकर रखिए जिससे एक समांतर चतुर्भुज बन जाए (आकृति 3.20)। क्या यह ऊपर बताए गए गुण की पुष्टि करने में आपकी सहायता करता है?



आकृति 3.21

आप तर्क-वितर्क के द्वारा इस अवधारणा को प्रभावी बना सकते हैं। एक समांतर चतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए (आकृति 3.21)। एक विकर्ण, $\overline{AC}$ खींचिए।

हम देखते हैं कि $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (क्यों?)

क्योंकि त्रिभुज ABC और ADC में $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ और $\overline{AC}$ उभयनिष्ठ है इसलिए, ASA सर्वांगसमता कसौटी द्वारा

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (यहाँ ASA कसौटी कैसे प्रयोग हुई?)

अत: $AB = DC$ और $BC = AD$.

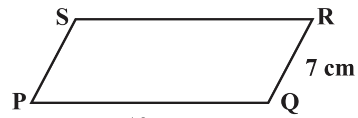
उदाहरण 3 : समांतर चतुर्भुज PQRS का परिमाप ज्ञात कीजिए (आकृति 3.22)

हल : समांतर चतुर्भुज में, सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।

इसलिए, $PQ = SR = 12$ cm और $QR = PS = 7$ cm

अत: परिमाप = PQ + QR + RS + SP

= 12 cm + 7 cm + 12 cm + 7 cm = 38 cm



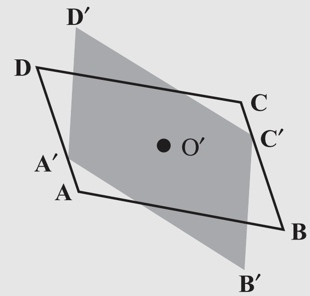
आकृति 3.22

3.4.5 समांतर चतुर्भुज के कोण

हमने समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं से संबंधित एक गुण का अध्ययन किया। हम कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?

इन्हें कीजिए

माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 3.23)। ट्रेसिंग शीट पर इसकी प्रतिलिपि बनाइए। इस प्रतिलिपि को A′B′C′D′ से प्रदर्शित कीजिए। A′B′C′D′ को ABCD पर आच्छादित कीजिए। दोनों चतुर्भुजों को आपस में मिलाकर उस बिंदु पर पिन लगाइए जहाँ पर उनके विकर्ण प्रतिच्छेद करते हों, ट्रेसिंग शीट को 180° घुमाइए। समांतर चतुर्भुज अभी भी एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं; परंतु अब आप देखते हैं कि A′ पूर्ण रूप से C पर और C पूर्ण रूप से B′ पर आ जाता है। इसी प्रकार B′ बिंदु D पर जाता है और विलोम रूप से भी सत्य है।



आकृति 3.23

क्या यह कोण A तथा कोण C की मापों के बारे में आपको कुछ बताता है? कोण B तथा D की मापों के लिए जाँच कीजिए। अपने निष्कर्ष की चर्चा कीजिए।

गुण : *समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर माप के होते हैं।*

प्रयास कीजिए

$30° - 60° - 90°$ कोणों वाले दो समान सेट-स्क्वेयर लेकर पहले की तरह ही एक समांतर चतुर्भुज बनाइए। क्या प्राप्त आकृति ऊपर बताए गए गुण की पुष्टि करने में आपकी सहायता करती है?

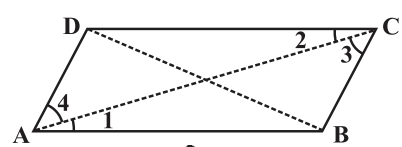
आप इस अवधारणा की तर्क-वितर्क के द्वारा पुष्टि कर सकते हैं।

यदि $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ समांतर चतुर्भुज के विकर्ण हों (आकृति 3.24) तो आप देखेंगे कि

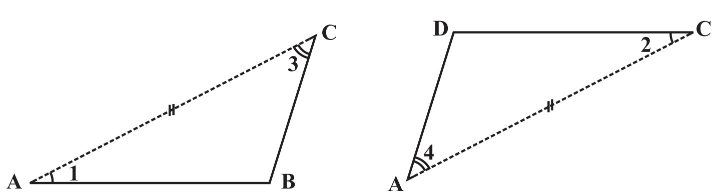
$\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (क्यों?)

Δ ABC तथा Δ ADC का अलग-अलग अध्ययन करने पर आप देखेंगे कि (आकृति 3.25) ASA सर्वांगसम कसौटी के द्वारा

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कैसे?)



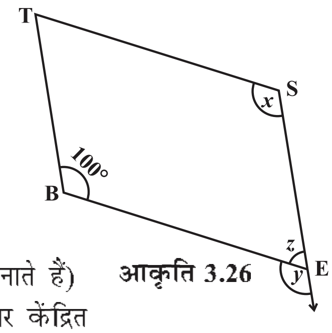
आकृति 3.24



आकृति 3.25

यह दर्शाता है कि $\angle B$ और $\angle D$ समान माप के हैं। इस प्रकार आप प्राप्त करते हैं $m\angle A = m\angle C$

उदाहरण 4 : आकृति 3.26 में BEST एक समांतर चतुर्भुज है। x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.26

हल : बिंदु S, बिंदु B के विपरीत है।

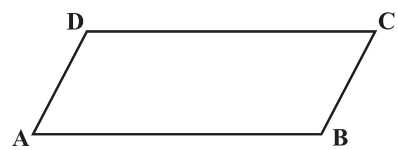
अत: $x = 100°$ (सम्मुख कोण गुण)

$y = 100°$ ($\angle x$ के संगत कोण की माप)

$z = 80°$ (क्योंकि $\angle y$ और $\angle z$ रैखिक युग्म बनाते हैं)

अब हम अपना ध्यान एक समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों पर केंद्रित करते हैं।

समांतर चतुर्भुज ABCD में (आकृति 3.27) $\angle A$ और $\angle D$ संपूरक कोण हैं,



आकृति 3.27

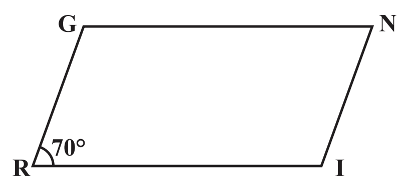
क्योंकि $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ और $\overline{DA}$, एक तिर्यक रेखा है। अत: दोनों कोण अंत: सम्मुख कोण हैं।

$\angle A$ और $\angle B$ भी संपूरक कोण हैं। क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'?

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ और $\overline{BA}$ एक तिर्यक रेखा है जो $\angle A$ तथा $\angle B$ को अंत: सम्मुख कोण बनाती है। आकृति से दो और संपूरक कोणों के युग्मों की पहचान कीजिए।

गुण : *समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोण संपूरक होते हैं।*

उदाहरण 5 : समांतर चतुर्भुज RING में (आकृति 3.28) यदि $m\angle R = 70°$ हो तो दूसरे सभी कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.28

हल : दिया है $m\angle R = 70°$

तब $m\angle N = 70°$

क्योंकि $\angle R$ तथा $\angle I$ संपूरक कोण हैं

$m\angle I = 180° - 70° = 110°$

और $m\angle G = 110°$ क्योंकि $\angle G$, $\angle I$ का सम्मुख कोण है।

अत: $m\angle R = m\angle N = 70°$ और $m\angle I = m\angle G = 110°$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

$m\angle R = m\angle N = 70°$, दर्शाने के उपरांत क्या आप किसी अन्य विधि से $m\angle I$ और $m\angle G$ को ज्ञात कर सकते हैं?

3.4.6 समांतर चतुर्भुज के विकर्ण

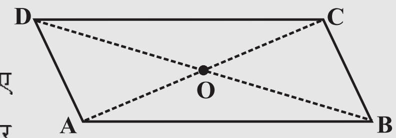
साधारणतया समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर माप के नहीं होते।

(क्या आपने अपने पूर्व क्रियाकलाप में इसे जाँचा?)

यद्यपि समांतर चतुर्भुज के विकर्णों में एक रोचक गुण होता है।

इन्हें कीजिए

समांतर चतुर्भुज, (मान लीजिए ABCD,) का एक कटा हुआ भाग लीजिए (आकृति 3.29)। माना इसके विकर्ण $\overline{AC}$ तथा $\overline{DB}$ एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं।

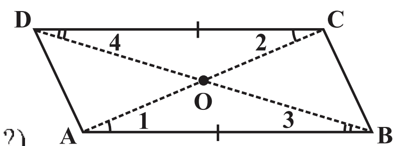


आकृति 3.29

C को A पर रखकर एक तह (Fold) के द्वारा $\overline{AC}$ का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए। क्या मध्य बिंदु O ही है? क्या यह दर्शाता है कि विकर्ण $\overline{DB}$, विकर्ण $\overline{AC}$ को बिंदु 'O' पर समद्विभाजित करता है? अपने मित्रों के साथ इसकी चर्चा कीजिए। इस क्रियाकलाप को यह ज्ञात करने के लिए दोहराएँ कि $\overline{DB}$ का मध्य बिंदु कहाँ पर स्थित होगा।

गुण : *समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। (अवश्य ही उनके प्रतिच्छेदी बिंदु पर।)*

इस गुण का तर्क-वितर्क तथा पुष्टि करना मुश्किल नहीं है। आकृति 3.30 से, ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा बड़ी आसानी से देखा जा सकता है कि



आकृति 3.30

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (यहाँ पर ASA प्रतिबंध का कैसे प्रयोग हुआ ?)

अत: $AO = CO$ तथा $BO = DO$

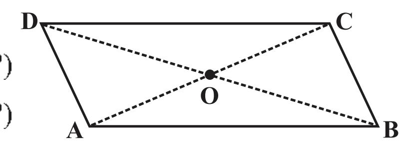
उदाहरण 6 : आकृति 3.31 में, HELP एक समांतर चतुर्भुज है। दिया है (लंबाई cm में है): OE = 4 और HL, PE से 5 अधिक है। OH ज्ञात कीजिए।

हल : यदि $OE = 4$ तब $OP = 4$ (क्यों?)

अत: $PE = 8$, (क्यों?)

इसलिए $HL = 8 + 5 = 13$

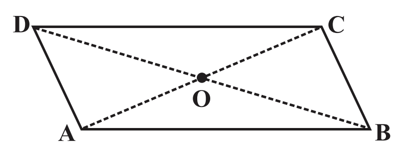
अत: $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ cm



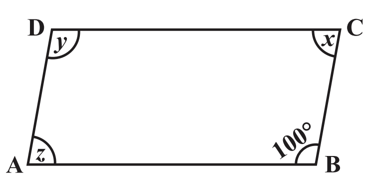
आकृति 3.31

प्रश्नावली 3.3

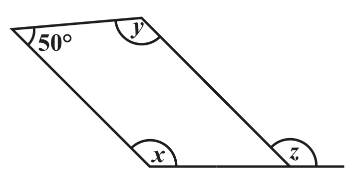
1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। प्रत्येक कथन को परिभाषा या प्रयोग किए गए गुण द्वारा पूरा कीजिए :
   (i) AD = ... (ii) $\angle DCB$ = ...
   (iii) OC = ... (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...



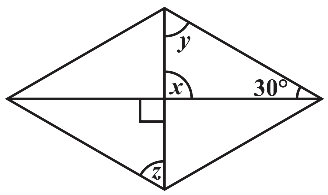
2. निम्न समांतर चतुर्भुजों में अज्ञात x, y, z के मानों को ज्ञात कीजिए :



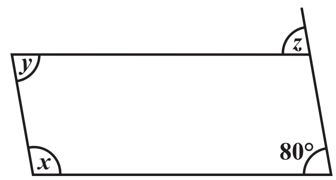
(i)



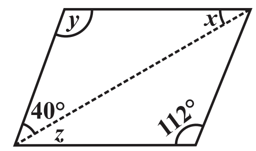
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

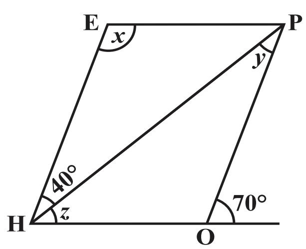
3. क्या एक चतुर्भुज ABCD समांतर चतुर्भुज हो सकता है यदि

(i) $\angle D + \angle B = 180°$? (ii) AB = DC = 8 cm, AD = 4 cm और BC = 4.4 cm?

(iii) $\angle A = 70°$ और $\angle C = 65°$?

4. एक चतुर्भुज की कच्ची (Rough) आकृति खींचिए जो समांतर चतुर्भुज न हो परंतु जिसके दो सम्मुख कोणों की माप बराबर हो।

5. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 3 : 2 है। समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

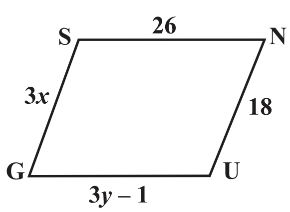


6. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों की माप बराबर है। समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

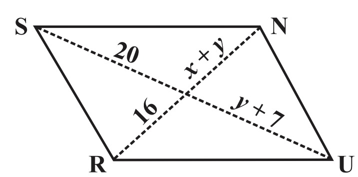
7. संलग्न आकृति HOPE एक समांतर चतुर्भुज है। x, y और z कोणों की माप ज्ञात कीजिए। ज्ञात करने में प्रयोग किए गए गुणों को बताइए।

8. निम्न आकृतियाँ GUNS और RUNS समांतर चतुर्भुज हैं। x तथा y ज्ञात कीजिए (लंबाई cm में है):

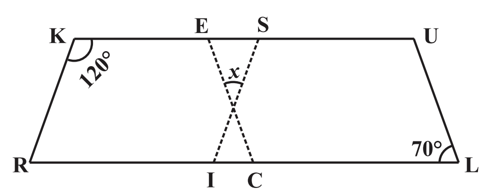
(i)



(ii)

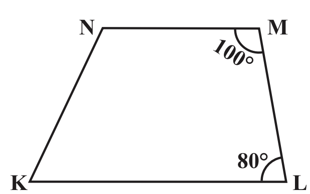


9. दी गई आकृति में RISK तथा CLUE दोनों समांतर चतुर्भुज हैं, x का मान ज्ञात कीजिए।

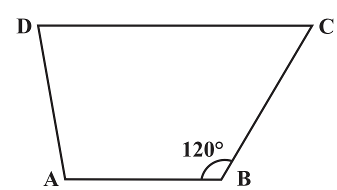


10. बताइए कैसे यह आकृति एक समलंब है। इसकी कौन सी दो भुजाएँ समांतर हैं? (आकृति 3.32)

11. आकृति 3.33 में $m\angle C$ ज्ञात कीजिए यदि $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ है।

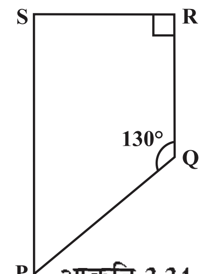


आकृति 3.32



आकृति 3.33

12. आकृति 3.34 में $\angle P$ तथा $\angle S$ की माप ज्ञात कीजिए यदि $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ है। (यदि आप $m\angle R$, ज्ञात करते हैं, तो क्या $m\angle P$ को ज्ञात करने की एक से अधिक विधि है?)



आकृति 3.34

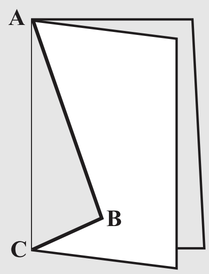
3.5 कुछ विशिष्ट समांतर चतुर्भुज

3.5.1 सम चतुर्भुज

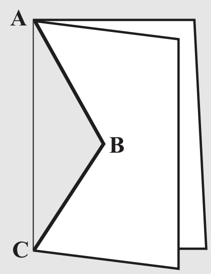
पतंग (जो कि एक समांतर चतुर्भुज नहीं है) की विशेष स्थिति के रूप में हमें एक सम चतुर्भुज (Rhombus) जो एक समांतर चतुर्भुज भी है, प्राप्त होता है।

इन्हें कीजिए

आपके द्वारा कागज़ से काटकर पहले बनाई गई पतंग का स्मरण करें।



पतंग-काट (Kite-cut)



सम चतुर्भुज-काट (Rhombus-cut)

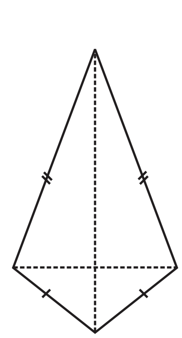
जब आप ABC के अनुदिश काटकर खोलते हैं तो आप एक पतंग प्राप्त करते हैं। यहाँ पर लंबाई AB और BC अलग-अलग थीं। यदि आप AB = BC खींचते हैं तो प्राप्त की गई पतंग एक **सम चतुर्भुज कहलाता** है।

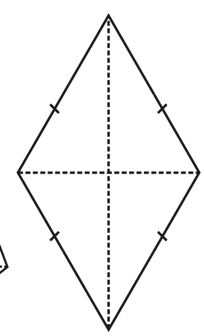
ध्यान दीजिए कि सम चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं परंतु पतंग की स्थिति में ऐसा नहीं है।

सम चतुर्भुज एक चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।

क्योंकि सम चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं, इसलिए यह एक समांतर चतुर्भुज भी है। अत: *एक सम चतुर्भुज में एक समांतर चतुर्भुज और एक पतंग के भी सभी गुण विद्यमान हैं।* उनकी सूची तैयार करने का प्रयास कीजिए। तब आप अपनी सूची पुस्तक में दी गई जाँच सूची के साथ मिलाकर पुष्टि कर सकते हैं। एक सम चतुर्भुज का सबसे उपयोगी गुण उसके विकर्णों का है।

गुण : *एक सम चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब समद्विभाजक होते हैं।*

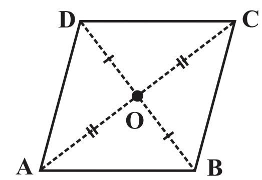

पतंग


सम चतुर्भुज

इन्हें कीजिए

सम चतुर्भुज की एक प्रतिलिपि लीजिए। पेपर को मोड़कर जाँच कीजिए कि क्या प्रतिच्छेदी बिंदु प्रत्येक विकर्ण का मध्यबिंदु है। आप एक सेट-स्क्वेयर के किनारे का उपयोग करके जाँच सकते हैं कि वे एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

तर्क-पूर्ण चरणों का उपयोग कर यहाँ एक खाका दिया गया है जो इस गुण की पुष्टि करता है।



आकृति 3.35

ABCD एक सम चतुर्भुज है (आकृति 3.35)। अत: यह एक समांतर चतुर्भुज भी है।

चूँकि विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं,

अत: $OA = OC$ और $OB = OD$

हमें यह दर्शाना है कि $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$ है।

SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध से यह देखा जा सकता है कि

चूँकि $AO = CO$ (क्यों?)
$AD = CD$ (क्यों?)
$OD = OD$

$$\Delta\, AOD \cong \Delta\, COD$$

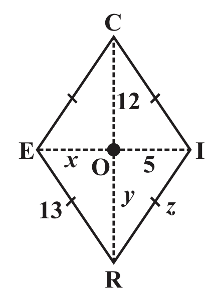
अत: $m\,\angle AOD = m\,\angle COD$

क्योंकि $\angle AOD$ और $\angle COD$ रैखिक युग्म बनाते हैं,

$$m\,\angle AOD = m\,\angle COD = 90°$$

उदाहरण 7 :

RICE एक सम चतुर्भुज है (आकृति 3.36)। x, y, तथा z का मान ज्ञात कीजिए और अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।



आकृति 3.36

हल :

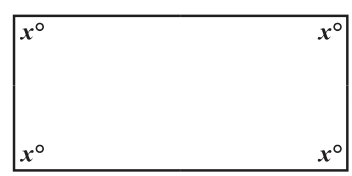
$x = OE$
$= OI$ (विकर्ण समद्विभाजित करते हैं)
$= 5$

$y = OR$
$= OC$ (विकर्ण समद्विभाजित करते हैं)
$= 12$

$z =$ सम चतुर्भुज की भुजा
$= 13$ (सम चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर माप की होती हैं)

3.5.2 एक आयत

आयत एक समांतर चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समान माप के होते हैं (आकृति 3.37)।



आकृति 3.37

इस परिभाषा का पूर्ण अर्थ क्या है? इसकी चर्चा अपने मित्रों के साथ कीजिए। यदि आयत समकोणिक हो तो प्रत्येक कोण की माप क्या होगी? माना प्रत्येक कोण की माप $x°$ होगी।

तब $4x° = 360°$ (क्यों)?

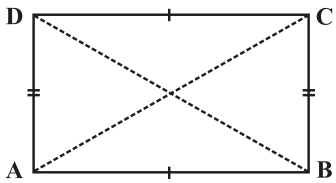
इसलिए, $x° = 90°$

अत: आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

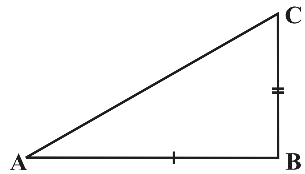
अत: एक आयत समांतर चतुर्भुज होता है जिसमें प्रत्येक कोण समकोण होता है।

एक समांतर चतुर्भुज होने के कारण आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं और विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। समांतर चतुर्भुज में विकर्ण अलग-अलग लंबाई के हो सकते हैं (जाँच कीजिए) : परंतु आयत (विशेष स्थिति में) के विकर्ण बराबर माप (लंबाई) के होते हैं।

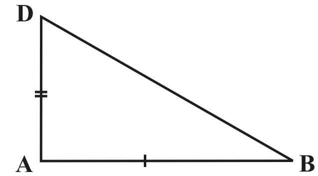
गुण : *आयत के विकर्ण बराबर लंबाई के होते हैं।*



आकृति 3.38



आकृति 3.39



आकृति 3.40

इसकी पुष्टि आसानी से हो सकती है। यदि ABCD एक आयत है (आकृति 3.38) तो त्रिभुज ABC तथा ABD को अलग-अलग (आकृति 3.39 और आकृति 3.40) देखने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$

क्योंकि $AB = AB$ (उभयनिष्ठ)

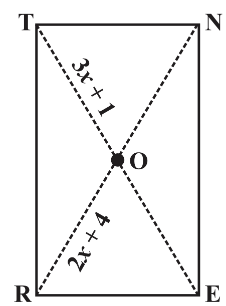
$BC = AD$ (क्यों?)

$m\angle A = m\angle B = 90°$ (क्यों?)

SAS प्रतिबंध से सर्वांगसमता होती है।

अत: $AC = BD$

और एक आयत में विकर्ण बराबर लंबाई के होने के अतिरिक्त एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। (क्यों?)



आकृति 3.41

उदाहरण 8 : RENT एक आयत है (आकृति 3.41)। इसके विकर्ण एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं। x, का मान ज्ञात कीजिए यदि $OR = 2x + 4$ और $OT = 3x + 1$ हैं।

हल : $\overline{OT}$, विकर्ण $\overline{TE}$ का आधा है। $\overline{OR}$, विकर्ण $\overline{RN}$ का आधा है।

यहाँ पर विकर्ण बराबर लंबाई के हैं। (क्यों?) अत: उनके आधे भी आपस में बराबर हैं।

इसलिए $3x + 1 = 2x + 4$

अर्थात् $x = 3$

3.5.3 वर्ग

वर्ग एक आयत होता है जिसकी भुजाएँ बराबर होती हैं।

इसका मतलब यह है कि एक वर्ग में एक आयत के सभी गुण होने के साथ-साथ एक अतिरिक्त गुण भी होता है कि इसकी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।

वर्ग के विकर्ण, आयत के विकर्णों की तरह ही, बराबर लंबाई के होते हैं।

एक आयत में विकर्णों का एक दूसरे पर लंब होना आवश्यक नहीं होता है (जाँचिए)। किसी वर्ग में विकर्ण

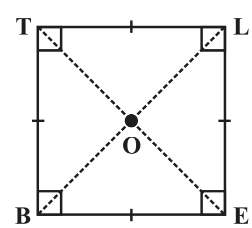
(i) एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं (वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है)।

(ii) बराबर लंबाई के होते हैं। (वर्ग एक आयत है।) और

(iii) एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित गुणधर्म प्राप्त होता है।

गुण : *वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।*



BELT एक वर्ग है जिसमें,

$BE = EL = LT = TB$

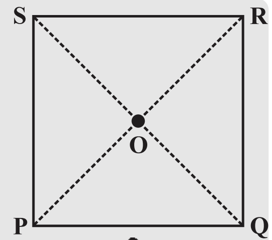
$\angle B, \angle E, \angle L, \angle T$ तथा समकोण हैं।

$BL = ET$ और $\overline{BL} \perp \overline{ET}$

$OB = OL$ और $OE = OT$

इन्हें कीजिए

एक वर्गाकार शीट, माना PQRS लीजिए (आकृति 3.42)।
दोनों विकर्णों के अनुदिश तह (fold) लगाइए। क्या उनके मध्य बिंदु समान ही हैं।
सेट-स्क्वेयर का उपयोग करके जाँच कीजिए, क्या 'O' पर बना कोण 90° का है। यह ऊपर बताए गए गुणधर्म को सिद्ध करता है।



आकृति 3.42

तर्क-वितर्क की सहायता से हम इसकी पुष्टि कर सकते हैं।
ABCD एक वर्ग है जिसके विकर्ण एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 3.43)।

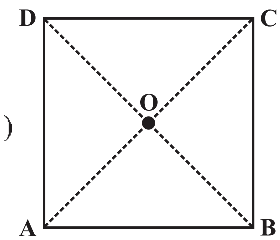
$OA = OC$ (क्योंकि वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है)

SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अनुसार

$\Delta\, AOD \cong \Delta\, COD$ (कैसे?)

अत: $m\angle AOD = m\angle COD$

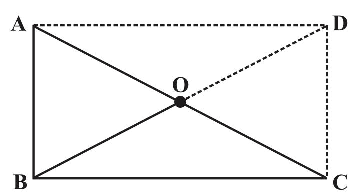
ये कोण रैखिक युग्म बनाते हैं। अत: प्रत्येक कोण समकोण है।



आकृति 3.43

प्रश्नावली 3.4

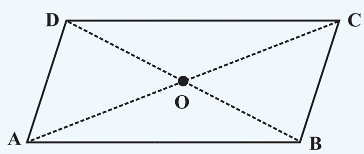
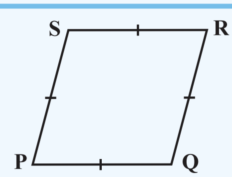
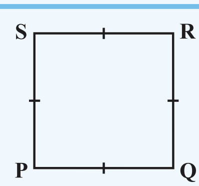
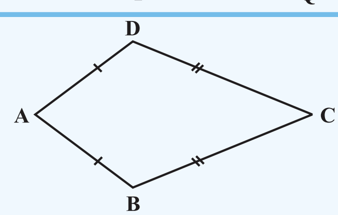
1. बताइए, कथन सत्य है या असत्य :
   (a) सभी आयत वर्ग होते हैं
   (b) सभी सम चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं
   (c) सभी वर्ग सम चतुर्भुज और आयत भी होते हैं
   (d) सभी वर्ग समांतर चतुर्भुज नहीं होते।
   (e) सभी पतंगें सम चतुर्भुज होती हैं
   (f) सभी सम चतुर्भुज पतंग होते हैं
   (g) सभी समांतर चतुर्भुज समलंब होते हैं
   (h) सभी वर्ग समलंब होते हैं।
2. उन सभी चतुर्भुजों की पहचान कीजिए जिनमें
   (a) चारों भुजाएँ बराबर लंबाई की हों
   (b) चार समकोण हों
3. बताइए कैसे एक वर्ग
   (i) एक चतुर्भुज (ii) एक समांतर चतुर्भुज (iii) एक सम चतुर्भुज
   (iv) एक आयत है।
4. एक चतुर्भुज का नाम बताइए जिसके विकर्ण
   (i) एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं
   (ii) एक दूसरे पर लंब समद्विभाजक हो
   (iii) बराबर हों।
5. बताइए एक आयत उत्तल चतुर्भुज कैसे है।
6. ABC एक समकोण त्रिभुज है और 'O' समकोण की सम्मुख भुजा का मध्य बिंदु है। बताइए कैसे 'O' बिंदु A, B तथा C से समान दूरी पर स्थित है। (बिंदुओं से चिह्नित अतिरिक्त भुजाएँ आपकी सहायता के लिए खींची गई हैं)



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक राजमिस्त्री एक पत्थर की पट्टी बनाता है। वह इसे आयताकार बनाना चाहता है। कितने अलग-अलग तरीकों से उसे यह विश्वास हो सकता है कि यह आयताकार है।
2. वर्ग को आयत के रूप में परिभाषित किया गया था जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। क्या हम इसे सम चतुर्भुज के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जिसके कोण बराबर माप के हों? इस विचार को स्पष्ट कीजिए।
3. क्या एक समलंब के सभी कोण बराबर माप के हो सकते हैं? क्या इसकी सभी भुजाएँ बराबर हो सकती हैं? वर्णन कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

चतुर्भुज	गुण
समांतर चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समांतर होता है। 	(1) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। (2) सम्मुख कोण बराबर होते हैं। (3) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
सम चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर माप की होती हैं। 	(1) समांतर चतुर्भुज के सभी गुण होते हैं। (2) विकर्ण परस्पर लंब होते हैं।
आयत : एक समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण होता है। 	(1) समांतर चतुर्भुज के सभी गुण होते हैं। (2) प्रत्येक कोण समकोण होता हैं। (3) विकर्ण बराबर माप के होते हैं।
वर्ग : एक आयत जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। 	समांतर चतुर्भुज, सम चतुर्भुज तथा आयत सभी के गुण होते हैं।
पतंग : एक चतुर्भुज जिसमें दो आसन्न भुजाओं के युग्म बराबर होते हैं। 	(1) विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं। (2) एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करता है। (3) आकृति में, $m\angle B = m\angle D$ परंतु $m\angle A \neq m\angle C$

नोट

अध्याय

4

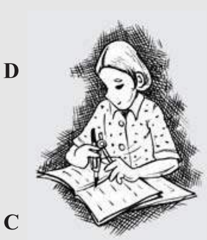
प्रायोगिक ज्यामिति

4.1 भूमिका

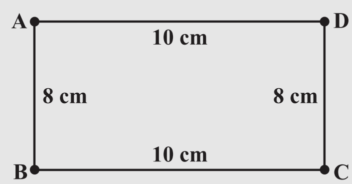
आप कक्षा VII में त्रिभुजों की रचना करना सीख चुके हैं। हमें एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना के लिए तीन मापों (भुजाओं और कोणों) की आवश्यकता होती है।

चूँकि एक त्रिभुज की रचना करने के लिए तीन मापों का होना पर्याप्त है, एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि क्या एक अद्वितीय चार भुजाओं वाली बंद आकृति की जिसे चतुर्भुज कहते हैं, रचना के लिए चार मापें पर्याप्त होंगी।

इन्हें कीजिए

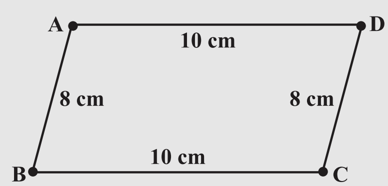


समान लंबाई (मान लीजिए 10 cm) वाली तीलियों (Sticks) का एक युग्म लीजिए। अब एक दूसरा समान लंबाई, (माना 8 cm) वाली तीलियों का युग्म लीजिए। इन्हें आपस में इस प्रकार जोड़िए (Hinge) जिससे 10 cm लंबाई तथा 8 cm चौड़ाई वाला एक आयत प्राप्त हो जाए। इस आयत का निर्माण 4 मापों के उपयोग से किया गया है। (आकृति 4.1)



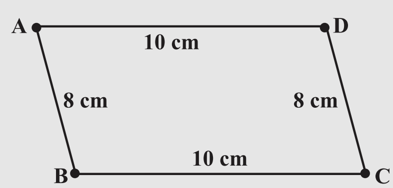
आकृति 4.1

अब आयत की चौड़ाई के अनुदिश दबाव डालिए। क्या नयी प्राप्त आकृति अभी भी एक आयत है (आकृति 4.2)? ध्यान दीजिए कि अब आयत एक समांतर चतुर्भुज बन गया है। क्या आपने तीलियों की लंबाइयों को बदला है? नहीं, भुजाओं की माप वही रहती है।



आकृति 4.2

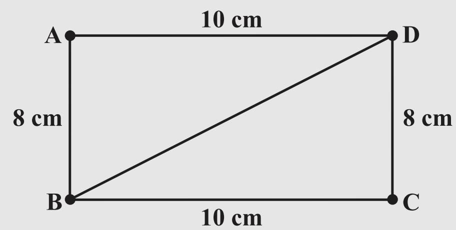
नयी प्राप्त आकृति को दूसरी दिशा में दबाव डालिए। आपको क्या प्राप्त होता है? आप पुनः एक समांतर चतुर्भुज प्राप्त करते हैं जो बिल्कुल अलग है (आकृति 4.3)। अभी भी चारों माप वही रहती हैं।



आकृति 4.3

यह दर्शाता है कि एक चतुर्भुज की चार मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त नहीं हो सकता है। क्या पाँच मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त हो सकता है?

आइए, इस क्रियाकलाप पर पुन: विचार करें। आप, प्रत्येक 10 cm लंबाई की दो तीलियों एवं प्रत्येक 8 cm लंबाई की दो तीलियों की सहायता से एक आयत की रचना कर चुके हैं। अब BD के बराबर लंबाई वाली एक दूसरी तीली को BD के अनुदिश बाँधिए (आकृति 4.4)। यदि आप अब चौड़ाई की ओर दबाव डालते हैं तो क्या आकृति में परिवर्तन होता है? नहीं, आकृति को खोले बिना परिवर्तन संभव नहीं हो सकता है। पाँचवीं तीली के प्रवेश ने आयत को अद्वितीय रूप से स्थिर कर दिया है, अर्थात्, कोई दूसरा चतुर्भुज (दी गई भुजाओं की लंबाई के बराबर) अब संभव नहीं है।



आकृति 4.4

अत: हमने देखा कि पाँच मापों से हमें एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त होता है।

परंतु क्या एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना करने के लिए कोई भी पाँच माप (भुजाओं और कोणों की) पर्याप्त हैं?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

अरशद के पास एक चतुर्भुज ABCD की पाँच माप हैं। ये माप AB = 5 cm, ∠A = 50°, AC = 4 cm, BD = 5 cm और AD = 6 cm हैं। क्या वह इन मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज बना सकता है? अपने उत्तर के कारण दीजिए।

4.2 एक चतुर्भुज की रचना

अब हम सीखेंगे कि दी हुई निम्नलिखित मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना कैसे की जा सकती है।

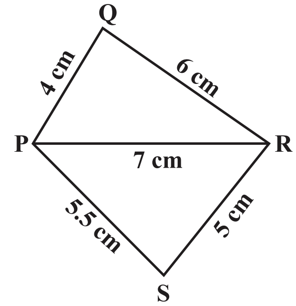
- जब चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हुआ है।
- जब दो विकर्ण और तीन भुजाएँ दी हुई हैं।
- जब दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए हुए हैं।
- जब तीन भुजाएँ और उनके बीच के दो कोण दिए हुए हैं।
- जब अन्य विशिष्ट गुण ज्ञात हैं।

आइए, एक-एक करके इन रचनाओं को लें :

4.2.1 एक चतुर्भुज की रचना जब चारों भुजाएँ और एक विकर्ण की लंबाई दी हो

हम इस रचना को एक उदाहरण की सहायता से समझाएँगे।

उदाहरण 1 : एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 4 cm, QR = 6 cm, 6 cm, RS = 5 cm, PS = 5.5 cm और PR = 7 cm हो।

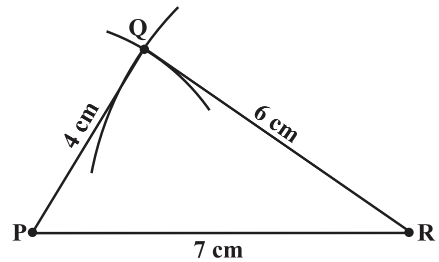


आकृति 4.5

हल : एक कच्ची (rough) आकृति चतुर्भुज को समझने में हमारी सहायता करेगी। हम पहले कच्ची आकृति खींचते हैं और मापों को

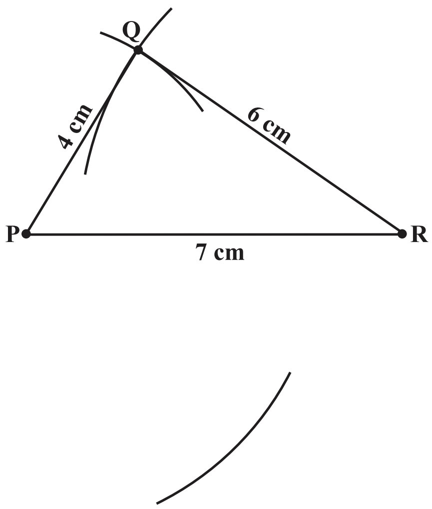
चिह्नित करते हैं (आकृति 4.5)।

चरण 1 कच्ची आकृति से बड़ी आसानी से देखा जा सकता है कि SSS रचना कसौटी से Δ PQR की रचना की जा सकती है। Δ PQR की रचना कीजिए (आकृति 4.6)।



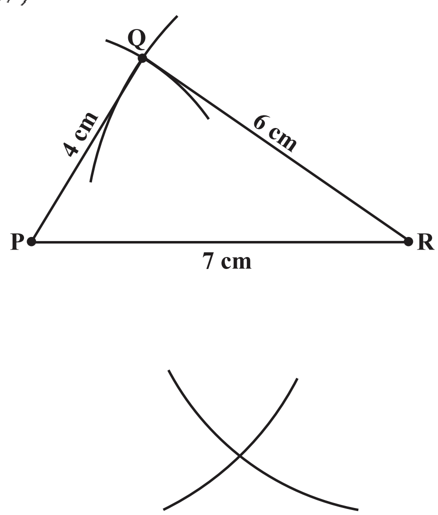
आकृति 4.6

चरण 2 अब हमें चौथे बिंदु 'S' का पता लगाना है। यह बिंदु S, PR के संदर्भ में, बिंदु Q के विपरीत दिशा में होगा। उसके लिए हमारे पास दो माप हैं। बिंदु P से, बिंदु S, 5.5 cm की दूरी पर स्थित है। अत: P को केंद्र मानकर 5.5 cm त्रिज्या की एक चाप खींचिए। (बिंदु S इस चाप पर ही कहीं स्थित होगा।) (आकृति 4.7)



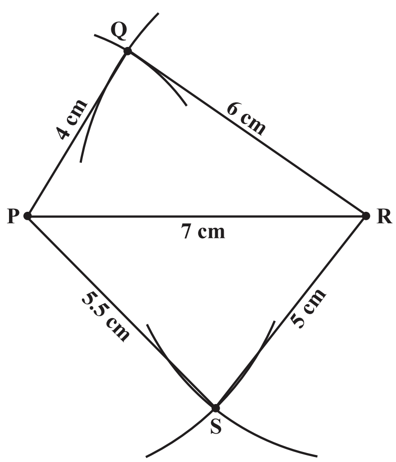
आकृति 4.7

चरण 3 R से बिंदु S, 5 cm दूरी पर है। अत: R को केंद्र मानकर और 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (बिंदु 'S' इस चाप पर कहीं स्थित होगा!) (आकृति 4.8)



आकृति 4.8

चरण 4 बिंदु S को खींचे गए दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अत: यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिंदु है। इस बिंदु को 'S' से अंकित कीजिए और PQRS को पूरा कीजिए, अर्थात्, PS तथा RS को जोड़िए। PQRS अभीष्ट चतुर्भुज है। (आकृति 4.9)



आकृति 4.9

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

(i) हमने देखा कि एक चतुर्भुज की पाँच मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है। क्या आप सोचते हैं कि चतुर्भुज की किन्हीं पाँच मापों से ऐसी रचना की जा सकती है?

(ii) क्या आप एक समांतर चतुर्भुज BATS की रचना कर सकते हैं जिसमें BA = 5 cm, AT = 6 cm, और AS = 6.5 cm हो? क्यों?

(iii) क्या आप एक सम चतुर्भुज (Rhombus) ZEAL की रचना कर सकते हैं जिसमें ZE = 3.5 cm, विकर्ण EL = 5 cm है? क्यों?

(iv) एक विद्यार्थी एक चतुर्भुज PLAY की रचना करने का प्रयास करता है जिसमें PL = 3 cm, LA = 4 cm, AY = 4.5 cm, PY = 2 cm और LY = 6 cm है, परंतु वह इसकी रचना नहीं कर सका। कारण बताइए?
[**संकेत:** एक कच्ची आकृति की सहायता से चर्चा कीजिए]

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित चतुर्भुजों की रचना कीजिए :

(i) चतुर्भुज ABCD जिसमें
AB = 4.5 cm
BC = 5.5 cm
CD = 4 cm
AD = 6 cm
AC = 7 cm है।

(ii) चतुर्भुज JUMP जिसमें
JU = 3.5 cm
UM = 4 cm
MP = 5 cm
PJ = 4.5 cm
PU = 6.5 cm है।

(iii) समांतर चतुर्भुज MORE जिसमें
OR = 6 cm
EO = 7.5 cm
EO = 7.5 cm है।

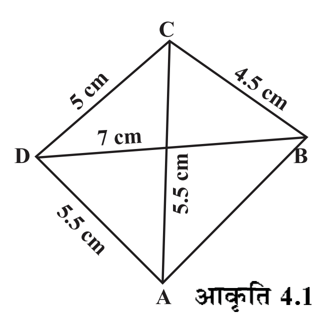
(iv) सम चतुर्भुज BEST जिसमें
BE = 4.5 cm और
ET = 6 cm है।

4.2.2 एक चतुर्भुज की रचना करना जब दो विकर्ण और तीन भुजाओं की लंबाइयाँ दी हों

जब चतुर्भुज की चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हुआ था तो हमने पहले दी हुई मापों से एक त्रिभुज की रचना की और तदुपरांत चतुर्थ बिंदु का पता लगाने का प्रयास किया था। इसी विधि का उपयोग हम यहाँ पर करेंगे।

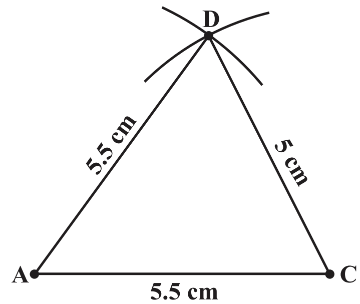
उदाहरण 2 : एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें BC = 4.5 cm, AD = 5.5 cm, CD = 5 cm, विकर्ण AC = 5.5 cm और विकर्ण BD = 7 cm है।

हल : यहाँ पर चतुर्भुज ABCD की कच्ची आकृति दी गई है (आकृति 4.10)। इस कच्ची आकृति का अध्ययन करके हम आसानी से देख सकते हैं कि सबसे पहले Δ ACD की रचना करना संभव है (क्यों?)

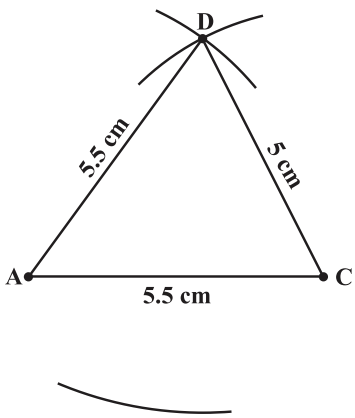


आकृति 4.10

चरण 1 SSS कसौटी का उपयोग करके Δ ACD की रचना कीजिए। (आकृति 4.11) (अब हमें बिंदु B का पता लगाने की आवश्यकता है जो बिंदु C से 4.5 cm तथा बिंदु D से 7 cm दूरी पर स्थित है)।



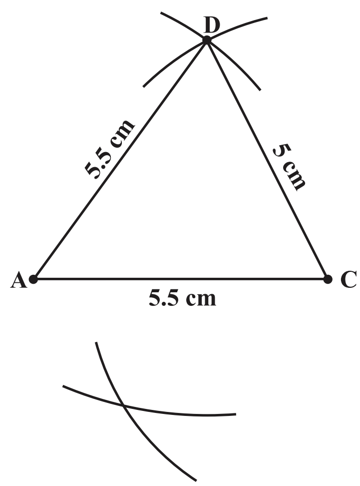
आकृति 4.11



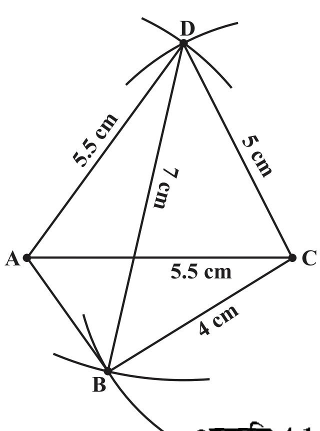
आकृति 4.12

चरण 2 D को केंद्र मानकर, 7 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचिए। (बिंदु B इस चाप पर कहीं स्थित होगा।) (आकृति 4.12)।

चरण 3 C को केंद्र मानकर और 4.5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (बिंदु B इस चाप पर कहीं स्थित होगा) (आकृति 4.13)।



आकृति 4.13



आकृति 4.14

चरण 4 क्योंकि बिंदु B इन दोनों चापों पर स्थित है। अत: बिंदु B इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिंदु है। बिंदु B को अंकित कीजिए और ABCD को पूरा कीजिए। ABCD एक अभीष्ट चतुर्भुज है (आकृति 4.14)।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. उपर्युक्त उदाहरण में क्या हम पहले ΔABD खींचकर उसके बाद चतुर्थ बिंदु C को ज्ञात करके चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं?
2. क्या आप एक चतुर्भुज PQRS की रचना कर सकते हैं जिसमें $PQ = 3$ cm, $RS = 3$ cm, $PS = 7.5$ cm, $PR = 8$ cm, और $SQ = 4$ cm है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित चतुर्भुजों की रचना कीजिए :

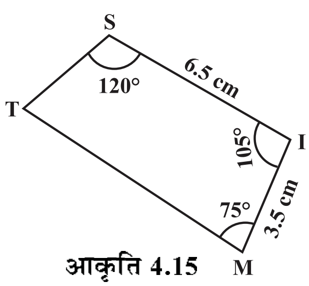
   (i) चतुर्भुज LIFT जिसमें
   $LI = 4$ cm
   $IF = 3$ cm
   $TL = 2.5$ cm
   $LF = 4.5$ cm
   $IT = 4$ cm है।

   (ii) चतुर्भुज GOLD जिसमें
   $OL = 7.5$ cm
   $GL = 6$ cm
   $GD = 6$ cm
   $LD = 5$ cm
   $OD = 10$ cm है।

   (iii) समलंब BEND जिसमें
   $BN = 5.6$ cm
   $DE = 6.5$ cm है।

4.2.3 एक चतुर्भुज की रचना जब दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोणों की माप दी हो

पहले की तरह ही, हम त्रिभुज की रचना से ही प्रारंभ करते हैं तदुपरांत चतुर्भुज को पूर्ण करने के लिए चतुर्थ बिंदु का पता लगाते हैं।

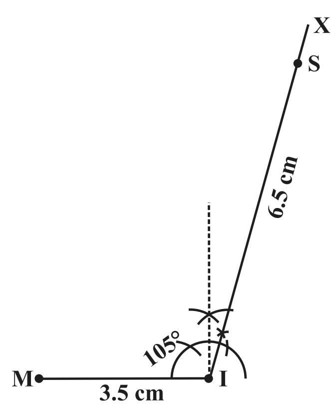


आकृति 4.15

उदाहरण 3 : एक चतुर्भुज MIST की रचना कीजिए, जहाँ $MI = 3.5$ cm, $IS = 6.5$ cm, $\angle M = 75°$ cm, $\angle I = 105°$ cm और $\angle S = 120°$ cm है।

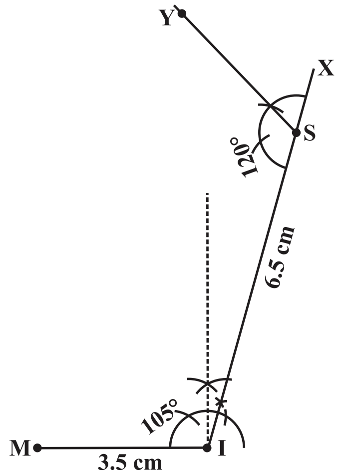
हल : यहाँ पर एक कच्ची आकृति दी गई है जो हमारी रचना के चरणों को निश्चित करने में हमारी सहायता करेगी। हम भिन्न चरणों के लिए केवल संकेत देंगे (आकृति 4.15)।

चरण 1 आप बिंदुओं का कैसे पता लगाएँगे? आप आधार के लिए किसका चयन करते हैं और आपका पहला चरण क्या होगा (आकृति 4.16)।



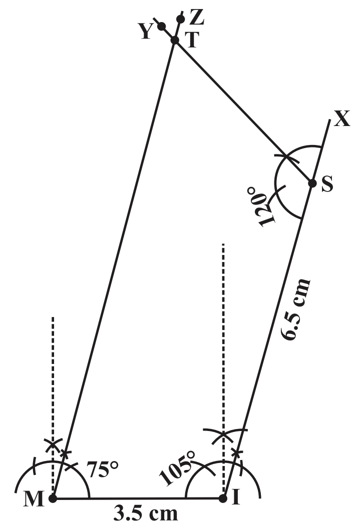
आकृति 4.16

चरण 2 बिंदु S पर $\angle ISY = 120°$ बनाइए (आकृति 4.17)।



आकृति 4.17

चरण 3 बिंदु M पर $\angle IMZ = 75°$ बनाइए।
SY तथा MZ कहाँ पर प्रतिच्छेद करेंगे? उस बिंदु को T से अंकित कीजिए। हमें अभीष्ट चतुर्भुज MIST प्राप्त होता है (आकृति 4.18)।



आकृति 4.18

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. यदि हमें M पर 75° माप के स्थान पर 100° की माप दी हुई हो तो क्या आप ऊपर बताए गए चतुर्भुज MIST की रचना कर सकते हैं?
2. क्या आप एक चतुर्भुज PLAN की रचना कर सकते हैं, यदि PL = 6 cm, LA = 9.5 cm, $\angle P = 75°$ cm, $\angle L = 150°$ cm और $\angle A = 140°$ है?
   (**संकेत** : कोण-योगफल गुण को स्मरण कीजिए।)
3. एक समांतर चतुर्भुज में दो आसन्न भुजाओं की लंबाइयाँ दी हुई हैं। क्या हमें रचना करने के लिए अभी भी कोणों की मापों की आवश्यकता है जैसा कि उपरोक्त उदाहरण में दिया है?

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित चतुर्भुजों की रचना कीजिए :

(i) चतुर्भुज MORE जिसमें
MO = 6 cm
OR = 4.5 cm
$\angle M = 60°$
$\angle O = 105°$
$\angle R = 105°$ है।

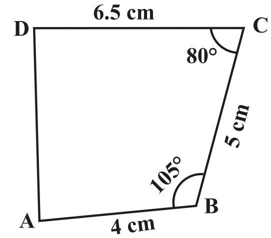
(ii) चतुर्भुज PLAN जिसमें
PL = 4 cm
LA = 6.5 cm
$\angle P = 90°$
$\angle A = 110°$
$\angle N = 85°$ है।

(iii) समांतर चतुर्भुज HEAR जिसमें
HE = 5 cm
EA = 6 cm और $\angle R = 85°$ है।

(iv) आयत OKAY जिसमें
OK = 7 cm
KA = 5 cm है।

4.2.4 एक चतुर्भुज की रचना करना जब तीन भुजाएँ और उनके बीच के दो कोणों की माप दी हो

इस प्रकार के चतुर्भुज के अंतर्गत जब आप एक रफ़ आकृति बनाते हैं तो विशेष रूप से उनके बीच के कोणों को विशेष रूप से ध्यानपूर्वक देखेंगे।

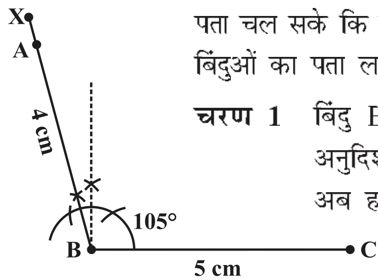


आकृति 4.19

उदाहरण 4 : एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जहाँ AB = 4 cm, BC = 5 cm, CD = 6.5 cm और ∠B = 105° तथा ∠C = 80° है।

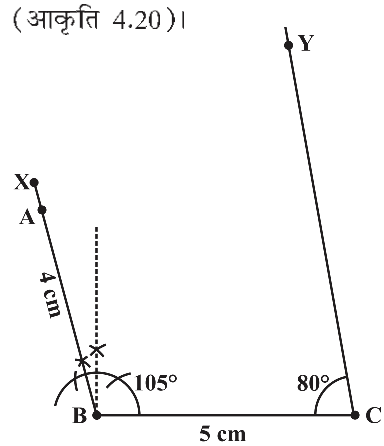
हल : साधारणतया, हम एक कच्ची आकृति खींचते हैं जिससे हमें यह पता चल सके कि रचना को हम कैसे प्रारंभ कर सकते हैं। तब हम चारों बिंदुओं का पता लगाने की योजना बना सकते हैं (आकृति 4.19)।

चरण 1 बिंदु B पर BC = 5 cm लेकर प्रारंभ कीजिए। BX के अनुदिश 105° का कोण बनाइए। इससे 4 cm की दूरी पर बिंदु A को अंकित कीजिए। अब हमें बिंदु B, C और A प्राप्त हो गए हैं (आकृति 4.20)।

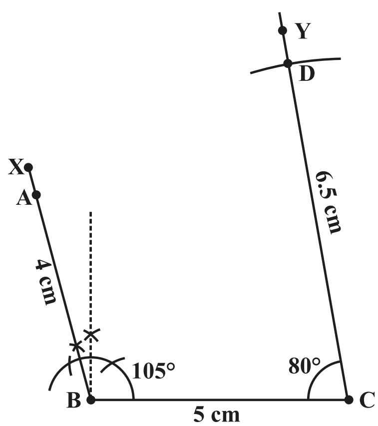


आकृति 4.20

चरण 2 चतुर्थ बिंदु D, CY पर कहीं स्थित है जो भुजा BC के साथ 80° का कोण बनाता है। BC पर स्थित बिंदु C पर ∠BCY = 80° बनाइए (आकृति 4.21)।



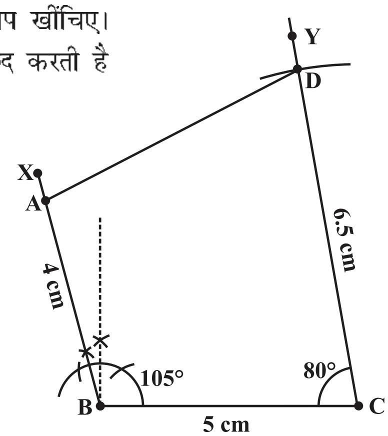
आकृति 4.21



आकृति 4.22

चरण 3 बिंदु D, CY पर 6.5 cm की दूरी पर स्थित है। C को केंद्र मानकर और 6.5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। यह CY को D पर प्रतिच्छेद करती है (आकृति 4.22)।

चरण 4 चतुर्भुज ABCD को पूर्ण कीजिए। ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है (आकृति 4.23)।



आकृति 4.23

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. उपरोक्त उदाहरण में, हमने सर्वप्रथम BC खींची। इसके स्थान पर दूसरे अन्य प्रारंभ बिंदु और कौन से हो सकते हैं?
2. हमने अभी तक चतुर्भुजों की रचना के लिए कोई पाँच मापों का प्रयोग किया। क्या एक चतुर्भुज की रचना करने के लिए पाँच मापों के अलग-अलग समुच्चय (अभी तक देखें गए मापों के अतिरिक्त) हो सकते हैं?

   निम्नलिखित समस्याएँ प्रश्नों के उत्तर देने में आपकी सहायता कर सकती हैं।

   (i) चतुर्भुज ABCD जिसमें AB = 5 cm, BC = 5.5 cm, CD = 4 cm, AD = 6 cm और $\angle B = 80°$ है।

   (ii) चतुर्भुज PQRS जिसमें PQ = 4.5 cm, $\angle P = 70°$, $\angle Q = 100°$, $\angle R = 80°$ और $\angle S = 110°$ है।

   आप स्वयं कुछ और उदाहरणों की रचना कीजिए और एक चतुर्भुज की रचना के लिए आँकड़ों की पर्याप्तता/अपर्याप्तता ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्नलिखित चतुर्भुजों की रचना कीजिए :

(i) चतुर्भुज DEAR जिसमें
DE = 4 cm
EA = 5 cm
AR = 4.5 cm
$\angle E = 60°$
और $\angle A = 90°$ है।

(ii) चतुर्भुज TRUE जिसमें
TR = 3.5 cm
RU = 3 cm
UE = 4 cm
$\angle R = 75°$
और $\angle U = 120°$ है।

4.3 कुछ विशिष्ट स्थितियाँ

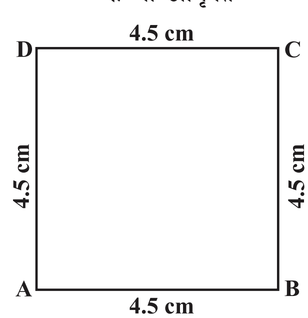
एक चतुर्भुज की रचना के लिए हमने पाँच मापों का प्रयोग किया। क्या किसी ऐसे चतुर्भुज की रचना की जा सकती है जिसकी मापों की संख्या इन मापों की संख्या से कम हो? निम्नलिखित उदाहरण ऐसी ही विशिष्ट स्थितियों को जाँचते हैं।

उदाहरण 5 : 4.5 cm भुजा वाले वर्ग की रचना कीजिए।

हल : सर्वप्रथम ऐसा प्रतीत होता है कि केवल एक ही माप दी हुई है। वास्तव में हमारे पास और बहुत सी जानकारियाँ हैं क्योंकि यह आकृति एक विशेष चतुर्भुज है जिसका नाम वर्ग है। अब हम जानते हैं कि इसका प्रत्येक कोण एक समकोण है। (रफ़ आकृति देखिए) (आकृति 4.24)

यह SAS कसौटी के उपयोग से Δ ABC खींचने में हमें सहायता करता है। तदुपरांत बिंदु D का बड़ी आसानी से पता लगाया जा सकता है। दी हुई मापों से अब आप स्वयं एक वर्ग की रचना कीजिए।

कच्ची आकृति



आकृति 4.24

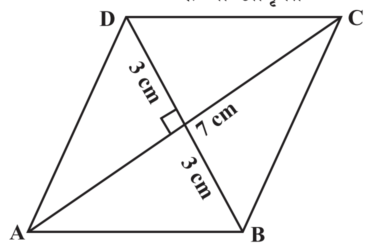
उदाहरण 5 : क्या एक सम चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है जहाँ AC = 6 cm और BD = 7 cm हो? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल : सम चतुर्भुज की केवल दो मापें (विकर्ण) दी हुई हैं। चूँकि यह एक सम चतुर्भुज है, इसके गुणों से हम और सहायता प्राप्त कर सकते हैं।

सम चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के लंब समद्विभाजक होते हैं।

अत: सर्वप्रथम AC = 7 cm खींचिए और तदुपरांत इसके लंब समद्विभाजक की रचना कीजिए। दोनों एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं। खींचे गए समद्विभाजक को बिंदु O से दोनों ओर लंबाई वाली त्रिज्या लेकर काटिए। अब आप बिंदु B तथा बिंदु D प्राप्त करते हैं।

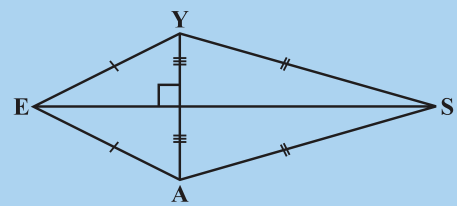
ऊपर बताई गई विधि पर आधारित अब एक सम समचतुर्भुज की रचना कीजिए (आकृति 4.25)।



आकृति 4.25

प्रयास कीजिए

1. आप एक आयत PQRS की रचना कैसे करेंगे यदि आप केवल PQ और QR की लंबाई जानते हैं?
2. एक पतंग EASY की रचना कीजिए यदि AY = 8 cm, EY = 4 cm और SY = 6 cm है (आकृति 4.26)। रचना के दौरान आपने पतंग के कौन से गुणों का प्रयोग किया?



आकृति 4.26

प्रश्नावली 4.5

निम्नलिखित की रचना कीजिए :

1. एक वर्ग READ जिसमें RE = 5.1 cm है।
2. एक सम चतुर्भुज जिनके विकर्णों की लंबाई 5.2 cm और 6.4 cm है।
3. एक आयत जिसकी आसन्न भुजाओं की लंबाइयाँ 5 cm और 4 cm है।
4. एक समांतर चतुर्भुज OKAY जहाँ OK = 5.5 cm और KA = 4.2 cm है। क्या यह अद्वितीय है?

हमने क्या चर्चा की?

1. पाँच मापों से एक अद्वितीय चतुर्भुज प्राप्त हो सकता है।
2. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है यदि उसकी चार भुजाओं की लंबाइयाँ और एक विकर्ण दिया हुआ हो।
3. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है यदि उसके दो विकर्ण और तीन भुजाएँ दी हों।
4. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है यदि उसकी दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोणों की माप ज्ञात हो।
5. एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है यदि उसकी तीन भुजाएँ और दो बीच के कोण दिए हुए हों।

अध्याय 5

आँकड़ों का प्रबंधन

5.1 सूचनाओं की खोज में

आपके दैनिक जीवन में आपके सम्मुख निम्नलिखित प्रकार की सूचनाएँ आई होंगी :

(a) पिछले 10 टेस्ट मैचों में एक बल्लेबाज द्वारा बनाए गए कुल रन।

(b) पिछले 10 एक दिवसीय अंतर्राष्ट्रीय मैचों (ODI) में एक गेंदबाज द्वारा लिए गए कुल विकेट।

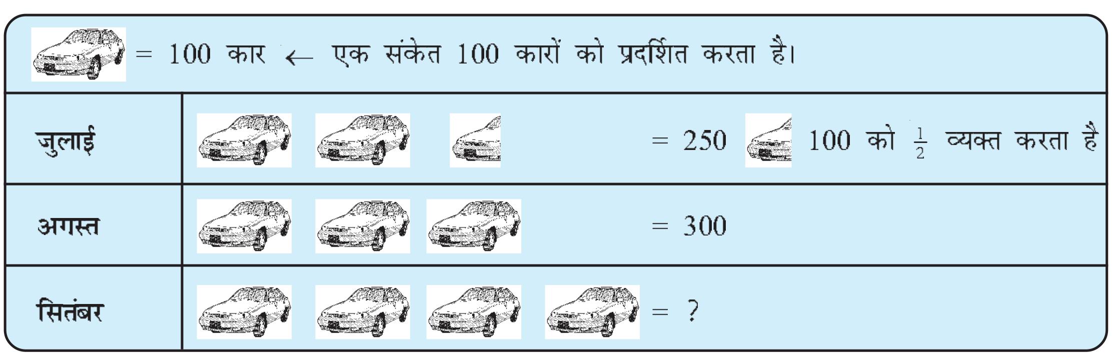
(c) आपकी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित के यूनिट टेस्ट में प्राप्त किए गए अंक।

(d) आपके मित्रों में से प्रत्येक द्वारा पढ़ी गई कहानियों की पुस्तकों की संख्या, इत्यादि।

इन सभी स्थितियों में एकत्रित की गई सूचनाएँ **आँकड़े (data)** कहलाती हैं। आँकड़े प्राय: एक ऐसी स्थिति के संदर्भ में एकत्रित किए जाते हैं जिसका हम अध्ययन करना चाहते हैं। उदाहरणार्थ, एक अध्यापिका की अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई जानने में रुचि हो सकती है। इसे ज्ञात करने के लिए, वह अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ लिखेगी, इन आँकड़ों को एक क्रमबद्ध रूप से संगठित करेगी और तदनुसार उनकी व्याख्या करेगी।

कभी-कभी आँकड़ों को, यह सुस्पष्ट करने के लिए कि वे क्या निरूपित करते हैं, **आलेखीय रूप से (graphically)** निरूपित किया जाता है। क्या आपको उन विभिन्न प्रकारों के आलेखों के बारे में कुछ याद है जो हमने पिछली कक्षाओं में पढ़े थे?

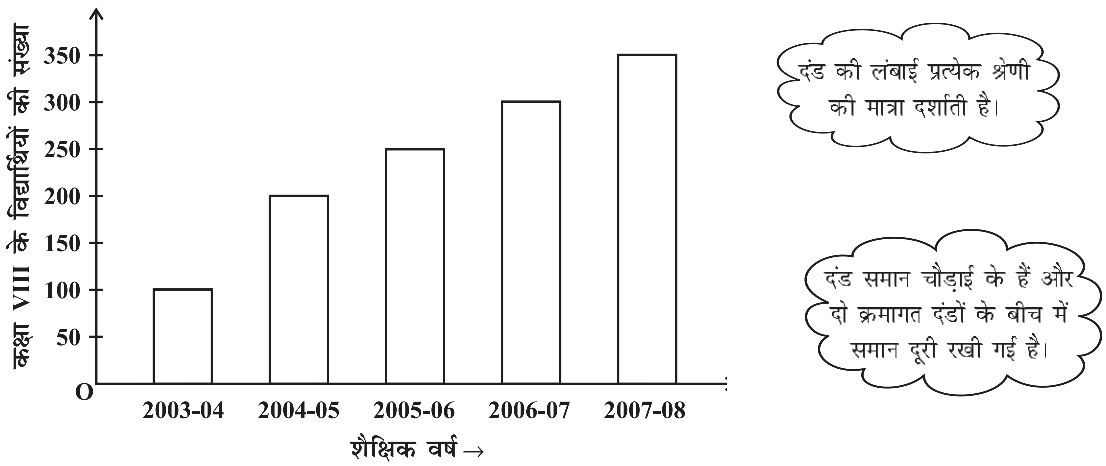
1. एक चित्रालेख (pictograph) : संकेतों का प्रयोग करते हुए, आँकड़ों का चित्रीय निरूपण :



(i) जुलाई के महीने में कितनी कारों का उत्पादन हुआ?

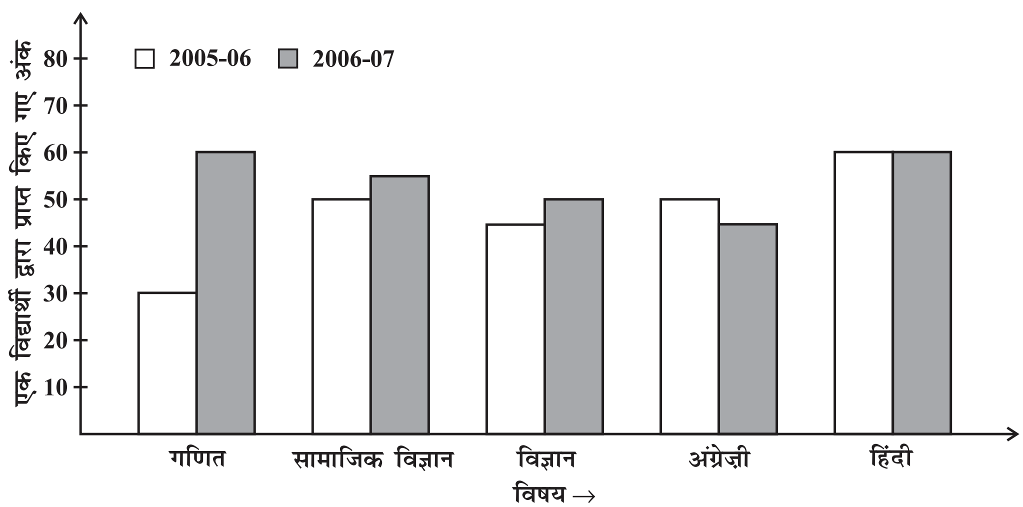
(ii) किस महीने में कारों का अधिकतम उत्पादन हुआ?

2. **एक दंड आलेख** (bar graph): एक समान चौड़ाई के दंडों का प्रयोग करते हुए, सूचना का प्रदर्शन, जिसमें दंडों की लंबाइयाँ (ऊँचाइयाँ) क्रमशः उनके मानों के समानुपातिक होती हैं।



(i) इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?
(ii) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?
(iii) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?
(iv) बताइए कि यह सत्य है या असत्य : "2005-06 में विद्यार्थियों की संख्या 2003-04 की संख्या की दुगुनी है।"

3. **द्वि-दंड आलेख** (double bar graph) : आँकड़ों के दो समूहों को एक साथ दर्शाने वाला दंड आलेख



(i) इस द्वि-दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?
(ii) किस विषय में विद्यार्थी के प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार हुआ है?
(iii) किस विषय में प्रदर्शन में गिरावट आई है?
(iv) किस विषय में प्रदर्शन समान रहा है?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि हम एक दंड आलेख के दंडों में से किसी एक की स्थिति बदल दें, तो क्या प्रदर्शित जानकारी में कोई बदलाव या परिवर्तन होगा? क्यों?

प्रयास कीजिए

दी हुई सूचना को निरूपित करने के लिए एक उपयुक्त आलेख खींचिए।

1.

महीना	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर
बेची गई घड़ियों की संख्या	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

बच्चों की संख्या जिन्हें पसंद है	स्कूल A	स्कूल B	स्कूल C
पैदल चलना	40	55	15
साइकिल चलाना	45	25	35

3. 8 सर्वश्रेष्ठ क्रिकेट टीमों द्वारा ODI में जीतने का प्रतिशत

टीम	चैंपियन ट्राफी से वर्ल्ड कप 2006 तक	2007 में पिछले 10 ODI
दक्षिण अफ्रीका	75%	78%
ऑस्ट्रेलिया	61%	40%
श्रीलंका	54%	38%
न्यूज़ीलैंड	47%	50%
इंग्लैंड	46%	50%
पाकिस्तान	45%	44%
वेस्टइंडीज़	44%	30%
भारत	43%	56%

5.2 आँकड़ों का संगठन (Organising Data)

प्राय: हमें उपलब्ध आँकड़े असंगठित रूप में प्राप्त होते हैं, जिन्हें **यथाप्राप्त आँकड़े (raw data)** कहा जाता है। अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए, हमें आँकड़ों को एक क्रमबद्ध रूप में संगठित करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, विद्यार्थियों के एक समूह से उनके मनपसंद विषयों के बारे में पूछा गया। इसके परिणामों की सूची नीचे दी गई है :

कला, गणित, विज्ञान, अंग्रेज़ी, गणित, कला, अंग्रेज़ी, गणित अंग्रेज़ी, कला, विज्ञान, कला, विज्ञान, विज्ञान, गणित, कला, अंग्रेज़ी, कला, विज्ञान, गणित, विज्ञान, कला।

कौन-सा विषय सबसे अधिक पसंद किया गया और कौन-सा विषय सबसे कम पसंद किया गया?

आकस्मिक रूप से लिखी गई रुचियों या पसंदों को देखकर इस प्रश्न का उत्तर देना सरल नहीं है। हम मिलान चिह्नों (tally marks) का प्रयोग करते हुए, इन आँकड़ों को सारणी 5.1 के रूप में व्यवस्थित करते हैं :

सारणी 5.1

विषय	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
कला	𝍸 ||	7
गणित	𝍸	5
विज्ञान	𝍸 |	6
अंग्रेज़ी	||||	4

प्रत्येक विषय के सम्मुख लिखी मिलान चिह्नों की संख्या से हम विशिष्ट विषय को पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या प्राप्त करते हैं।

यह संख्या उस विषय की **बारंबारता** (frequency) कहलाती है।

किसी प्रविष्टि की बारंबारता वह संख्या है जितनी बार वह प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

सारणी 5.1 से, अंग्रेज़ी को पसंद करने वाले विद्यार्थियों की बारंबारता 4 है।

गणित को पसंद करने वाले विद्यार्थियों की बारंबारता 5 है।

उपरोक्त रूप से बनाई गई सारणी एक **बारंबारता बंटन सारणी (frequency distribution table)** कहलाती है, क्योंकि इससे पता चलता है कि एक प्रविष्टि कितनी बार आई है।

प्रयास कीजिए

1. विद्यार्थियों के एक समूह से यह बताने को कहा गया कि वे किस पशु को सबसे अधिक घर में पालना पसंद करेंगे। इसके परिणाम नीचे दिए गए हैं :

   कुत्ता, बिल्ली, बिल्ली, मछली, बिल्ली, खरगोश, कुत्ता, बिल्ली, खरगोश, कुत्ता, बिल्ली, कुत्ता, कुत्ता, कुत्ता, बिल्ली, गाय, मछली, खरगोश, कुत्ता, बिल्ली, कुत्ता, बिल्ली, बिल्ली, कुत्ता, खरगोश, बिल्ली, मछली, कुत्ता। उपरोक्त के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

5.3 आँकड़ों का वर्गीकरण

विषयों की पसंद से संबंधित आँकड़े प्रत्येक प्रविष्टि के अनेक बार आने को दर्शाते हैं। उदाहरणार्थ, कला को 7 विद्यार्थी पसंद करते हैं, गणित को 5 विद्यार्थी पसंद करते हैं इत्यादि (सारणी 5.1)। इस सूचना को आलेखीय रूप से एक चित्रालेख या एक दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। परंतु कभी-कभी हमें बड़े आँकड़ों के साथ कार्य करना पड़ता है। उदाहरणार्थ, कक्षा VIII के 60 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए (50 में से) निम्नलिखित अंकों पर विचार कीजिए :

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

यदि हम प्रत्येक प्रेक्षण के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाएँ, तो वह बहुत लंबी होगी। अतः, हम सुविधा के लिए प्रेक्षणों के कुछ समूह या वर्ग बनाते हैं, जैसे 0–10, 10–20 इत्यादि तथा प्रत्येक समूह या वर्ग में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या के आधार पर एक बारंबारता बंटन (frequency distribution) प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, उपरोक्त आँकड़ों के लिए, बारंबारता बंटन सारणी निम्नलिखित हो सकती है :

सारणी 5.2

समूह	मिलान चिह्न	बारंबारता
0-10	||	2
10-20	卌 卌	10
20-30	卌 卌 卌 卌 |	21
30-40	卌 卌 卌 ||||	19
40-50	卌 ||	7
50-60	|	1
	योग	**60**

उपरोक्त प्रकार से प्रस्तुत आँकड़े **वर्गीकृत आँकड़े (grouped data)** कहलाते हैं तथा प्राप्त बंटन **वर्गीकृत बारंबारता बंटन** कहलाता है। इससे अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है, जैसे :

(1) अधिकांश विद्यार्थियों ने 20 और 40 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।

(2) 8 विद्यार्थियों ने 50 में से 40 से अधिक अंक प्राप्त किए हैं।

समूहों 0–10, 10–20, 20–30 इत्यादि में से प्रत्येक एक **वर्ग अंतराल (class interval)** [या संक्षेप में **एक वर्ग (class)**] कहलाता है।

ध्यान दीजिए कि प्रेक्षण 10 दोनों ही वर्गों 0–10 और 10–20 में सम्मिलित है। इसी प्रकार, 20 वर्गों 10–20 और 20–30 दोनों में ही सम्मिलित है। परंतु एक प्रेक्षण (10 या 20) दो वर्गों में एक साथ सम्मिलित नहीं हो सकता। इससे बचने के लिए, हम यह परिपाटी अपनाते हैं कि उभयनिष्ठ प्रेक्षण उच्चतर वर्ग में सम्मिलित होगा। अर्थात् प्रेक्षण 10 वर्ग अंतराल 10–20 में सम्मिलित है (0–10 में नहीं)। इसी प्रकार, 20 वर्ग अंतराल 20–30 में सम्मिलित है (10–20 में नहीं)। वर्ग अंतराल 10–20 में, 10 **निम्न वर्ग सीमा (lower class limit)** कहलाती है तथा 20 **उपरि** या **उच्च वर्ग सीमा (upper class limit)** कहलाती है। इसी प्रकार, वर्ग अंतराल 20–30 में, 20 निम्न वर्ग सीमा है तथा 30 उच्च वर्ग सीमा है। ध्यान दीजिए कि वर्ग अंतरालों 0–10, 10–20, 20–30 इत्यादि में से प्रत्येक की उच्च वर्ग सीमा और निम्न वर्ग सीमा का अंतर बराबर है (इस स्थिति में 10)। उपरि (या उच्च) वर्ग सीमा और निम्न वर्ग सीमा का यह अंतर वर्ग अंतराल की **चौड़ाई** (width) या **माप** (size) कहलाती है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी का अध्ययन कीजिए और उसके नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

सारणी 5.3

वर्ग अंतराल (रुपयों में दैनिक आय)	बारंबारता (श्रमिकों की संख्या)
100-125	45
125-150	25
150-175	55
175-200	125
200-225	140
225-250	55
250-275	35
275-300	50
300-325	20
योग	**550**

(i) वर्ग अंतरालों की माप क्या है?

(ii) किस वर्ग की सबसे अधिक बारंबारता है?

(iii) किस वर्ग की सबसे कम बारंबारता है?

(iv) वर्ग अंतराल 250-275 की उच्च सीमा क्या है?

(v) किन दो वर्गों की बारंबारता एक ही है?

2. अंतरालों 30-35, 35-40 इत्यादि का प्रयोग करते हुए, एक कक्षा के 20 विद्यार्थियों के भारों (kg में) के निम्नलिखित आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए :

40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39

5.3.1 एक विभिन्नता के साथ दंड

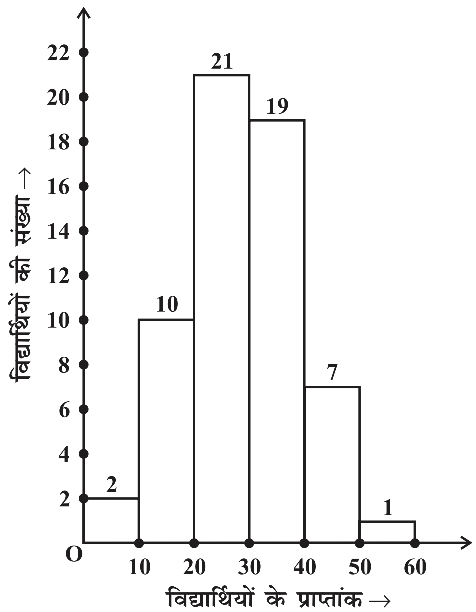
आइए, 60 विद्यार्थियों द्वारा गणित टेस्ट में प्राप्त किए गए अंकों के वर्गीकृत बारंबारता बंटन पर पुन: विचार करें (सारणी 5.4)।

सारणी 5.4

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0-10	2
10-20	10
20-30	21
30-40	19
40-50	7
50-60	1
योग	**60**

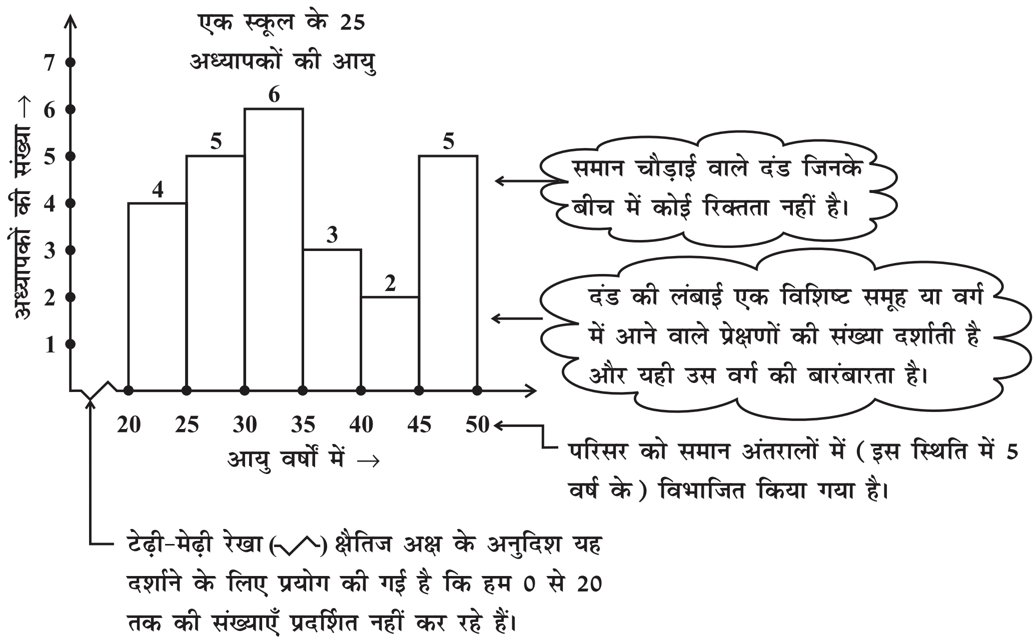
उपरोक्त को संलग्न आलेख के रूप में निरूपित करके प्रदर्शित किया जाता है (आकृति 5.1)।

क्या यह आलेख उन दंड आलेखों से किसी रूप में भिन्न है जो आपने कक्षा VII में खींचे थे? ध्यान दीजिए कि यहाँ हमने क्षैतिज अक्ष पर प्रेक्षणों के समूहों (अर्थात् वर्ग अंतरालों) को निरूपित किया है। दंड की **लंबाई** वर्ग अंतराल की **बारंबारता** दर्शाती है। साथ ही, यहाँ दंडों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है, क्योंकि वर्ग अंतरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।



आकृति 5.1

आँकड़ों का इस प्रकार का आलेखीय निरूपण एक **आयतचित्र** (histogram) कहलाता है। निम्नलिखित आलेख एक अन्य आयतचित्र है (आकृति 5.2) :



आकृति 5.2

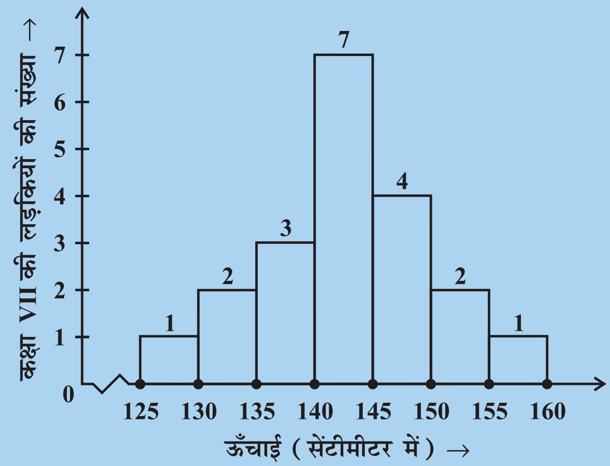
इस आयतचित्र के दंडों से हम निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं :

(i) कितने अध्यापकों की आयु 45 वर्ष या उससे अधिक है परंतु 50 वर्ष से कम है?

(ii) 35 वर्ष से कम आयु वाले अध्यापकों की संख्या कितनी है?

प्रयास कीजिए

1. आयतचित्र (आकृति 5.3) को देखिए और उसके नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:



आकृति 5.3

(i) इस आयतचित्र द्वारा क्या सूचना दी जा रही है?

(ii) किस वर्ग में अधिकतम लड़कियाँ हैं?

(iii) कितनी लड़कियों की लंबाई 145 cm या उससे अधिक है?

(iv) यदि हम लड़कियों को निम्नलिखित तीन श्रेणियों में विभाजित करें, तो प्रत्येक में कितनी लड़कियाँ होंगी?

150 cm या उससे अधिक — समूह A

140 cm या उससे अधिक परंतु 150 cm से कम — समूह B

140 cm से कम — समूह C

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित में से किन आँकड़ों को दर्शाने के लिए आप एक आयतचित्र का प्रयोग करेंगे?

(a) एक डाकिए के थैले में विभिन्न क्षेत्रों के पत्रों की संख्या।

(b) किसी खेलकूद प्रतियोगिता में प्रत्याशियों की ऊँचाइयाँ।

(c) 5 कंपनियों द्वारा निर्मित कैसेटों की संख्या।

(d) किसी स्टेशन पर प्रात: 7 बजे से सायं 7 बजे तक रेलगाड़ियों से जाने वाले यात्रियों की संख्या।

प्रत्येक के लिए, कारण भी दीजिए।

2. किसी विभागीय स्टोर पर खरीदारी करने आए व्यक्तियों को इस प्रकार अंकित किया जाता है : पुरुष (M), महिला (W), लड़का (B) या लड़की (G)। निम्नलिखित सूची उन खरीदारों

को दर्शाती है, जो प्रातःकाल पहले घंटे में आए हैं :

W W W G B W W M G G M M W W W W G B M W B G G M W W M M W W
W M W B W G M W W W W G W M M W W M W G W M G W M M B G G W

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए। इसे प्रदर्शित करने के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

3. किसी फैक्ट्री के 30 श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी (रुपयों में) निम्नलिखित है :

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, अंतरालों 800–810, 810–820 इत्यादि वाली एक बारंबारता सारणी बनाइए।

4. प्रश्न 3 में दिए आँकड़ों से प्राप्त सारणी के लिए एक आयतचित्र बनाइए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस समूह में श्रमिकों की संख्या सबसे अधिक है?

(ii) कितने श्रमिक 850 रुपये या उससे अधिक अर्जित करते हैं?

(iii) कितने श्रमिक 850 रुपये से कम अर्जित करते हैं?

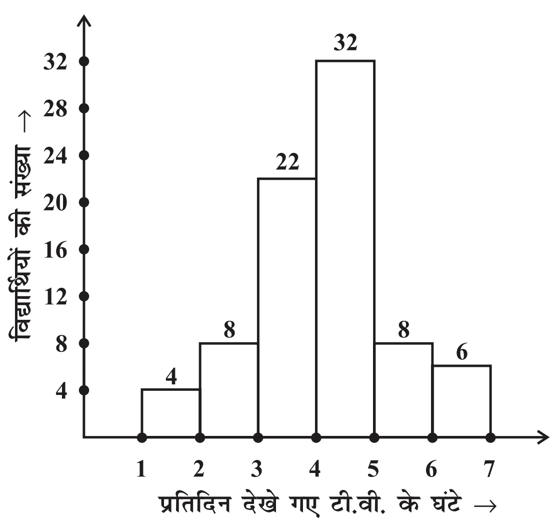
5. अवकाश के दिनों में एक विशिष्ट कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा प्रतिदिन टेलीविज़न (टी.वी.) देखने के समय (घंटों में), दिए हुए आलेख में दर्शाए गए हैं :

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) अधिकतम विद्यार्थियों ने कितने घंटों तक टी.वी. देखा?

(ii) 4 घंटों से कम समय तक कितने विद्यार्थियों ने टी.वी. देखा?

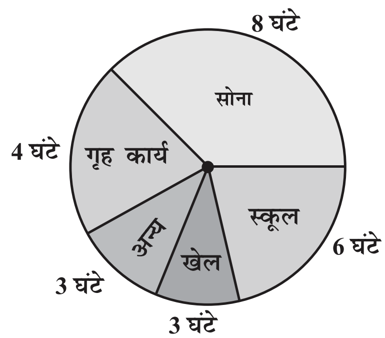
(iii) कितने विद्यार्थियों ने टी.वी. देखने में 5 घंटे से अधिक का समय व्यतीत किया?



5.4 वृत्त आलेख या पाई चार्ट

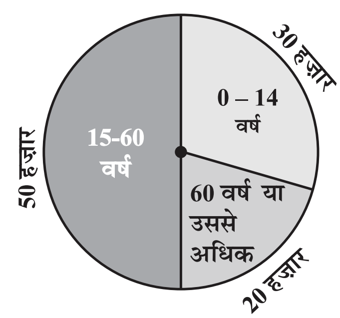
क्या आपके सम्मुख कभी वृत्तीय रूप में निरूपित आँकड़े प्रस्तुत हुए हैं, जैसे आकृति 5.4 में दर्शाए गए हैं?

एक दिन में एक बच्चे द्वारा व्यतीत किया गया समय



(i)

एक कस्बे में व्यक्तियों के आयु समूह



(ii)

आकृति 5.4

ये निरूपण **वृत्त आलेख (circle graphs)** कहलाते हैं। एक वृत्त आलेख एक संपूर्ण (whole) और उसके भागों में संबंध दर्शाता है। यहाँ संपूर्ण वृत्त को त्रिज्यखंडों (sectors) में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक त्रिज्यखंड का साइज़ या आमाप उसके द्वारा निरूपित क्रियाकलाप या सूचना के समानुपाती होता है।

उदाहरणार्थ, उपरोक्त आलेख में, सोने की क्रिया में व्यतीत किए गए घंटों में त्रिज्यखंड का आनुपातिक भाग

$$= \frac{\text{सोने के घंटों की संख्या}}{\text{संपूर्ण दिन}} = \frac{8 \text{ घंटे}}{24 \text{ घंटे}} = \frac{1}{3}$$

इसीलिए, इस त्रिज्यखंड को पूरे वृत्त के $\frac{1}{3}$वें भाग के रूप में खींचा गया है। इसी प्रकार, स्कूल में व्यतीत किए गए घंटों के त्रिज्यखंड का आनुपातिक भाग

$$= \frac{\text{स्कूल के घंटों की संख्या}}{\text{संपूर्ण दिन}} = \frac{6 \text{ घंटे}}{24 \text{ घंटे}} = \frac{1}{4}$$

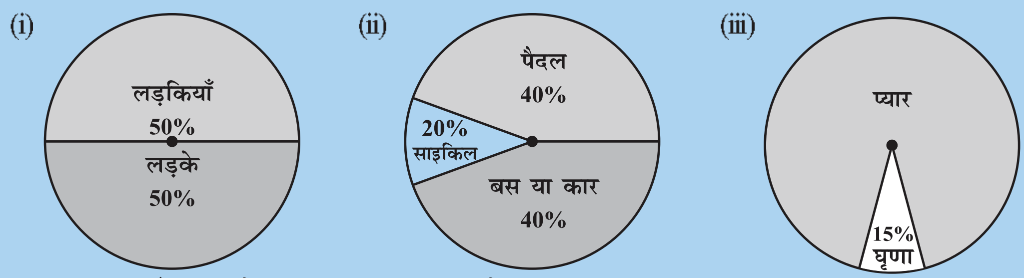
इसीलिए, इस त्रिज्यखंड को वृत्त के $\frac{1}{4}$ भाग के रूप में खींचा गया है। इसी प्रकार, अन्य त्रिज्यखंडों के माप ज्ञात किए जा सकते हैं।

सभी क्रियाकलापों की भिन्नों को जोड़िए। क्या आपको योग **एक** प्राप्त होता है?

वृत्त आलेख **पाई चार्ट (pie chart)** भी कहलाता है।

प्रयास कीजिए

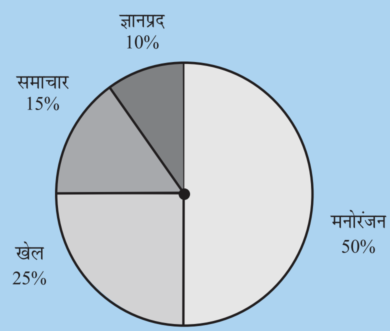
1. निम्नलिखित पाई चार्टों में से प्रत्येक (आकृति 5.5) आपकी कक्षा के बारे में एक भिन्न प्रकार की सूचना देता है। इनमें से प्रत्येक सूचना को निरूपित करने वाला वृत्त का भाग ज्ञात कीजिए।



लड़कियाँ या लड़के | स्कूल के लिए परिवहन | गणित से प्यार/घृणा

आकृति 5.5

2. दिए हुए पाई चार्ट (आकृति 5.6) के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
   (i) किस प्रकार के कार्यक्रम सबसे अधिक देखे जाते हैं?
   (ii) किन दो प्रकार के कार्यक्रमों को देखने वालों की कुल संख्या खेलों के कार्यक्रमों को देखने वालों की संख्या के बराबर है?



टी. वी. पर विभिन्न प्रकार के चैनलों को देखने वालों की संख्या

आकृति 5.6

5.4.1 पाई चार्टों का खींचना

किसी स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए जाने वाली आइसक्रीमों की महक या स्वाद (प्रतिशतों में) नीचे दिए गए हैं :

महक	महकों को पसंद करने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत
चॉकलेट	50%
वनीला	25%
अन्य प्रकार	25%

आइए, इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में निरूपित करें।

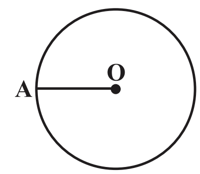
वृत्त के केंद्र पर पूरा कोण 360° है। त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोण (central angles) 360° के भाग

या कोई भिन्न होंगे। हम त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोणों को ज्ञात करने के लिए एक सारणी बनाएँगे (सारणी 5.5)।

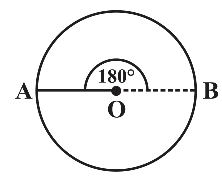
सारणी 5.5

महक	महकों को पसंद करने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत	संपूर्ण का भाग	360° भाग
चॉकलेट	50%	$\frac{50}{100} - \frac{1}{2}$	360° का $\frac{1}{2} = 180°$
वैनीला	25%	$\frac{25}{100} - \frac{1}{4}$	360° का $\frac{1}{4} = 90°$
अन्य प्रकार	25%	$\frac{25}{100} - \frac{1}{4}$	360° का $\frac{1}{4} = 90°$

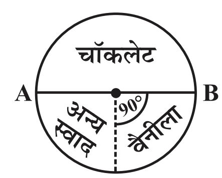
1. किसी सुविधाजनक त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसका केंद्र (O) और एक त्रिज्या (OA) अंकित कीजिए।



2. चॉकलेट के त्रिज्यखंड का कोण 180° है। चाँदे का प्रयोग करके, $\angle AOB = 180°$ खींचिए।



3. बचे हुए त्रिज्यखंडों को भी इसी प्रकार अंकित करते रहिए।

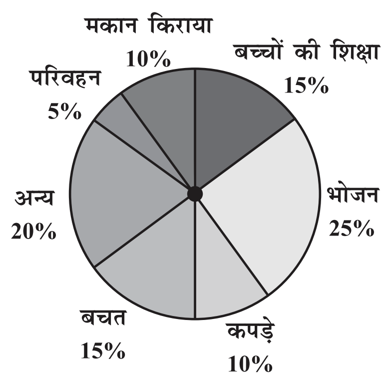


उदाहरण 1 : संलग्न पाई चार्ट (आकृति 5.7) एक महीने में एक परिवार के विभिन्न मदों में व्यय और उसकी बचत (प्रतिशतों में) को दर्शाता है।

(i) किस मद में व्यय सबसे अधिक था?

(ii) किस मद पर हुआ व्यय परिवार की कुल बचत के बराबर है?

(iii) यदि परिवार की मासिक बचत 3000 रुपये है, तो कपड़ों पर हुआ मासिक व्यय क्या है?



आकृति 5.7

हल :

(i) भोजन पर व्यय सबसे अधिक है।

(ii) बच्चों की शिक्षा पर हुआ व्यय (15%) परिवार की कुल बचत के बराबर है।

(iii) 15% निरूपित करता है, 3000 रु।

अत:, 10% निरूपित करता है, $\frac{3000}{15} \times 10$ रु $= 2000$ रु।

उदाहरण 2 : एक विशेष दिन किसी बेकरी की दुकान में हुई विभिन्न वस्तुओं की बिक्री (रुपयों में) नीचे दी गई है:

सामान्य ब्रेड	:	320
फ्रूट ब्रेड	:	80
केक और पेस्ट्री	:	160
बिस्कुट	:	120
अन्य	:	40
कुल	:	**720**

इन आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए।

हल : हम प्रत्येक त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण ज्ञात करते हैं। यहाँ कुल बिक्री 720 रुपये है। इससे हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है:

वस्तु	बिक्री (रुपयों में)	संपूर्ण का भाग	केंद्रीय कोण
सामान्य ब्रेड	320	$\frac{320}{720} - \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360 -- 160-$
बिस्कुट	120	$\frac{120}{720} - \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360 -- 60-$
केक और पेस्ट्री	160	$\frac{160}{720} - \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360 -- 80-$
फ्रूट ब्रेड	80	$\frac{80}{720} - \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360 -- 40-$
अन्य	40	$\frac{40}{720} - \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360 -- 20-$

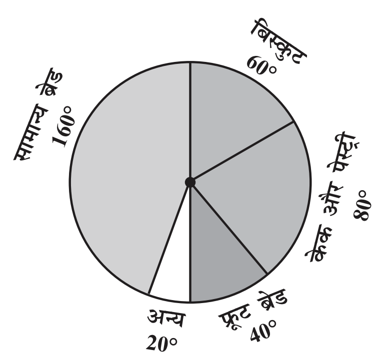
उपरोक्त का प्रयोग करके, अब हम पाई चार्ट बनाते हैं (आकृति 5.8)।

प्रयास कीजिए

नीचे दिए आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए :

एक बच्चे द्वारा एक दिन में व्यतीत किया गया समय इस प्रकार है:

सोना	—	8 घंटे
स्कूल	—	6 घंटे
गृह कार्य	—	4 घंटे
खेल	—	4 घंटे
अन्य	—	2 घंटे



आकृति 5.8

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

निम्नलिखित आँकड़ों को दर्शाने के लिए, किस प्रकार का आलेख उपयुक्त रहेगा?

1. **किसी राज्य के खाद्यान्न का उत्पादन :**

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादन (लाख टनों में)	60	50	70	55	80	85

2. **व्यक्तियों के एक समूह के भोजन की पसंद :**

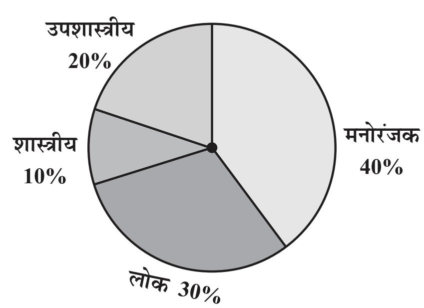
मनपसंद भोजन	**व्यक्तियों की संख्या**
उत्तर भारतीय	30
दक्षिण भारतीय	40
चाइनीज़	25
अन्य	25
योग	**120**

3. **किसी फैक्ट्री के श्रमिकों के एक समूह की दैनिक आय :**

दैनिक आय (रुपयों में)	**श्रमिकों की संख्या (एक फैक्ट्री में)**
75-100	45
100-125	35
125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
योग	**480**

प्रश्नावली 5.2

1. किसी शहर के युवा व्यक्तियों के एक समूह का यह जानने के लिए एक सर्वे किया गया कि वे किस प्रकार का संगीत पसंद करते हैं। इनसे प्राप्त आँकड़ों को संलग्न पाई चार्ट में दर्शाया गया है। इस पाई चार्ट से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :



(i) यदि 20 व्यक्ति शास्त्रीय संगीत पसंद करते हैं, तो कुल कितने युवा व्यक्तियों का सर्वे किया गया था?

(ii) किस प्रकार का संगीत सबसे अधिक व्यक्तियों द्वारा पसंद किया जाता है?

(iii) यदि कोई कैसेट कंपनी 1000 सी.डी. (C.D.) बनाए, तो वह प्रत्येक प्रकार की कितनी सी.डी. बनाएगी?

ऋतु	मतों की संख्या
ग्रीष्म	90
वर्षा	120
शीत	150

2. 360 व्यक्तियों के एक समूह से तीन ऋतुओं – वर्षा, सर्दी और गर्मी में से अपनी मनपसंद ऋतु के लिए मतदान करने को कहा गया। इनसे प्राप्त आँकड़ों को संलग्न चित्र में दर्शाया गया है :

(i) किस ऋतु को सबसे अधिक मत मिले?

(ii) प्रत्येक त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण ज्ञात कीजिए।

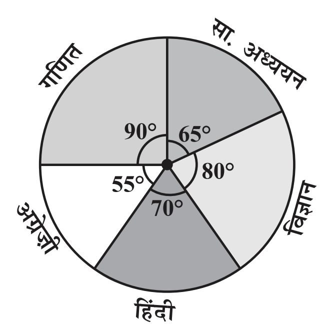
(iii) इस सूचना को दर्शाने के लिए, एक पाई चार्ट खींचिए।

3. निम्नलिखित सूचना को दर्शाने वाला एक पाई चार्ट खींचिए। यह सारणी व्यक्तियों के एक समूह द्वारा पसंद किए जाने वाले रंगों को दर्शाती है।

रंग	व्यक्तियों की संख्या
नीला	18
हरा	9
लाल	6
पीला	3
योग	**36**

प्रत्येक त्रिज्यखंड का आनुपातिक भाग ज्ञात कीजिए।
उदाहरणार्थ, नीला $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ है; हरा $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; इत्यादि।
इसे प्रयोग करते हुए, संगत कोण ज्ञात कीजिए।

4. संलग्न पाई चार्ट एक विद्यार्थी द्वारा किसी परीक्षा में हिंदी, अंग्रेज़ी, गणित, सामाजिक विज्ञान और विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों को दर्शाता है। यदि उस विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए कुल अंक 540 थे, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :



(i) किस विषय में उस विद्यार्थी ने 105 अंक प्राप्त किए?

(**संकेत** : 540 अंकों के लिए केंद्रीय कोण 360° है। अतः, 105 अंकों के लिए केंद्रीय कोण क्या होगा?)

(ii) उस विद्यार्थी ने गणित में हिंदी से कितने अधिक अंक प्राप्त किए?

(iii) जाँच कीजिए कि क्या सामाजिक विज्ञान और गणित में प्राप्त किए गए अंकों का योग विज्ञान और हिंदी में प्राप्त किए गए अंकों के योग से अधिक है। (**संकेत** : केवल केंद्रीय कोणों पर ध्यान दीजिए।)

5. किसी छात्रावास में, विभिन्न भाषाएँ बोलने वाले विद्यार्थियों की संख्या नीचे दी गई है। इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

भाषा	हिंदी	अंग्रेज़ी	मराठी	तमिल	बंगाली	योग
विद्यार्थियों की संख्या	40	12	9	7	4	72

5.5 संयोग और प्रायिकता

कभी-कभी ऐसा होता है कि वर्षा ऋतु में, हम प्रत्येक दिन बरसाती लेकर बाहर निकलते हैं और कई दिनों तक कोई वर्षा नहीं होती है। परंतु संयोग से एक दिन आप बरसाती ले जाना भूल जाते हैं और उसी दिन भारी वर्षा हो जाती है।

कभी-कभी ऐसा हो जाता है कि एक विद्यार्थी एक टेस्ट के लिए 5 में से 4 अध्याय अच्छी प्रकार से तैयार कर लेता है। परंतु एक बड़ा प्रश्न उस अध्याय में से पूछ लिया जाता है जिसे उसने अच्छी प्रकार से तैयार नहीं किया था।

प्रत्येक व्यक्ति जानता है कि एक विशेष रेलगाड़ी सही समय से चलती है, परंतु जिस दिन आप सही समय पर पहुँचते हैं, उसी दिन वह देरी से आती है।

आपको उपरोक्त प्रकार की अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है, जहाँ आप संयोग (chance) का सहारा लेकर कार्य करना चाहते हैं, परंतु वह उस प्रकार से नहीं होता जैसा आप चाहते हैं। क्या आप ऐसे कुछ और उदाहरण दे सकते हैं? ये ऐसे उदाहरण हैं जहाँ किसी बात के होने या न होने के संयोग बराबर (समान) नहीं हैं।

एक रेलगाड़ी के समय पर आने या न आने के संयोग बराबर नहीं हैं। जब आप कोई टिकट खरीदते हैं और यदि वह प्रतीक्षा सूची में है, तो आप निश्चय ही संयोग का सहारा लेते हैं। आप यह आशा करते हैं कि जब आप यात्रा करेंगे तब संभवत: इस टिकट पर आपकी सीट आरक्षित हो जाएगी। परंतु यहाँ हम कुछ ऐसे प्रयोगों (experiments) पर विचार करेंगे जिनमें परिणामों के घटित होने के संयोग बराबर हैं।

5.5.1 कोई परिणाम प्राप्त करना

आपने संभवत: यह देखा होगा कि एक क्रिकेट मैच के प्रारंभ होने से पहले, दोनों टीमों के कप्तान बाहर जाकर यह निर्णय करने के लिए सिक्का (coin) उछालते (toss) हैं कि कौन-सी टीम पहले बल्लेबाजी करेगी।

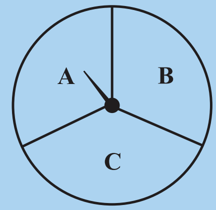
जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो आपको क्या संभव परिणाम प्राप्त होते हैं? नि:संदेह, चित (Head) या पट (Tail)।

कल्पना कीजिए कि आप एक टीम के कप्तान हैं और आपका मित्र दूसरी टीम का कप्तान है। आप एक सिक्का उछालते हैं और अपने मित्र से चित या पट बोलने को कहते हैं। क्या आप इस उछाल के परिणाम पर कोई नियंत्रण रख सकते हैं? क्या आपको चित प्राप्त हो सकता है, यदि आप ऐसा चाहते हैं? अथवा क्या आपको पट प्राप्त हो सकता है, यदि आप ऐसा चाहते हैं? नहीं, ऐसा संभव नहीं है। इस प्रकार का प्रयोग एक **यादृच्छ** या **यादृच्छिक प्रयोग (random experiment)** कहलाता है। चित और पट इस प्रयोग के दो **परिणाम (outcomes)** हैं।

प्रयास कीजिए

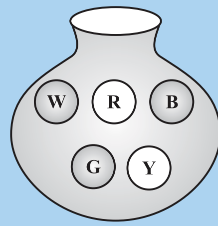
1. यदि आप एक स्कूटर चलाना प्रारंभ करें, तो संभव परिणाम क्या हैं?
2. जब एक पासे (die) को फेंका जाता है, तो संभव छह परिणाम क्या हैं?

3. जब आप पहिए को घुमाएँगे, तो संभावित परिणाम क्या होंगे (आकृति 5.9)? इनकी सूची बनाइए।
(यहाँ परिणाम का अर्थ है कि वह त्रिज्यखंड जहाँ पर सूचक (pointer) घुमाने पर रुकेगा।)



आकृति 5.9

4. आपके पास एक थैला है और उसमें भिन्न-भिन्न रंगों की पाँच एक जैसी गेंदें हैं (आकृति 5.10)। आप बिना देखे इसमें से एक गेंद निकालते हैं। प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए।



आकृति 5.10

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक पासे को फेंकने पर :

- क्या पहले खिलाड़ी के 6 प्राप्त करने का संयोग अधिक है?
- क्या उसके बाद खेलने वाले खिलाड़ी के 6 प्राप्त करने का संयोग कम है?
- मान लीजिए कि दूसरा खिलाड़ी 6 प्राप्त कर लेता है। क्या इसका अर्थ यह है कि तीसरे खिलाड़ी द्वारा 6 प्राप्त करने का कोई संयोग नहीं है?

5.5.2 सम संभावित परिणाम

एक सिक्के को अनेक बार उछाला जाता है तथा जितनी बार चित या पट आते हैं उन्हें लिख लिया जाता है। आइए अपनी परिणाम शीट (तालिका) को देखें, जहाँ हम उछालों की संख्या में वृद्धि करते जा रहे हैं :

उछालों की संख्या	मिलान चिह्न (H)	चितों की संख्या	मिलान चिह्न (T)	पटों की संख्या
50	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27	卌 卌 卌 卌 |||	23
60	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28	卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||	32
70	...	33	...	37
80	...	38	...	42
90	...	44	...	46
100	...	48	...	52

ध्यान दीजिए कि जब आप उछालों की संख्या अधिकाधिक बढ़ाते जाते हैं, तब चितों की संख्या और पटों की संख्या परस्पर अधिकाधिक निकट आते जाते हैं।

ऐसा ही एक पासे के साथ भी हो सकता है, जब उसे एक बड़ी संख्या में फेंका जाता है। छह परिणामों में से प्रत्येक की संख्या परस्पर लगभग बराबर हो जाती हैं।

ऐसी स्थितियों में, हम कह सकते हैं कि प्रयोग के विभिन्न परिणाम **सम संभावित** या **समप्रायिक** (equally likely) हैं। इसका अर्थ यह है कि सभी में से प्रत्येक परिणाम के आने का संयोग (chance) एक ही है।

5.5.3 संयोग को प्रायिकता से जोड़ना

एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग पर विचार कीजिए। परिणाम क्या हैं? यहाँ केवल दो परिणाम हैं– चित या पट। दोनों ही परिणाम समप्रायिक (equally likely) हैं। एक चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों में से 1, अर्थात् $\frac{1}{2}$ है। दूसरे शब्दों में, हम कहते हैं कि एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता (probability) $= \frac{1}{2}$ है। एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

अब एक पासे को फेंकने के उदाहरण पर विचार कीजिए, जिसके फलकों (faces) पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 (एक फलक पर एक संख्या) अंकित हैं। यदि आप इसे एक बार फेंके, तो परिणाम क्या प्राप्त होंगे?

परिणाम हैं : 1, 2, 3, 4, 5, 6 । इस प्रकार, यहाँ छह समप्रायिक परिणाम हैं।

परिणाम 2 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

यह प्रायिकता है : $\frac{1}{6}$ $\begin{array}{l}\leftarrow \text{ 2 देने वाले परिणामों की संख्या} \\ \leftarrow \text{ समप्रायिक परिणामों की संख्या}\end{array}$

संख्या 5 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? संख्या 7 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? 1 से 6 तक की संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

5.5.4 घटनाओं के रूप में परिणाम

एक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम या परिणामों के संग्रह से एक **घटना (event)** बनती है। उदाहरणार्थ, एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में, एक 'चित' प्राप्त करना एक घटना है तथा एक 'पट' प्राप्त करना भी एक घटना है।

एक पासे को फेंकने की स्थिति में, परिणामों 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक परिणाम प्राप्त करना एक घटना है।

क्या एक सम संख्या प्राप्त करना एक घटना है? क्योंकि एक सम संख्या 2, 4 या 6 हो सकती है, इसलिए एक सम संख्या प्राप्त करना भी एक घटना है। एक सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी?

यह है : $\frac{3}{6}$ ← उन परिणामों की संख्या जो घटना बनाते हैं
← प्रयोग के परिणामों की कुल संख्या

उदाहरण 3 : एक थैले में 4 लाल गेंदें और 2 पीली गेंदें हैं। (ये गेंदें रंग के अतिरिक्त सभी प्रकार से एक जैसी, अर्थात् सर्वसम (identical) हैं।) थैले के अंदर से बिना देखे एक गेंद निकाली जाती है। एक लाल गेंद प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है? क्या यह एक पीली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है या कम?

हल : यहाँ घटना के कुल (4 + 2 =) 6 परिणाम हैं। लाल गेंद प्राप्त करने के लिए 4 परिणाम हैं। (क्यों?)

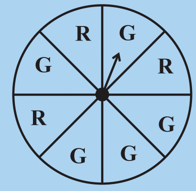
अतः, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ है।

इसी प्रकार, पीली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ है। (क्यों?)

अतः, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता पीली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है।

प्रयास कीजिए

1. मान लीजिए कि आप पहिए को घुमाते हैं (आकृति 5.11)।
   - (i) इस पहिए पर एक हरा त्रिज्यखंड प्राप्त करने के परिणामों की संख्या और हरा त्रिज्यखंड प्राप्त न होने के परिणामों की संख्या लिखिए।
   - (ii) एक हरा त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
   - (iii) एक हरा त्रिज्यखंड प्राप्त न होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.11

5.5.5 वास्तविक जीवन से संबंधित संयोग और प्रायिकता

हमने उस संयोग की बात की थी जिसमें केवल उसी दिन वर्षा हुई जब हम बरसाती लेकर नहीं चले थे। आप प्रायिकता के पदों में संयोग के बारे में क्या कह सकते थे? क्या यह वर्षा ऋतु में 10 दिन में 1 दिन हो सकता था?

तब वर्षा होने की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ है। वर्षा न होने की प्रायिकता $\frac{9}{10}$ है।

(यह कल्पना करते हुए कि किसी दिन वर्षा होना या न होना सम संभावित या समप्रायिक है।) वास्तविक जीवन की विभिन्न स्थितियों में प्रायिकता का प्रयोग किया जाता है।

1. एक बड़े समूह के अभिलक्षणों या विशेषताओं को उस समूह के एक छोटे भाग का प्रयोग करते हुए ज्ञात करना। उदाहरणार्थ, चुनाव के समय 'एक्जिट पोल' (exit poll) किया जाता है। इसमें संपूर्ण क्षेत्र में बंटित केंद्रों में से यदृच्छ रूप से (बिना किसी पूर्वाग्रह के) कुछ

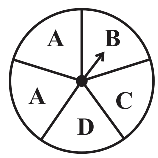
केंद्र चुनकर मतदान करके आने वाले व्यक्तियों से यह पूछा जाता है कि उन्होंने किसे मत दिया है। इससे प्रत्येक प्रत्याशी के जीतने की संभावना का अनुमान लग जाता है तथा इसी आधार पर प्रागुक्तियाँ (भविष्यवाणियाँ) की जाती हैं।

2. मौसम विभाग बीते हुए अनेक वर्षों के आँकड़ों की प्रवृत्तियों को देखकर मौसम के बारे में भविष्यवाणी (प्रागुक्तियाँ) करता है।

प्रश्नावली 5.3

1. इन प्रयोगों में आप जो परिणाम देख सकते हैं उन्हें लिखिए :

(a) पहिए को घुमाना



(b) दो सिक्कों को एक साथ उछालना

2. जब एक पासे को फेंका जाता है, तब निम्नलिखित प्रत्येक घटना से प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए :

(i) (a) एक अभाज्य संख्या (b) एक अभाज्य संख्या नहीं

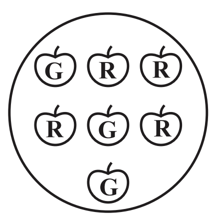
(ii) (a) 5 से बड़ी एक संख्या (b) 5 से बड़ी संख्या नहीं

3. ज्ञात कीजिए :

(a) (प्रश्न 1(a) में)सूचक के D पर रुकने की प्रायिकता।

(b) अच्छी प्रकार से फेटी हुई 52 ताशों की एक गड्डी में से 1 इक्का प्राप्त करने की प्रायिकता।

(c) एक लाल सेब प्राप्त करने की प्रायिकता (दी हुई आकृति से देखिए)।



4. 10 पृथक् पर्चियों पर 1 से 10 तक संख्याएँ लिखी हुई हैं (एक पर्ची पर एक संख्या), उन्हें एक बक्स में रखकर अच्छी प्रकार से मिला दिया जाता है। बक्स के अंदर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है। निम्नलिखित की प्रायिकता क्या है?

(i) संख्या 6 प्राप्त करना।

(ii) 6 से छोटी एक संख्या प्राप्त करना।

(iii) 6 से बड़ी एक संख्या प्राप्त करना।

(iv) 1 अंक की एक संख्या प्राप्त करना।

5. यदि आपके पास 3 हरे त्रिज्यखंड, 1 नीला त्रिज्यखंड और 1 लाल त्रिज्यखंड वाला एक घूमने वाला पहिया है तो एक त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? ऐसा त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है, जो नीला न हो?

6. प्रश्न 2 में दी हुई घटनाओं की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. हमारे पास अधिकतर उपलब्ध आँकड़े जो असंगठित रूप में होते हैं जिन्हें **यथाप्राप्त आँकड़े** कहा जाता है।

2. किन्हीं भी आँकड़ों से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए हमें उन्हें क्रमबद्ध रूप में संगठित करने की आवश्यकता पड़ती है।

3. **बारंबारता** वह संख्या दर्शाती है जितनी बार कोई एक विशिष्ट प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

4. यथाप्राप्त आँकड़ों के समूह बनाए जा सकते हैं और उन्हें एक क्रमबद्ध प्रकार से 'वर्गीकृत बारंबारता बंटन' के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

5. वर्गीकृत आँकड़ों को **आयतचित्र** का प्रयोग करते हुए प्रदर्शित किया जा सकता है। आयतचित्र एक प्रकार का दंड आलेख है, जिसमें क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अंतरालों को दर्शाया जाता है तथा दंडों की लंबाइयाँ वर्ग अंतरालों की बारंबारताएँ दर्शाती हैं। साथ ही, दंडों के बीच में कोई रिक्तता नहीं होती, क्योंकि वर्ग अंतरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।

6. आँकड़ों को **वृत्त आलेख** या पाई चार्ट का प्रयोग करके भी प्रस्तुत किया जा सकता है। एक वृत्त आलेख एक संपूर्ण और उसके भागों में संबंध को दर्शाता है।

7. कुछ ऐसे प्रयोग होते हैं जिनमें परिणामों के आने के संयोग बराबर होते हैं।

8. एक **यदृच्छ प्रयोग** वह प्रयोग है जिसमें परिणामों की ठीक-ठीक प्रागुक्ति (भविष्यवाणी) पहले से नहीं की जा सकती है।

9. किसी प्रयोग के परिणाम **सम संभावित** या **समप्रायिक** कहलाते हैं, यदि उनके आने के संयोग बराबर हों।

10. **एक घटना की प्रायिकता** $= \dfrac{\text{घटना को बनाने वाले परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के परिणामों की कुल संख्या}}$

जब परिणाम समप्रायिक हैं।

11. किसी प्रयोग के एक या अधिक परिणामों से एक घटना बनती है।

12. संयोग और प्रायिकता वास्तविक जीवन से संबंधित हैं।

नोट

अध्याय

6

वर्ग और वर्गमूल

6.1 भूमिका

आप जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा (जहाँ 'भुजा' का अर्थ एक भुजा की लंबाई) होता है। निम्न सारणी का अध्ययन कीजिए :

वर्ग की भुजा (cm में)	वर्ग का क्षेत्रफल (cm^2 में)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

संख्याओं 4, 9, 25, 64 और इस प्रकार की दूसरी संख्याओं में क्या विशेष है? चूँकि 4 को $2 \times 2 = 2^2$, 9 को $3 \times 3 = 3^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं अत: हम पाते हैं कि इस प्रकार की सभी संख्याओं को उसी संख्या के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार की संख्याएँ जैसे 1, 4, 9, 16, 25, ... को वर्ग संख्याएँ कहते हैं।

साधारणतया, यदि एक प्राकृत संख्या m को n^2 से व्यक्त किया जाता है, जहाँ n भी एक प्राकृत संख्या है, तब m एक **वर्ग संख्या** है। क्या 32 एक वर्ग संख्या है?

हम जानते हैं कि $5^2 = 25$ और $6^2 = 36$ होता है। यदि 32 एक वर्ग संख्या है, तो यह एक प्राकृत संख्या का वर्ग होना चाहिए जो 5 और 6 के बीच हो। परंतु यहाँ 5 और 6 के बीच कोई प्राकृत संख्या नहीं है। निम्न संख्याओं और उनके वर्गों के बारे में विचार कीजिए :

संख्याएँ	वर्ग
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

3	$3 \times 3 = 9$
4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$
6	-----------
7	-----------
8	-----------
9	-----------
10	-----------

क्या आप इसे पूरा कर सकते हैं?

उपरोक्त सारणी से क्या आप 1 से 100 के बीच की वर्ग संख्याओं को लिख सकते हैं? क्या 100 तक कोई प्राकृत वर्ग संख्या छूट गई है? आप पाएँगे कि शेष सभी संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ नहीं हैं। संख्याएँ 1, 4, 9, 16 वर्ग संख्याएँ हैं। ये संख्याएँ **पूर्ण वर्ग संख्याएँ** भी कहलाती हैं।

प्रयास कीजिए

1. दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
   (i) 30 और 40 (ii) 50 और 60

6.2 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

निम्नलिखित सारणी में 1 से 20 तक की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है।

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

उपरोक्त सारणी में वर्ग संख्याओं का अध्ययन कीजिए। वर्ग संख्याओं का अंतिम अंक (यानी वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान का अंक) क्या है? ये सभी संख्याएँ इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती हैं। इनमें से किसी भी संख्या के इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 नहीं आता है।

क्या हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती है, तो वह एक वर्ग संख्या होगी? इस बारे में सोचिए।

प्रयास कीजिए

1. क्या हम कह सकते हैं कि निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं? हम कैसे जानते हैं?
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 1069 (vi) 2061
   पाँच ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके इकाई स्थान को देखकर आप बता सकें कि ये संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।
2. पाँच ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके इकाई स्थान को देखकर आप नहीं बता सकते कि वे वर्ग संख्याएँ हैं या नहीं।

- निम्न सारणी में कुछ संख्याओं एवं उनके वर्गों का अध्ययन कीजिए और दोनों में इकाई स्थान का निरीक्षण कीजिए :

सारणी 1

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

निम्नलिखित वर्ग संख्याएँ अंक 1 पर समाप्त होती हैं :

वर्ग	अंक
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

प्रयास कीजिए

$123^2, 77^2, 82^2, 161^2, 109^2$ में से कौन सी संख्या अंक 1 पर समाप्त होगी?

इनके अलावा अगली दो वर्ग संख्याएँ लिखिए जो 1 और उनकी संगत संख्याओं पर समाप्त होती है।

आप देखेंगे कि *यदि एक संख्या के इकाई स्थान पर 1 या 9 आता है तब इसकी वर्ग संख्या के अंत में 1 आता है।*

- अब 6 पर समाप्त होने वाली संख्या पर विचार कीजिए :

वर्ग	अंक
16	4
36	6
196	14
256	16

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन सी संख्याओं के इकाई स्थान पर 6 अंक होगा :

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
(iv) 36^2 (v) 34^2

हम देखते हैं कि *जब कोई वर्ग संख्या 6 पर समाप्त होती है तो वह जिस संख्या का वर्ग है, उसका इकाई अंक या तो 4 या 6 होगा।*

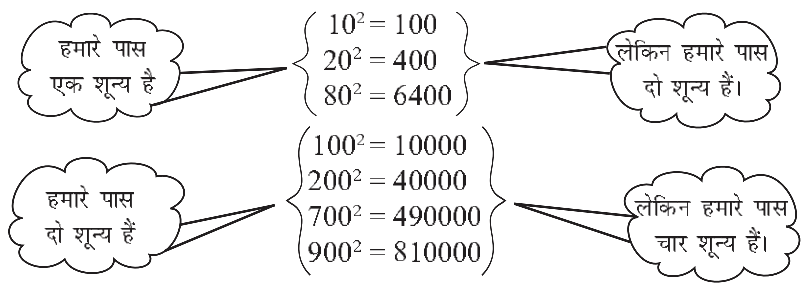
क्या आप इस प्रकार के कुछ और नियम, सारणी में लिखी गई संख्याओं एवं उनके वर्गों के अवलोकन से ज्ञात कर सकते हैं (सारणी 1)?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग करने पर उनके इकाई स्थान पर क्या होगा?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
(v) 21222 (vi) 9106

- निम्नलिखित संख्याओं और उनके वर्गों पर विचार कीजिए :



$$10^2 = 100,\quad 20^2 = 400,\quad 80^2 = 6400$$

$$100^2 = 10000,\quad 200^2 = 40000,\quad 700^2 = 490000,\quad 900^2 = 810000$$

यदि एक संख्या के अंत में तीन शून्य हों, तो उसके वर्ग में कितने शून्य होंगे? क्या आपने, संख्या के अंत में शून्यों की संख्या और उसके वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या पर ध्यान दिया? क्या आप कह सकते हैं कि वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम संख्या होती है?

- संख्या और उनके वर्गों के लिए सारणी 1 देखिए।
सम संख्याओं के वर्गों एवं विषम संख्याओं के वर्गों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित में से किन संख्याओं के वर्ग विषम संख्या/सम संख्या होंगे। क्यों?
   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980
2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्यों की संख्या क्या होगी?
   (i) 60 (ii) 400

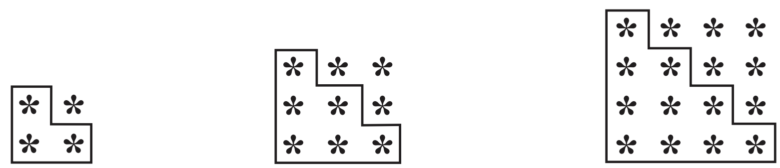
6.3 कुछ और रोचक प्रतिरूप

1. त्रिकोणीय संख्याओं के जोड़

क्या आपको त्रिकोणीय संख्याएँ (संख्याएँ जिनके बिंदु प्रतिरूप त्रिभुजों के रूप में व्यवस्थित किए जा सकते हैं) याद हैं?

1 3 6 10 15

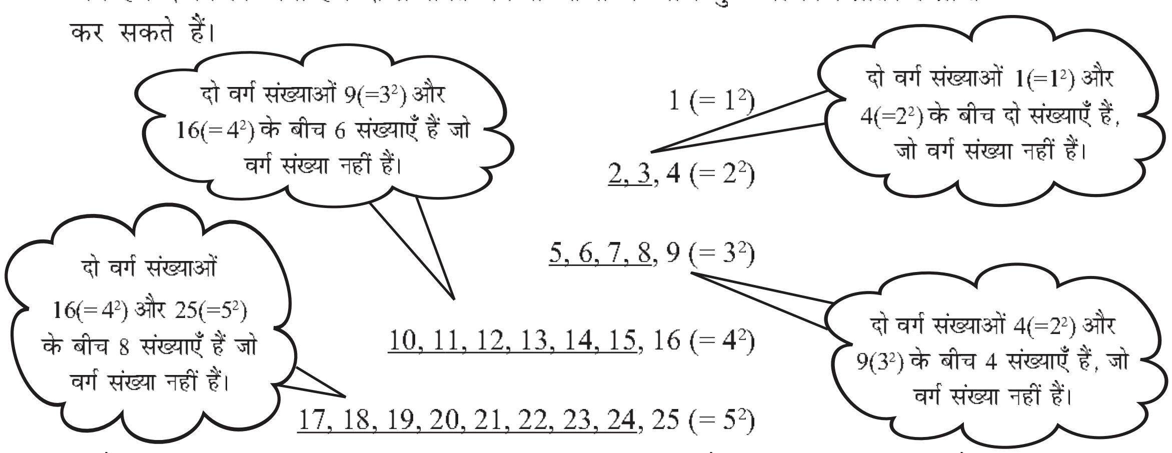
यदि हम दो क्रमागत त्रिभुजीय संख्याओं को आपस में जोड़ते हैं तब हम एक वर्ग संख्या प्राप्त करते हैं, जैसे–



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $\quad$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

2. वर्ग संख्याओं के बीच की संख्याएँ

अब हम देखेंगे कि क्या हम दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच कुछ रुचिकर प्रतिरूप प्राप्त कर सकते हैं।



$1^2(=1)$ और $2^2(=4)$ के बीच में दो (अर्थात् 2×1) संख्याएँ 2, 3, हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।

$2^2(=4)$ और $3^2(=9)$ के बीच में चार (अर्थात् 2×2) संख्याएँ 5, 6, 7, 8, है जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।

अब $\quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$

अत: $\quad 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

यहाँ $9(=3^2)$ और $16(=4^2)$ के बीच में छ: संख्याएँ 10, 11, 12, 13, 14, 15 हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, उनकी संख्या दोनों वर्गों के अंतर से 1 कम है।

हमारे पास $4^2 = 16$ और $5^2 = 25$ है।

अत: $5^2 - 4^2 = 9$

यहाँ $16(=4^2)$ और $25(=5^2)$ के बीच 17, 18, ... , 24 आठ संख्याएँ हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं। उनकी संख्या दो वर्गों के अंतर से 1 कम है

7^2 और 6^2 को देखिए। क्या तुम कह सकते हो कि 6^2 और 7^2 के बीच कितनी संख्याएँ हैं?

यदि हम कोई प्राकृत संख्याएँ n और $(n + 1)$ लेते हैं तब

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

हम n^2 और $(n + 1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ पाते हैं जो दो वर्ग संख्याओं के अंतर से 1 कम है।

व्यापक रूप से *हम कह सकते हैं कि दो वर्ग संख्याओं n और $(n + 1)$ के बीच $2n$ संख्याएँ हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।* जाँच के लिए $n = 5$, $n = 6$ इत्यादि लें और इन्हें सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. 9^2 और 10^2 के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं? 11^2 और 12^2 के बीच भी प्राकृत संख्याओं की संख्या बताइए।
2. निम्नलिखित संख्याओं के युग्मों के बीच की संख्या बताइए जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।
   (i) 100^2 और 101^2 (ii) 90^2 और 91^2 (iii) 1000^2 और 1001^2

3. विषम संख्याओं का जोड़

निम्न पर विचार कीजिए।

1 [एक विषम संख्या]	$= 1 = 1^2$
1 + 3 [पहली दो विषम संख्याओं का योग]	$= 4 = 2^2$
1 + 3 + 5 [पहली तीन विषम संख्याओं का योग]	$= 9 = 3^2$
1 + 3 + 5 + 7 [...]	$= 16 = 4^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...]	$= 25 = 5^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...]	$= 36 = 6^2$

अत: हम कह सकते हैं कि *पहली n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है।*

इसे अलग ढ़ंग से देखते हुए हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या, वर्ग संख्या है तो वह 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं का योग है।

अब इन संख्याओं पर विचार कीजिए जो पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं जैसे 2, 3, 5, 6, ... । क्या आप इन संख्याओं को 1 से प्रारंभ कर सभी क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते हैं?

आप पाएँगे कि इन संख्याओं को इस प्रकार नहीं लिख सकते हैं। संख्या 25 को लीजिए और इसमें से 1, 3, 5, 7, 9, ... को क्रम में घटाएँ :

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$ (iv) $16 - 7 = 9$
(v) $9 - 9 = 0$

अर्थात् यहाँ $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ है, अत: 25 एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

अब एक दूसरी संख्या 38 को लीजिए और पुनः ऊपर जैसा कीजिए।

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$ (iv) $29 - 7 = 22$

(v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$ (vii) $2 - 13 = -11$

अतः यह दर्शाता है कि 38 को 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के रूप में हम नहीं लिख सकते हैं और 38 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

अतः हम यह भी कह सकते हैं कि *यदि कोई प्राकृत संख्या 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त नहीं हो सकती तो वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।*

एक संख्या पूर्ण है या नहीं यह जानने के लिए इस परिणाम का उपयोग कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं या नहीं?

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81

(iv) 49 (v) 69

4. क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

प्रथम संख्या $= \dfrac{3^2 + 1}{2}$

दूसरी संख्या $= \dfrac{3^2 = 1}{2}$

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$

ओह! किसी भी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित संख्याओं को दो क्रमागत पूर्णांकों के योग के रूप में लिखिए :

   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2

2. क्या आप सोचते हैं कि इसका विलोम सत्य है अर्थात् क्या दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का योग एक पूर्ण वर्ग होता है? अपने उत्तर के पक्ष में अपने एक उदाहरण दीजिए।

5. दो क्रमागत सम या विषम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

इस प्रकार $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

अतः $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

इसी तरह $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1) \times (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1$

अतः सामान्यतः हम कह सकते हैं कि $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

6. वर्ग संख्याओं के कुछ और प्रतिरूप

संख्याओं के वर्गों का अवलोकन कीजिए 1, 11, 111 ... इत्यादि। ये एक सुंदर प्रतिरूप देते हैं।

$1^2 =$ 1

$11^2 =$ 1 2 1

$111^2 =$ 1 2 3 2 1

$1111^2 =$ 1 2 3 4 3 2 1

$11111^2 =$ 1 2 3 4 5 4 3 2 1

$11111111^2 =$ 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

प्रयास कीजिए

उपरोक्त प्रतिरूप का उपयोग करते हुए वर्ग संख्याएँ लिखिए :

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

प्रयास कीजिए

उपरोक्त प्रतिरूप का उपयोग करते हुए क्या आप निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग ज्ञात कर सकते हैं?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

अन्य रोचक प्रतिरूप

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

ऐसा क्यों होता है, यह जानना आपके लिए मनोरंजन पूर्ण हो सकता है। आपके लिए इस तरह के प्रश्नों के बारे में खोजना और सोचना रुचिकर होगा। भले ही ऐसे उत्तर कुछ समय बाद मिलें।

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853
(v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880
(ix) 12796 (x) 55555

2. निम्नलिखित संख्याएँ स्पष्ट रूप से पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, इसका कारण दीजिए।

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
(v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. निम्नलिखित संख्याओं में से किस संख्या का वर्ग विषम संख्या होगा?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन कीजिए और रिक्त स्थान भरिए।

$11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

$100001^2 = 1 \ldots\ldots\ldots 2 \ldots\ldots\ldots 1$

$10000001^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन कीजिए और रिक्त स्थान भरिए :

$$11^2 = 1\ 2\ 1$$
$$101^2 = 1\ 0\ 2\ 0\ 1$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = \text{..........................}$$
$$\text{...........}^2 = 10203040504030201$$

6. दिए गए प्रतिरूप का उपयोग करते हुए लुप्त संख्याओं को प्राप्त कीजिए :

$1^2 + 2^2 + 2^2 \ = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 \ = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + \_^2 \ = 21^2$

$5^2 + \_^2 + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + \_^2 = \_\_^2$

> **प्रतिरूप प्राप्त कीजिए :**
> तीसरी संख्या पहली और दूसरी से संबंधित है। कैसे? चौथी संख्या तीसरी संख्या से संबंधित है। कैसे?

7. योग संक्रिया किए बिना योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$

(iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23$

8. (i) 49 को 7 विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।

(ii) 121 को 11 विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।

9. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग के बीच में कितनी संख्याएँ हैं?

(i) 12 और 13 (ii) 25 और 26 (iii) 99 और 100

6.4 संख्याओं का वर्ग ज्ञात करना

छोटी संख्याएँ जैसे 3, 4, 5, 6, 7, ... इत्यादि का वर्ग ज्ञात करना सरल है। लेकिन क्या हम 23 का वर्ग इतनी शीघ्रता से प्राप्त कर सकते हैं?

इसका उत्तर इतना आसान नहीं है और हमें 23 को 23 से गुणा करने की आवश्यकता है।

इसे प्राप्त करने का एक तरीका है जो 23×23 को बिना गुणा किए प्राप्त होता है।

हम जानते हैं कि $\quad 23 = 20 + 3$

इसलिए $\quad 23^2 = (20 + 3)^2 = 20(20 + 3) + 3(20 + 3)$

$\qquad = 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2$

$\qquad = 400 + 60 + 60 + 9 = 529$

उदाहरण 1 : निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग गुणा किए बिना ज्ञात कीजिए :

(i) 39 (ii) 42

हल : (i) $39^2 = (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9(30 + 9)$

$\qquad = 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2$

$\qquad = 900 + 270 + 270 + 81 = 1521$

(ii) $42^2 = (40 + 2)^2 = 40(40 + 2) + 2(40 + 2)$

$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$

$= 1600 + 80 + 80 + 4 = 1764$

6.4.1 वर्ग के अन्य प्रतिरूप

निम्न प्रतिरूप को देखिए

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ सैकड़े $+ 25$

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ सैकड़े $+ 25$

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ सैकड़े $+ 25$

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ सैकड़े $+ 25$

एक ऐसी संख्या लीजिए जिसके इकाई स्थान पर अंक 5 हो, अर्थात् $a5$ ।

$(a5)^2 = (10a + 5)^2$

$= 10a(10a + 5) + 5(10a + 5)$

$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$

$= 100a(a + 1) + 25$

$= a(a + 1)$ सैंकड़ा $+ 25$

अब क्या आप 95 का वर्ग प्राप्त कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए जिनके इकाई अंक 5 हैं।

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 पाइथागोरस त्रिक

निम्न को लीजिए

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

संख्या 3, 4, 5 के समूह को **पाइथागोरस त्रिक** कहते हैं। 6, 8, 10 भी एक पाइथागोरस त्रिक है। इसी प्रकार

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

पुन: अवलोकन करें कि

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ । इसी प्रकार संख्याएँ 5, 12, 13 ऐसी ही दूसरी त्रिक है। क्या आप इस प्रकार के कुछ और त्रिक प्राप्त कर सकते हैं?

किसी प्राकृत संख्या $m > 1$ के लिए, हम पाते हैं $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$। अत: $2m, m^2 - 1$ और $m^2 + 1$ पाइथागोरस त्रिक के रूप में हैं।

इस रूप का उपयोग करते हुए कुछ और पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2 : एक पाइथागोरस त्रिक लिखिए जिसकी सबसे छोटी संख्या 8 है।

हल : साधारण रूप $2m, m^2 - 1, m^2 + 1$ से हम पाइथागोरस त्रिक पा सकते हैं।

पहले हम लेते हैं $m^2 - 1 = 8$

अत: $m^2 = 8 + 1 = 9$

$m = 3$

इसलिए $2m = 6$ और $m^2 + 1 = 10$

अत: 6, 8, 10 एक त्रिक है लेकिन 8 सबसे छोटी संख्या नहीं है।

इसलिए हम लेते हैं $2m = 8$

तब $m = 4$

$$m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

और $m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

अत: 8, 15, 17 एक ऐसा त्रिक है जहाँ 8 सबसे छोटी संख्या है।

उदाहरण 3 : एक पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए जिसकी एक संख्या 12 है।

हल : यदि हम लेते हैं $m^2 - 1 = 12$

तब, $m^2 = 12 + 1 = 13$

यहाँ m का मान पूर्णांक नहीं होगा।

अत: हम कोशिश करते हैं $m^2 + 1 = 12$ । पुन: $m^2 = 11$ जो m के लिए पूर्णांक मान नहीं देगा।

अत: हमें लेना चाहिए $2m = 12$

तब, $m = 6$

इस प्रकार $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$ और $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

अत: आवश्यक त्रिक है 12, 35, 37

नोट : इस रूप का उपयोग करते हुए सभी पाइथागोरस त्रिक प्राप्त नहीं कर सकते हैं। उदाहरण के लिए दूसरी त्रिक 5, 12, 13 में भी 12 एक सदस्य हैं।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86 (iv) 93
   (v) 71 (vi) 46
2. पाइथागोरस त्रिक लिखिए जिसका एक सदस्य है,
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

6.5 वर्गमूल

निम्न स्थितियों का अध्ययन कीजिए :

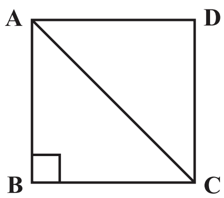
(a) वर्ग का क्षेत्रफल 144 cm^2 है। वर्ग की भुजा क्या होगी?

हम जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा^{2} होता है।

यदि हम भुजा की लंबाई का मान 'a' लेते हैं, तब $144 = a^2$

भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए आवश्यक है कि एक ऐसी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग 144 है।

(b) एक वर्ग जिसकी भुजा 8 cm है, उसके विकर्ण की लंबाई क्या होगी (चित्र 6.1)?



आकृति 6.1

इसको हल करने के लिए क्या हम पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर सकते हैं?

हम जानते हैं $\quad AB^2 + BC^2 = AC^2$

अर्थात् $\quad 8^2 + 8^2 = AC^2$

या $\quad 64 + 64 = AC^2$

या $\quad 128 = AC^2$

पुनः AC प्राप्त करने के लिए हमें एक ऐसी संख्या सोचनी है जिसका वर्ग 128 हो।

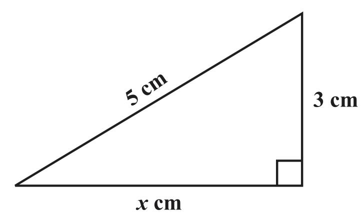
(c) एक समकोण त्रिभुज में कर्ण और एक भुजा क्रमशः 5 cm और 3 cm हैं। (चित्र 6.2) क्या आप तीसरी भुजा प्राप्त कर सकते हैं?

माना कि तीसरी भुजा की लंबाई x cm है।

पाइथागोरस प्रमेय के उपयोग से $\quad 5^2 = x^2 + 3^2$

$25 - 9 = x^2$

$16 = x^2$



आकृति 6.2

पुनः x का मान प्राप्त करने के लिए हमें एक संख्या की आवश्यकता है जिसका वर्ग 16 है। उपरोक्त सभी स्थितियों में हमें एक संख्या की आवश्यकता है, जिसका वर्ग ज्ञात हो, और उस संख्या को वर्गमूल के रूप में जाना जाता हो।

6.5.1 वर्गमूल ज्ञात करना

योग की प्रतिलोम (विपरीत) संक्रिया घटाना है और गुणा की प्रतिलोम संक्रिया भाग है। इसी तरह वर्गमूल प्राप्त करना भी वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।

हमें ज्ञात है $\quad 1^2 = 1$, अतः 1 का वर्गमूल 1 है।

$2^2 = 4$, अतः 4 का वर्गमूल 2 है।

$3^2 = 9$, अतः 9 का वर्गमूल 3 है।

> इसी प्रकार $9^2 = 81$,
> और $(-9)^2 = 81$
> हम कह सकते है कि 81 का वर्गमूल 9 और -9

प्रयास कीजिए

(i) $11^2 = 121$. 121 का वर्गमूल क्या है? (ii) $14^2 = 196$. 196 का वर्गमूल क्या है?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

$(-1)^2 = 1$. क्या 1 का वर्गमूल है -1? $(-2)^2 = 4$. क्या 4 का वर्गमूल है -2?

$(-9)^2 = 81$. क्या 81 का वर्गमूल है -9?

उपरोक्त के अनुसार आप कह सकते हैं कि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के दो समाकलित (एक साथ) वर्गमूल होते हैं। इस अध्याय में हम किसी प्राकृत संख्या के केवल धनात्मक वर्गमूल ही लेंगे। धनात्मक वर्गमूल संख्या को $\sqrt{\ }$ संकेत से व्यक्त करते हैं।

उदाहरणार्थ, $\sqrt{4} = 2$ (-2 नहीं); $\sqrt{9} = 3$ (-3 नहीं) इत्यादि।

कथन	निष्कर्ष
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

कथन	निष्कर्ष
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

6.5.2 घटाने की संक्रिया के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

क्या आपको याद है कि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है? अत: प्रत्येक वर्ग संख्या को 1 से प्रारंभ कर क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। $\sqrt{81}$ को लीजिए

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$ (iv) $72 - 7 = 65$

(v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$ (vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$

(ix) $17 - 17 = 0$

संख्या 1 से क्रमागत विषम संख्याओं को 81 में रूप घटाने पर 9वाँ पद 0 प्राप्त होता है अत: $\sqrt{81} = 9$। इस नियम का उपयोग करते हुए क्या आप 729 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, लेकिन इसमें समय अधिक लगता है। अब हम एक सरल तरीके से वर्गमूल प्राप्त करने की कोशिश करते हैं।

प्रयास कीजिए

1 से प्रारंभ होने वाली विषम संख्याओं को बार-बार घटाने पर प्राप्त निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं या नहीं? यदि यह संख्या पूर्ण वर्ग हैं तो इसके वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 121 (ii) 55 (iii) 36

(iv) 49 (v) 90

6.5.3 अभाज्य गुणनखंडन के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

निम्न संख्याओं एवं उनके वर्गों को अभाज्य गुणनखंडन के रूप में लिखिए :

एक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन	इसके वर्ग का अभाज्य गुणनखंडन
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

6 के अभाज्य गुणनखंड में 2 कितनी बार आता है? एक बार । 36 के अभाज्य गुणनखंडन में 2 कितनी बार आता है? दो बार । इसी तरह 6 और 36 में 3 बार तथा 8 और 64 इत्यादि में 2 कितनी बार है?

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

आप पाएँगे कि किसी संख्या के वर्ग के अभाज्य गुणनखंडों की संख्या उस संख्या के अभाज्य गुणनखंडों की संख्या की दुगुना होती है। आइए, हम एक दी गई वर्ग संख्या 324 का वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

हम जानते हैं कि 324 का अभाज्य गुणनखंडन

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

अभाज्य गुणनखंड के युग्म बनाने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

अत: $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

इसी तरह क्या आप 256 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं? 256 का अभाज्य गुणनखंड है,

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

अभाज्य गुणनखंड में युग्म बनाने से हम पाते हैं?

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

अत: $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

क्या 48 एक पूर्ण वर्ग संख्या है?

हम जानते हैं, $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

यहाँ सारे गुणनखंड युग्म में नहीं हैं, अत: 48 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। कल्पना कीजिए कि हम 48 के सबसे छोटे गुणज ज्ञात करना चाहते हैं जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या हो। इसे कैसे करेंगे? 48 के अभाज्य गुणनखंड के युग्म बनाने पर देखते हैं कि केवल 3 एक संख्या है जो युग्म में नहीं बन पाती है अत: हमें युग्म को पूरा करने में 3 से गुणा करने की आवश्यकता है।

अत: $48 \times 3 = 144$ एक पूर्ण वर्ग है।

क्या आप कह सकते हैं कि 48 को किस संख्या से भाग दें कि पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो?

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

गुणज 3, युग्म में नहीं है। अत: हम 48 को यदि 3 से भाग दें तो हम $48 \div 3 = 16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$ प्राप्त करेंगे और यह संख्या पूर्ण वर्ग भी है।

उदाहरण 4 : 6400 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए?

हल : लिखिए $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

अत: $\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

2	90
3	45
3	15
	5

उदाहरण 5 : क्या 90 एक पूर्ण वर्ग है?

हल : हम $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ रखते हैं।

अभाज्य गुणनखंड में 2 और 5 युग्म में नहीं हैं।

अत: 90 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। जिसे यथार्थ रूप में हम इस प्रकार भी देख सकते हैं क्योंकि इसमें केवल 1 शून्य है।

उदाहरण 6 : क्या 2352 एक पूर्ण वर्ग संख्या है? यदि नहीं तो 2352 का सबसे छोटा गुणज प्राप्त कीजिए जो कि पूर्ण वर्ग संख्या हो तथा नयी संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

अभाज्य गुणनखंड के अनुसार 3 के युग्म नहीं हैं अत: 2352 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। यदि 3 का एक जोड़ा बनाते हैं तब संख्या पूर्ण वर्ग हो जाएगी। अत: 2352 को 3 से गुणा करने पर हम पाएँगे :

$$2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$$

अब प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड युग्म में हैं। अत: $2352 \times 3 = 7056$ एक पूर्ण वर्ग संख्या है। और 2352 का सबसे छोटा गुणज 7056 है जो एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

और $$\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

उदाहरण 7 : सबसे छोटी संख्या प्राप्त कीजिए जिसे 9408 से भाग देने पर भागफल एक पूर्ण वर्ग संख्या हो जाए। उस भागफल का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

यदि हम 9408 को 3 से भाग देते हैं तब

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या हैं। (क्यों?)

अत: सबसे छोटी वांछित संख्या 3 है।

और $$\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$$

उदाहरण 8 : सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक संख्या 6, 9 और 15 से विभाजित हो जाए।

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

हल : इसे दो चरण में हल कर सकते हैं। सबसे पहले छोटे उभयनिष्ठ गुणज को ज्ञात कीजिए और तब उसके बाद आवश्यक वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए। वह सबसे छोटी संख्या जिसमें 6, 9, 15 का भाग जाएगा, इनकी ल.स. है। 6, 9 और 15 का ल.स. है $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$ ।

90 का अभाज्य गुणनखंडन $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$ है।

हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 के युग्म नहीं हैं। अत: 90 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त करने के लिए 90 के प्रत्येक गुणनखंड युग्म में होने चाहिए अत: हमें 2 और 5 का जोड़ा बनाने की आवश्यकता होगी। इसलिए 90 को 2×5, अर्थात् 10 से गुणा करना चाहिए। अत: वह वर्ग संख्या $90 \times 10 = 900$ है।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने में इकाई अंक की क्या संभावना है।
   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025
2. बिना गणना किए वह संख्या बताएँ जो वास्तव में पूर्ण वर्ग नहीं है।
   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441
3. बार-बार घटाने की विधि से 100 और 169 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
4. अभाज्य गुणनखंड विधि से निम्न संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
   (v) 7744 (v) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
   (ix) 529 (x) 8100

5. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को गुणा करने पर यह एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।
   (i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
   (v) 1458 (vi) 768
6. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को भाग देने पर वह एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस तरह ज्ञात की गई संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।
   (i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
   (v) 2800 (vi) 1620
7. एक विद्यालय में कक्षा VIII के सभी विद्यार्थियों ने प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में 2401 रु दान में दिए। प्रत्येक विद्यार्थी ने उतने ही रुपये दान में दिए जितने कक्षा में विद्यार्थी थे। कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. एक बाग में 2025 पौधे इस प्रकार लगाए जाने हैं कि प्रत्येक पंक्ति में उतने ही पौधे हों, जितनी पंक्तियों की संख्या हो। पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में पौधों कि संख्या ज्ञात कीजिए।
9. वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 4, 9 और 10 प्रत्येक से विभाजित हो जाए।
10. वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक 8, 15 और 20 से विभाजित हो जाए।

6.5.4 भागफल विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

जब संख्याएँ बड़ी हों तब अभाज्य गुणनखंड विधि से वर्गमूल ज्ञात करना लंबा और कठिन होता है। इस समस्या से निकलने के लिए हम दीर्घ विभाजन विधि का प्रयोग करते हैं।

इसके लिए हमें वर्गमूल में अंकों की संख्या को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

निम्नलिखित सारणी को देखिए :

संख्या	वर्ग	
10	100	जो 3 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
31	961	जो 3 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
32	1024	जो 4 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
99	9801	जो 4 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।

अत: वर्गमूल में अंकों की संख्या के बारे में हम क्या कह सकते हैं यदि एक पूर्ण वर्ग संख्या 3 अंकों या 4 अंकों की हो?

हम कह सकते हैं कि यदि एक पूर्ण वर्ग संख्या 3 अंकों की या 4 अंकों की है तब इसका वर्गमूल 2 अंकों का होगा। क्या आप हमें 5 या 6 अंकों वाली संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं?

सबसे छोटी 3 अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या 100 है जो कि 10 का वर्ग है और 3 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या 961 है जो कि 31 का वर्ग है। सबसे छोटी 4 अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या 1024 है जो 32 का वर्ग है और सबसे बड़ी 4 अंकों की संख्या 9801 है जो 99 का वर्ग है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या हम कह सकते हैं कि एक पूर्ण वर्ग संख्या में यदि n अंक है तो उसके वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ अंक होंगे यदि n सम है या $\frac{(n=1)}{2}$ होंगे यदि n विषम हैं?

निम्न विधि किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने में उपयोगी होगी।

- 529 का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरणों पर विचार कीजिए।

  क्या आप इस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?

चरण 1 इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म पर बार लगाइए। यदि अंकों की संख्या विषम है तब बाएँ तरफ़ एक अंक पर बार लगाइए। $\overline{5}\,\overline{29}$ इस प्रकार लिखते हैं।

चरण 2 वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका वर्ग सबसे बाईं तरफ़ के बार के नीचे लिखी संख्या से कम या बराबर हो ($2^2 < 5 < 3^2$)। सबसे बाईं बार के नीचे भाज्य (यहाँ 5) के साथ भाजक और भागफल के रूप में इस संख्या को लीजिए। भाग कीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए (इस स्थिति में 1 है।)

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

चरण 3 अगली बार के नीचे की संख्या को शेषफल के दाएँ लिखिए। (अर्थात् इस स्थिति में 29 है।) अत: अगली भाज्य 129 होगी।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 129 \end{array}$$

चरण 4 भागफल को दुगुना कीजिए और इसे इसके दाएँ में खाली स्थान के साथ लिखिए।

चरण 5 रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाइए जो कि भागफल में नया अंक होगा और नए भाजक को नए भागफल से गुणा करने पर गुणनफल भाज्य से कम या बराबर होगी।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4\_ & 129 \end{array}$$

इस स्थिति में $42 \times 2 = 84$

चूँकि $43 \times 3 = 129$, अत: शेषफल प्राप्त करने के लिए नया अंक 3 चुनते हैं

$$\begin{array}{r|l} & 23 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 43 & 129 \\ & -129 \\ \hline & 0 \end{array}$$

चरण 6 क्योंकि शेषफल 0 है और दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है,

अत: $\sqrt{529} = 23$

- अब $\sqrt{4096}$ को हल कीजिए :

चरण 1 इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म के ऊपर बार लगाइए ($\overline{40}\,\overline{96}$)।

चरण 2 एक सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो सबसे बाईं तरफ़ के बार के नीचे लिखी संख्या से कम या बराबर हो ($6^2 < 40 < 7^2$)। इस संख्या को भाजक और सबसे बाईं तरफ बार के नीचे संख्या को भाज्य के रूप में लीजिए। भाग दीजिए और शेषफल (इस स्थिति में अर्थात् 4) ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & \;\; 496 \end{array}$$

चरण 3 अगली बार के नीचे लिखी संख्या (अर्थात् 96) को शेषफल के दाएँ लिखिए। नया भाज्य 496 होगा।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12\_ & \;\; 496 \end{array}$$

चरण 4 भागफल का दुगुना कीजिए और दाईं तरफ़ के रिक्त स्थान में लिखिए।

चरण 5 रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाइए जो अंक भागफल में नया होगा इस प्रकार नया अंक जब भागफल से गुणा होता है तब गुणनफल भाज्य से छोटा या बराबर होगा। इस स्थिति में हम देखते हैं कि $124 \times 4 = 496$ अत: भागफल में नया अंक 4 है। शेषफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 64 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12\underline{4} & \;\; 496 \\ & \; -496 \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

चरण 6 चूँकि शेषफल शून्य है और कोई बार नहीं है अत: $\sqrt{4096} = 64$ है।

संख्या का अनुमान

पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने के लिए बार का उपयोग करते हैं।

$$\sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23 \qquad \text{और} \qquad \sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$$

इन दोनों संख्याओं 529 और 4096 में बार की संख्या 2 है, और उनके वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है।

क्या आप 14400 के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं? बार लगाने पर हम $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ प्राप्त करते हैं। यद्यपि यहाँ पर बार की संख्या 3 है। अत: वर्गमूल 3 अंक का होगा।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या को गणना के बिना ज्ञात कीजिए।

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

उदाहरण 9 : वर्गमूल ज्ञात कीजिए : (i) 729 (ii) 1296

हल :

(i)
$$\begin{array}{r|l} & \;\; 27 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 47 & \;\; 329 \\ & \;\; 329 \\ \hline & \;\; 0 \end{array}$$

इसलिए $\sqrt{729} = 27$

(ii)
$$\begin{array}{r|l} & \;\; 36 \\ \hline 3 & \overline{12}\,\overline{96} \\ & -9 \\ \hline 66 & \;\; 396 \\ & \;\; 396 \\ \hline & \;\; 0 \end{array}$$

इसलिए $\sqrt{1296} = 36$

उदाहरण 10 : वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 5607 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} & \;\; 74 \\ \hline 7 & \overline{56}\,\overline{07} \\ & -49 \\ \hline 14\underline{4} & \;\; 707 \\ & -576 \\ \hline & \;\; 131 \end{array}$$

हल : आइए, दीर्घ विभाजन विधि से $\sqrt{5607}$ ज्ञात करने का प्रयास करें। हमें 131 शेषफल प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि 74^2,5607 से 131 कम है।

अर्थात् यदि हम किसी संख्या में से उसका शेषफल घटा देते हैं तो हमें एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होती है। अत: वांछित पूर्ण वर्ग संख्या है $5607 - 131 = 5476$ और $\sqrt{5476} = 74$

उदाहरण 11 : चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या बताइए, जो पूर्ण वर्ग हो।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 99 \\ \hline 9 & \overline{99}\,\overline{99} \\ & -81 \\ \hline 189 & \;\;1899 \\ & -1701 \\ \hline & \;\;198 \end{array}$$

हल : चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999 है। हम दीर्घ विभाजन विधि द्वारा $\sqrt{9999}$ ज्ञात करते हैं, जिसका शेषफल 198 है। यह दर्शाता है 99^2, 9999 से 198 कम है।

इसका अर्थ है कि यदि हम किसी संख्या में से शेषफल घटाते हैं तो हमें एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होती है। अत: वांछित पूर्ण वर्ग संख्या है $9999 - 198 = 9801$

और $\sqrt{9801} = 99$

उदाहरण 12 : वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 1300 में जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो। उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 36 \\ \hline 3 & \overline{13}\,\overline{00} \\ & -9 \\ \hline 66 & \;\;400 \\ & -396 \\ \hline & \quad\; 4 \end{array}$$

हल : दीर्घ विभाजन विधि से $\sqrt{1300}$ ज्ञात करते हैं। यहाँ पर शेषफल 4 है। यह दर्शाता है कि $36^2 < 1300$

अगली पूर्ण वर्ग संख्या $37^2 = 1369$

अत: अभीष्ट संख्या $= 37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$

6.6 दशमलव का वर्गमूल

संख्या $\sqrt{17.64}$ पर विचार कीजिए

चरण 1 दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हम पूर्ण संख्या पर सामान्य रूप से बार लगाते हैं। (अर्थात् 17) दशमलव भाग पर भी पहले दशमलव स्थान से प्रारंभ करके बार लगाते हैं और सामान्य रूप से आगे बढ़ते जाते हैं। हम $\overline{17}.\overline{64}$ पाते हैं।

चरण 2 अब इसी तरह से आगे बढ़ते हैं। 17 पर बार सबसे बाईं ओर है और $4^2 < 17 < 5^2$, इस संख्या को भाजक के रूप में लीजिए और सबसे बाईं बार के नीचे की संख्या भाज्य के रूप मे लीजिए (अर्थात् 17)। भाग दीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} & \;\;4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline & \;\;1 \end{array}$$

चरण 3 शेषफल 1 है। अगली बार के नीचे की संख्या अर्थात् 64 शेषफल के दाएँ लिखिए, 164 प्राप्त कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} & \;\;4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 8\_ & \;\;1\,64 \end{array}$$

चरण 4 भाजक को दुगुना कीजिए और दाईं तरफ़ लिखिए। पहले 64 दशमलव भाग में था अत: भागफल में दशमलव रखिए।

$$\begin{array}{r|l} & \;\;4. \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & \;\;164 \end{array}$$

चरण 5 हम जानते हैं कि $82 \times 2 = 164$, अत: नई संख्या 2 है। भाग दीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 4.2 \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & \;\;164 \\ & -164 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

चरण 6 अत: शेषफल 0 है। अब शेष कोई बार नहीं है, अत: $\sqrt{17.64} - 4.2$

उदाहरण 13 : 12.25 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

	3.5
3	$\overline{12}.\overline{25}$
	– 9
65	325
	325
	0

अत: $\sqrt{12.25} = 3.5$

किस तरफ़ बढ़ें

संख्या 176.341 पर ध्यान दीजिए। पूर्ण संख्या और दशमलव संख्या के दोनों भागों पर बार लगाइये। दशमलव भाग में क्या तरीका है, जो पूर्ण भाग से भिन्न है? 176 पर ध्यान दीजिए हम दशमलव के पास के इकाई स्थान से प्रारंभ करके बाईं तरफ़ जाते हैं। प्रथम बार 76 के ऊपर और दूसरा बार 1 के उपर है। .341 के लिए, हम दशमलव से प्रारंभ करके दाईं तरफ़ जाते हैं। पहला बार 34 के उपर और दूसरा बार लगाने के लिए हम 1 के बाद 0 रखते हैं और इस प्रकार $.\overline{34}\,\overline{10}$ बनाते हैं।

	48
4	$\overline{23}\,\overline{04}$
	–16
88	704
	704
	0

उदाहरण 14 : एक वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 2304 m² है। इस वर्गाकार क्षेत्र की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= 2304\ m^2$

इसलिए, वर्गाकार क्षेत्र की भुजा का क्षेत्रफल $= \sqrt{2304}\ m^2$

हम पाएंगे कि $\sqrt{2304} = 48$

इस प्रकार वर्गाकार क्षेत्र की भुजा 48 m है।

उदाहरण 15 : एक विद्यालय में 2401 विद्यार्थी हैं। पी.टी. अध्यापक उन्हें पंक्ति एवं स्तंभ में इस प्रकार खड़ा रखना चाहते हैं कि पंक्तियों की संख्या स्तंभ की संख्या के बराबर हो। पंक्तियों की संख्या ज्ञात करो।

	49
4	$\overline{24}\,\overline{01}$
	16
89	801
	801
	0

हल : माना कि पंक्तियों की संख्या x है।

अत: स्तंभ की संख्या $= x$

इसलिए, विद्यार्थियों की संख्या $= x \times x = x^2$

अत: $x^2 = 2401$ अर्थात् $x = \sqrt{2401} = 49$ होता है।

पंक्तियों की संख्या = 49

6.7 वर्गमूल का अनुमान लगाना

निम्न स्थितियों पर विचार कीजिए :

1. देवेशी के पास कपड़े का एक वर्गाकार टुकड़ा है। जिसका क्षेत्रफल 125 cm² है। वह जानना चाहती है कि क्या वह 15 cm भुजा का रुमाल बना सकती है। यदि यह संभव है तो वह जानना चाहती है कि इस टुकड़े से अधिक से अधिक कितनी लंबाई का रुमाल बनाया जा सकता है।

2. मीना और शोभा ने एक खेल खेला। पहली संख्या देती है एवं दूसरी उसका वर्गमूल देती है। मीना ने पहले प्रारंभ किया। उसने 25 कहा और शोभा ने तुरंत 5 उत्तर दिया तब शोभा ने कहा 81 और मीना ने 9 उत्तर दिया। यह तब तक चलता रहा जब तक मीना की संख्या 250 तक पहुँच गई। अब शोभा उत्तर नहीं दे सकी। तब मीना ने कहा शोभा तुम कम से कम एक ऐसी संख्या बताओ जिसका वर्ग 250 के नज़दीक हो।

इन सभी स्थितियों में वर्गमूल *अनुमान* करने की ज़रूरत होती है।

हम जानते हैं कि $100 < 250 < 400$ और $\sqrt{100} = 10$ तथा $\sqrt{400} = 20$

अत: $10 < \sqrt{250} < 20$

लेकिन फिर भी हम वर्ग संख्या के करीब नहीं हैं।

हम जानते हैं कि $15^2 = 225$ और $16^2 = 256$

अत: $15 < \sqrt{250} < 16$ और 250, 225 की अपेक्षा 256 के बहुत पास है।

अत: $\sqrt{250}$ लगभग 16 है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के निकटतम पूर्ण संख्याओं का अनुमान लगाइए :

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

प्रश्नावली 6.4

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल, भाग विधि से ज्ञात कीजिए :

(i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529
(v) 3249 (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921
(ix) 576 (x) 1024 (xi) 3136 (xii) 900

2. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के वर्गमूल ज्ञात कीजिए : (बिना गणना के)

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225
(v) 390625

3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25
(v) 31.36

4. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में न्यूनतम संख्या क्या घटाई जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए :

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825
(v) 4000

5. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में कम से कम कितना जोड़ा जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए :

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825
(v) 6412

6. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 441 m^2 है।

7. किसी समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle B = 90°$

(a) यदि $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, है तो AC ज्ञात कीजिए।

(b) यदि $AC = 13$ cm, $BC = 5$ cm, है तो AB ज्ञात कीजिए।

8. एक माली के पास 1000 पौधे हैं। इन पौधों को वह इस प्रकार लगाना चाहता है कि पंक्तियों की संख्या और कॉलम की संख्या समान रहे। इसके लिए कम से कम पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसकी उसे आवश्यकता हो।

9. एक विद्यालय में 500 विद्यार्थी हैं। पी.टी. के अभ्यास के लिए इन्हें इस तरह से खड़ा किया गया कि पंक्तियों की संख्या कॉलम की संख्या के समान रहे। इस व्यवस्था को बनाने में कितने विद्यार्थियों को बाहर जाना होगा?

हमने क्या चर्चा की?

1. यदि एक प्राकृत संख्या m को n^2 के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ n भी एक प्राकृत संख्या है, तब m एक **वर्ग संख्या** है।

2. सभी वर्ग संख्याओं के अंत में इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होता है।

3. वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम होती है।

4. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।

5. एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं।

धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{\ }$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

उदाहरणार्थ, $3^2 = 9$, $\sqrt{9} - 3$ होता है।

अध्याय

7

घन और घनमूल

7.1 भूमिका

यह कहानी भारत की महान गणितीय प्रतिभावान विभूतियों में से एक एस. रामानुजन के बारे में है। एक बार एक अन्य प्रसिद्ध गणितज्ञ प्रोफ़ेसर जी. एच. हार्डी उनसे मिलने एक टैक्सी में आए जिसका नंबर 1729 था। रामानुजन से बात करते समय, हार्डी ने इस संख्या को 'एक नीरस' (dull) संख्या बताया। रामानुजन ने तुरंत बताया कि 1729 वास्तव में एक रोचक संख्या थी। उन्होंने कहा कि यह ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों (cubes) के योग के रूप में दो भिन्न प्रकारों से व्यक्त किया जा सकता है:

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

तब से इस संख्या 1729 को हार्डी–रामानुजन संख्या (Hardy - Ramanujan Number) कहा जाने लगा, यद्यपि 1729 की यह विशेषता रामानुजन से लगभग 300 वर्ष पूर्व भी ज्ञात थी।

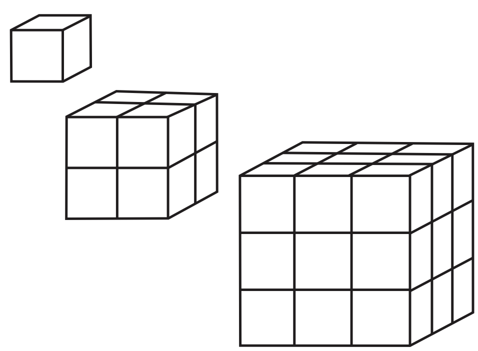
हार्डी–रामानुजन संख्या

1729 सबसे छोटी हार्डी–रामानुजन संख्या है। इस प्रकार की अनेक संख्याएँ हैं : उनमें से कुछ हैं 4104 (2, 16; 9, 15), 13832 (18, 20; 2, 024)। कोष्ठकों में दी हुई संख्याएँ लेकर इसकी जाँच कीजिए।

रामानुजन को इसकी जानकारी कैसे थी? वह संख्याओं से प्यार करते थे। अपने संपूर्ण जीवन में, वे संख्याओं के साथ प्रयोग करते रहे। संभवत: उन्होंने वे संख्याएँ ज्ञात की होंगी जिन्हें दो वर्गों के योग और साथ ही दो घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता था।

घनों के अनेक दूसरे रोचक प्रतिरूप (patterns) हैं। आइए, हम घनों, घनमूलों (cube roots) तथा इनसे संबंधित अनेक रोचक तथ्यों के बारे में सीखें।

वे आकृतियाँ जिनकी 3 विमाएँ (dimensions) होती हैं, ठोस आकृतियाँ कहलाती हैं।



7.2 घन

आप जानते हैं कि शब्द 'घन' का प्रयोग ज्यामिति में किया जाता है। घन एक ऐसी ठोस आकृति है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। 1 cm भुजा वाले कितने घनों से 2 cm भुजा वाला एक घन बनेगा? 1 cm भुजा वाले कितने घनों से 3 cm भुजा वाला एक घन बनेगा?

संख्याओं 1, 8, 27, ... पर विचार कीजिए, ये **पूर्ण घन (perfect cubes) या घन संख्याएँ (cube numbers)** कहलाती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनको ये नाम क्यों दिए गए हैं? इनमें से प्रत्येक संख्या तब प्राप्त होती है, जब एक संख्या को स्वयं उसी से तीन बार गुणा किया जाता है। हम देखते हैं कि $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ है।

क्योंकि $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ है, इसलिए 125 एक घन संख्या है। क्या 9 एक घन संख्या है? नहीं, क्योंकि $9 = 3 \times 3$ है और ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं है जिसे स्वयं से तीन बार गुणा करने पर 9 प्राप्त हो। हम जानते हैं कि $2 \times 2 \times 2 = 8$ और $3 \times 3 \times 3 = 27$ है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि 9 एक पूर्ण घन नहीं है। नीचे 1 से 10 तक की संख्याओं के घन दिए गए हैं:

सारणी 1

संख्या	घन
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ ____
6	$6^3 =$ ____
7	$7^3 =$ ____
8	$8^3 =$ ____
9	$9^3 =$ ____
10	$10^3 =$ ____

संख्याएँ 729, 1000, 1728 भी पूर्ण घन हैं।

पूर्ण कीजिए।

यहाँ आप देख सकते हैं कि 1 से 1000 तक केवल दस पूर्ण घन हैं। (इसकी जाँच कीजिए) 1 से 100 तक कितने पूर्ण घन हैं? सम संख्याओं के घनों को देखिए। क्या ये सभी सम हैं? आप विषम संख्याओं के घनों के बारे में क्या कह सकते हैं? अब 11 से 20 तक की संख्याओं के घन नीचे दिए जा रहे हैं:

सारणी 2

संख्या	घन
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

हम सम हैं और हमारे घन भी सम हैं।

हम विषम हैं और हमारे घन भी विषम हैं।

ऐसी कुछ संख्याओं पर विचार कीजिए जिनकी इकाई का अंक 1 है। इनमें से प्रत्येक संख्या का घन ज्ञात कीजिए। उस संख्या के घन के इकाई के अंक के बारे में आप क्या कह सकते हैं, जिसकी इकाई का अंक 1 है?

इसी प्रकार, उन संख्याओं के घनों की इकाई के अंकों के बारे में पता कीजिए, जिनकी इकाई के अंक 2, 3, 4 इत्यादि हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के घन के इकाई का अंक ज्ञात कीजिए :

(i) 3331 (ii) 8888 (iii) 149 (iv) 1005
(v) 1024 (vi) 77 (vii) 5022 (viii) 53

7.2.1 कुछ रोचक प्रतिरूप

1. क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ना

विषम संख्याओं के योगों के निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^3 \\ 3 + 5 &= 8 = 2^3 \\ 7 + 9 + 11 &= 27 = 3^3 \\ 13 + 15 + 17 + 19 &= 64 = 4^3 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125 = 5^3 \end{aligned}$$

क्या यह रोचक नहीं है? योग 10^3 प्राप्त करने के लिए कितनी क्रमागत विषम संख्याओं की आवश्यकता होगी?

प्रयास कीजिए

उपरोक्त प्रतिरूप का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित संख्याओं को विषम संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

उपरोक्त प्रतिरूप का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. घन और उनके अभाज्य गुणनखंड

कुछ संख्याओं और उनके घनों के निम्नलिखित अभाज्य गुणनखंडनों पर विचार कीजिए :

एक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन	उसके घन का अभाज्य गुणनखंडन
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

स्वयं के घन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन बार आता है।

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ध्यान दीजिए कि एक संख्या का प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड उस संख्या के घन के अभाज्य गुणनखंडन् में तीन बार आता है।

यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक गुणनखंड तीन बार आता है, तो क्या वह संख्या एक पूर्ण घन होती है? इसके बारे में सोचिए! क्या 216 एक पूर्ण घन है?

क्या आपको याद है कि $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ होता है?

अभाज्य गुणनखंड द्वारा, $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

प्रत्येक गुणनखंड तीन बार आता है। $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$ जो एक पूर्ण घन है।

क्या 729 एक पूर्ण घन है? $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

गुणनखंडों के तीन-तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।

हाँ, 729 एक पूर्ण घन है।

आइए, अब 500 के लिए इसकी जाँच करें।

500 का अभाज्य गुणनखंडन है : $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

इसलिए 500 एक पूर्ण घन नहीं है।

इस गुणनफल में तीन बार 5 है, परंतु केवल दो 2 बार है।

उदाहरण 1 : क्या 243 एक पूर्ण घन है?

हल : $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

यहाँ 3 का एक त्रिक बनाने के बाद 3×3 शेष रहता है। अत:, 243 एक पूर्ण घन नहीं है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं?

(i) 400 (ii) 3375
(iii) 8000 (iv) 15625
(v) 9000 (vi) 6859
(vii) 2025 (viii) 10648

7.2.2 सबसे छोटा गुणज जो पूर्ण घन है

राज ने प्लास्टिसिन (plasticine) का एक घनाभ (cuboid) बनाया। इस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 15 cm, 30 cm और 15 cm है।

अनु उससे पूछती है कि एक (पूर्ण) घन बनाने के लिए उसे ऐसे कितने घनाभों की आवश्यकता होगी? क्या आप बता सकते हैं?

राज कहता है,

घनाभ का आयतन $= 15 \times 30 \times 15$

$= 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

क्योंकि उपरोक्त अभाज्य गुणनखंडन में केवल एक बार 2 है, इसलिए हमें इसे पूर्ण घन बनाने के लिए $2 \times 2 = 4$ की आवश्यकता होगी। अत: हमें एक घन बनाने के लिए ऐसे चार घनाभों की आवश्यकता होगी।

उदाहरण 2 : क्या 392 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो ऐसी सबसे छोटी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 392 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल : $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

अभाज्य गुणनखंड 7 तीन के समूह में नहीं आ रहा है। अत: 392 एक पूर्ण घन नहीं है। इसे पूर्ण घन बनाने के लिए, एक और 7 की आवश्यकता है। इस स्थिति में,

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$, जो एक पूर्ण घन है।

अतः वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या 7 है, जिसे 392 से गुणा करने पर एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाएगा।

उदाहरण 3 : क्या 53240 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो 53240 को किस सबसे छोटी प्राकृत संख्या से भाग दिया जाए कि भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो?

हल : $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड में 5 तीन के समूह में नहीं आ रहा है। अतः 53240 एक पूर्ण घन नहीं है।

उपरोक्त गुणनखंडन में 5 केवल एक बार आया है। यदि हम दी हुई संख्या को 5 से भाग दें, तो भागफल के अभाज्य गुणनखंडन में 5 नहीं आएगा।

इस प्रकार, $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

अतः वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या 5 है जिससे 53240 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त होगा।

उस स्थिति में, पूर्ण घन 10648 होगा।

उदाहरण 4 : क्या 1188 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो किस सबसे छोटी प्राकृत संख्या से 1188 को भाग दिया जाए कि भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए?

हल : $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

अभाज्य गुणनखंड 2 और 11 तीन-तीन के समूहों में नहीं आ रहे हैं। अतः 1188 एक पूर्ण घन नहीं है। 1188 के उपरोक्त गुणनखंडन में, अभाज्य 2 केवल दो बार आ रहा है और अभाज्य 11 एक बार। अतः यदि हम 1188 को $2 \times 2 \times 11 = 44$ से भाग दें, तो भागफल के अभाज्य गुणनखंडन में 2 और 11 नहीं आएँगे।

अतः वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या 44 है, जिससे 1188 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त होगा। साथ ही, परिणामी पूर्ण घन $= 1188 \div 44 = 27\ (=3^3)$

उदाहरण 5 : क्या 68600 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 68,600 को गुणा करने पर एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए?

हल : हमें प्राप्त है: $68,600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

इस गुणनखंडन में, 5 की कोई त्रिक (triplet) नहीं है। अतः 68,600 एक पूर्ण घन नहीं है। इसे पूर्ण घन बनाने के लिए, हम इसे 5 से गुणा करते हैं।

इस प्रकार, $68,600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 3,43,000$ जो एक पूर्ण घन है।

ध्यान दीजिए कि 343 एक पूर्ण घन है। उदाहरण 5 से, हम जानते हैं कि 3,43,000 भी एक पूर्ण घन है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं : (i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10,000 (ix) 27000000 (x) 1000 इन पूर्ण घनों में आप क्या प्रतिरूप देखते हैं?

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ पूर्ण घन नहीं हैं?
   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 46656
2. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को गुणा करने पर पूर्ण घन प्राप्त हो जाए :
   (i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100
3. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए :
   (i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192 (v) 704
4. परीक्षित प्लास्टिसिन का एक घनाभ बनाता है, जिसकी भुजाएँ 5 cm, 2 cm और 5 cm हैं। एक घन बनाने के लिए ऐसे कितने घनाभों की आवश्यकता होगी?

7.3 घनमूल

यदि किसी घन का आयतन 125 cm^3 है, तो उसकी भुजा की लंबाई क्या होगी? इस घन की भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसी संख्या ज्ञात करनी होगी, जिसका घन 125 हो।

जैसा कि आप जानते हैं कि 'वर्गमूल' ज्ञात करना 'वर्ग करने की संक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है।' इसी प्रकार 'घनमूल' (cuberoot) ज्ञात करने की संक्रिया घन (ज्ञात) करने की संक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है।

हम जानते हैं कि $2^3 = 8$ है। इसलिए हम कहते हैं कि 8 का घनमूल (cuberoot) 2 है।
हम इसे $\sqrt[3]{8} = 2$ लिखते हैं। संकेत '$\sqrt[3]{\ }$' घनमूल को व्यक्त करता है।
निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

कथन	निष्कर्ष
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$

कथन	निष्कर्ष
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

7.3.1 अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा घनमूल

संख्या 3375 पर विचार कीजिए। हम इसका घनमूल अभाज्य गुणनखंडन द्वारा ज्ञात करेंगे :

$$3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$$

अत: 3375 का घनमूल $= \sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

इसी प्रकार, $\sqrt[3]{74088}$ ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है :

$$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$$

अतः $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

उदाहरण 6 : 8,000 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 8,000 का अभाज्य गुणनखंड $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ है।

अतः $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

उदाहरण 7 : अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 13824 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $13824 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

अतः $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

बताइए कि सत्य है या असत्य : किसी पूर्णांक m के लिए, $m^2 < m^3$ होता है। क्यों?

7.3.2 किसी घन संख्या का घनमूल

यदि आपको यह ज्ञात है कि दी हुई संख्या एक घन संख्या है, तो उसका घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधि का प्रयोग किया जा सकता है :

चरण 1 कोई घन संख्या, मान लीजिए, 857375 लीजिए तथा उसके सबसे दाईं ओर के अंक से प्रारंभ करते हुए, तीन-तीन अंकों के समूह बनाइए

$$\underset{\text{दूसरा समूह}}{\underset{\downarrow}{\underline{857}}} \qquad \underset{\text{पहला समूह}}{\underset{\downarrow}{\underline{375}}}$$

हम किसी दी हुई घन संख्या का घनमूल एक चरणबद्ध प्रक्रिया द्वारा आकलित कर सकते हैं। यहाँ हमें तीन अंकों के दो समूह 375 और 857 प्राप्त हुए हैं।

चरण 2 पहला समूह '375' आपको वांछित घनमूल के इकाई का अंक देगा।

संख्या 375 का अंतिम (इकाई का) अंक 5 है। हम जानते हैं कि 5 किसी संख्या के इकाई के स्थान पर तब आता है जब उसके घनमूल के इकाई का अंक 5 होता है।

इस प्रकार हमें घनमूल के इकाई का अंक 5 प्राप्त होता है।

चरण 3 अब दूसरे समूह 857 को लीजिए।

हम जानते हैं कि $9^3 = 729$ तथा $10^3 = 1,000$ साथ ही, $729 < 857 < 1,000$

हम छोटी संख्या 729 के इकाई के अंक को वांछित घनमूल के दहाई के अंक के रूप में लेते हैं।

अतः $\sqrt[3]{857375} - 95$ हमें प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 : 17,576 का घनमूल आकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई संख्या 17,576 है।

चरण 1 17,576 के सबसे दाईं ओर के अंक से प्रारंभ करते हुए, तीन-तीन अंकों के समूह बनाइए। ये समूह <u>17</u> और <u>576</u> हैं। इस स्थिति में एक समूह 576 है जिसमें तीन अंक हैं और दूसरा समूह 17 है जिसमें केवल दो अंक हैं।

चरण 2 576 को लीजिए। इसकी इकाई का अंक 6 है। हम वांछित घनमूल की इकाई का अंक 6 लेते हैं।

चरण 3 दूसरे समूह 17 को लीजिए।

2 का घन 8 है और 3 का घन 27 है। संख्या 17 संख्याओं 8 और 27 के बीच में स्थित है। अब 2 और 3 में से छोटी संख्या 2 है।

2 में इकाई का अंक स्वयं 2 है। हम 2 को वांछित घनमूल की दहाई का अंक लेते हैं। इस प्रकार, $\sqrt[3]{17576} - 26$ (इसकी जाँच कर लीजिए)।

प्रश्नावली 7.2

1. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए :
   (i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000
   (v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656
   (ix) 175616 (x) 91125
2. बताइए सत्य है या असत्य :
   (i) किसी भी विषम संख्या का घन सम होता है।
   (ii) एक पूर्ण घन दो शून्यों पर समाप्त नहीं होता है।
   (iii) यदि किसी संख्या का वर्ग 5 पर समाप्त होता है, तो उसका घन 25 पर समाप्त होता है।
   (iv) ऐसा कोई पूर्ण घन नहीं है जो 8 पर समाप्त होता है।
   (v) दो अंकों की संख्या का घन तीन अंकों वाली संख्या हो सकती है।
   (vi) दो अंकों की संख्या के घन में सात या अधिक अंक हो सकते हैं।
   (vii) एक अंक वाली संख्या का घन एक अंक वाली संख्या हो सकती है।
3. आपको यह बताया जाता है कि 1331 एक पूर्ण घन है। क्या बिना गुणनखंड किए आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि इसका घनमूल क्या है? इसी प्रकार 4913, 12167 और 32768 के घनमूलों के अनुमान लगाइए।

हमने क्या चर्चा की?

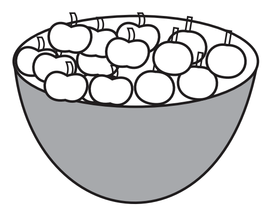
1. संख्याएँ, जैसे कि 1729, 4104, 13832 हार्डी-रामानुजन संख्याएँ कहलाती हैं। इन्हें दो घनों के योग के रूप में दो भिन्न प्रकारों से व्यक्त किया जा सकता है।
2. एक संख्या को स्वयं से ही तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या **घन संख्या** कहलाती है। उदाहरणार्थ 1, 8, 27 इत्यादि।
3. यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन बार आता है, तो वह संख्या एक पूर्ण घन होती है।
4. संकेत '$\sqrt[3]{\ }$' घनमूल को व्यक्त करता है। उदाहरणार्थ, $\sqrt[3]{27} - 3$ है।

अध्याय

8

राशियों की तुलना

8.1 अनुपात एवं प्रतिशत का स्मरण



हम जानते हैं कि अनुपात का अर्थ है दो मात्राओं की तुलना करना।

एक टोकरी में दो प्रकार के फल हैं, मान लीजिए इनमें 20 सेब और 5 संतरे हैं।

तो, संतरों की संख्या का सेबों की संख्या से अनुपात $= 5 : 20$ है।

यह तुलना भिन्नों की सहायता से $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ के रूप में भी की जा सकती है।

संतरों की संख्या सेबों की संख्या का $\frac{1}{4}$ है। अनुपात के रूप में यह $1 : 4$ है और इसे '4 की तुलना में 1 है' पढ़ा जाता है। अथवा

संतरों की तुलना में सेबों की संख्या $= \frac{20}{5} - \frac{4}{1}$ है, जिसका अर्थ है कि संतरों की तुलना में सेबों की संख्या 4 गुना है। यह तुलना प्रतिशत के उपयोग से भी की जा सकती है।

25 फलों में 5 संतरे हैं।
इसलिए संतरों का प्रतिशत

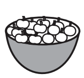
$$\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\% \text{ है।}$$

(हर को 100 बनाया गया है)

अथवा

ऐकिक विधि से :
25 फलों में संतरों की संख्या 5 है,
इसलिए, 100 फलों में संतरों की संख्या

$$= \frac{5}{25} \times 100 = 20 \text{ है।}$$

क्योंकि  में केवल सेब और संतरे हैं,

इसलिए, सेबों का प्रतिशत + संतरों का प्रतिशत $= 100$

अथवा सेबों का प्रतिशत $+ 20 = 100$

अथवा सेबों का प्रतिशत $= 100 - 20 = 80$

अत: टोकरी में 20% संतरे और 80% सेब हैं।

उदाहरण 1 : किसी विद्यालय में कक्षा VII के लिए पिकनिक की योजना बनाई जा रही है। विद्यार्थियों की कुल संख्या का 60% लड़कियाँ हैं और इनकी संख्या 18 है। पिकनिक का स्थान विद्यालय से 55 km दूर है और परिवहन कंपनी 12 रु प्रति km की दर से किराया लेती है। अल्पाहार (जलपान) का कुल खर्च 4280 रु होगा।

क्या आप बता सकते हैं :

1. कक्षा में लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात?
2. यदि दो अध्यापक भी कक्षा के साथ पिकनिक पर जा रहे हैं तो प्रति व्यक्ति खर्च?
3. यदि उनका पहला स्टॉप विद्यालय से 22 km की दूरी पर है तो वह कुल 55 km की दूरी का कितने प्रतिशत है? कितने प्रतिशत दूरी तय करना शेष है?

हल :

1. लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात ज्ञात करने के लिए, आशिमा और जॉन ने निम्नलिखित विधियाँ प्रयोग कीं। उन्हें लड़कों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या जानने की आवश्यकता थी।

आशिमा ने निम्नलिखित विधि का उपयोग किया :

मान लीजिए कुल विद्यार्थियों की संख्या x है, जिसमें 60% लड़कियाँ हैं।

इसलिए x का 60% = 18

या $\frac{60}{100} - x = 18$

अर्थात् $x = \frac{18 - 100}{60} = 30$

विद्यार्थियों की कुल संख्या = 30

जॉन ने ऐकिक विधि का उपयोग किया :

100 विद्यार्थियों में से 60 लड़कियाँ हैं।

इसलिए $\frac{100}{60}$ विद्यार्थियों में एक लड़की है।

इसलिए कितने विद्यार्थियों में 18 लड़कियाँ होंगी?

विद्यार्थियों की संख्या $= \frac{100}{60} - 18 = 30$

इसलिए, लड़कों की संख्या $= 30 - 18 = 12$ है। अतः लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से 18 : 12 अथवा $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ का अनुपात है। $\frac{3}{2}$ को 3 : 2 के रूप में लिखा जाता है और 2 की तुलना में 3 पढ़ा जाता है।

2. प्रति व्यक्ति खर्च ज्ञात करने के लिए :

यातायात खर्च = दोनों तरफ़ की दूरी × दर

= (55 × 2) × 12 रु

= 110 × 12 = 1320 रु

कुल खर्च = अल्पाहार खर्च + यातायात खर्च

= 4280 रु + 1320 रु

= 5600 रु

कुल व्यक्ति = 18 लड़कियाँ + 12 लड़के + 2 अध्यापक

= 32 व्यक्ति

आशिमा और जॉन ने प्रति व्यक्ति खर्च ज्ञात करने के लिए ऐकिक विधि का उपयोग किया। 32 व्यक्तियों के लिए खर्च किए जाने वाली राशि 5600 रु होगी।

इसलिए 1 व्यक्ति के लिए खर्च की जाने वाली राशि $= \frac{5600}{32}$ रु = 175 रु

3. प्रथम स्टॉप की दूरी = 22 km

दूरी का प्रतिशत ज्ञात करने के लिए :

आशिमा ने यह विधि उपयोग की :

$$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = 40\%$$

(वह अनुपात को $\frac{100}{100} = 1$ से गुणा कर रही है और प्रतिशत में बदल रही है)

जॉन ने ऐकिक विधि उपयोग की :

55 km में से 22 km दूरी तय की जा चुकी है।

1 km में से $\frac{22}{55}$ km दूरी तय की गई है।

100 km में से $\frac{22}{55} \times 100$ km दूरी तय की गई है। अर्थात् 40% दूरी तय की गई है।

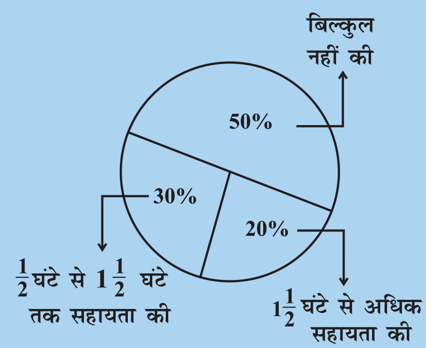
दोनों का उत्तर एक जैसा पाया गया और उनका उत्तर इस प्रकार है :

रुकने वाले स्थान की विद्यालय से दूरी कुल तय की जाने वाली दूरी का 40% था।

इसलिए, तय कीए जाने वाली शेष दूरी का प्रतिशत = 100% – 40% = 60%

प्रयास कीजिए

एक प्राथमिक विद्यालय में अभिभावकों से पूछा गया कि वे अपने बच्चों के गृहकार्य में सहायता करने के लिए प्रतिदिन कितने घंटे व्यतीत करते हैं। 90 अभिभावकों ने $\frac{1}{2}$ घंटे से $1\frac{1}{2}$ घंटे तक सहायता की। जितने समय के लिए अभिभावकों ने अपने बच्चों की सहायता करना बताया उसके अनुसार अभिभावकों का वितरण संलग्न आकृति में दिखाया गया है जो इस प्रकार है : 20% ने प्रतिदिन $1\frac{1}{2}$ घंटे से अधिक सहायता की, 30% ने $\frac{1}{2}$ घंटे से $1\frac{1}{2}$ घंटे तक सहायता की, 50% ने बिल्कुल सहायता नहीं की।



इसके आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) कितने अभिभावकों का सर्वे किया गया?

(ii) कितने अभिभावकों ने कहा कि उन्होंने सहायता नहीं की?

(iii) कितने अभिभावकों ने कहा कि उन्होंने $1\frac{1}{2}$ घंटे से अधिक सहायता की?

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित का अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) एक साइकिल की 15 km प्रतिघंटे की गति का एक स्कूटर की 30 km प्रतिघंटे की गति से।
   (b) 5 m का 10 km से (c) 50 पैसे का 5 रु से
2. निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए : (a) 3 : 4 (b) 2 : 3
3. 25 विद्यार्थियों में से 72% विद्यार्थी गणित में अच्छे हैं। कितने विद्यार्थी गणित में अच्छे नहीं हैं?
4. एक फुटबॉल टीम ने कुल जितने मैच खेले उनमें से 10 में जीत हासिल की। यदि उनकी जीत का प्रतिशत 40 था तो उस टीम ने कुल कितने मैच खेले?

5. यदि चमेली के पास अपने धन का 75% खर्च करने के बाद 600 रुपये बचे तो ज्ञात कीजिए कि उसके पास शुरू में कितने रुपये थे?
6. यदि किसी शहर में 60% व्यक्ति क्रिकेट पसंद करते हैं, 30% फुटबाल पसंद करते हैं और शेष अन्य खेल पसंद करते हैं, तो ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत व्यक्ति अन्य खेल पसंद करते हैं? यदि कुल व्यक्ति 50 लाख हैं तो प्रत्येक प्रकार के खेल को पसंद करने वाले व्यक्तियों की यथार्थ संख्या ज्ञात कीजिए।

8.2 वृद्धि प्रतिशत अथवा ह्रास (कमी) प्रतिशत ज्ञात करना

हमें अपने दैनिक जीवन में प्राय: निम्नलिखित प्रकार की सूचनाएँ मिलती हैं :

(i) अंकित मूल्य पर 25% की कमी (ii) पेट्रोल के मूल्य में 10% वृद्धि

आइए, कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करते हैं :

उदाहरण 2 : पिछले वर्ष एक स्कूटर का मूल्य 34,000 रु था। इस वर्ष इसके मूल्य में 20% की वृद्धि हो गई। स्कूटर का नया मूल्य क्या है?

हल :

अनिता ने कहा कि वह सर्वप्रथम मूल्य में वृद्धि ज्ञात करेगी जो कि 34,000 रु का 20% है और तब स्कूटर का नया मूल्य ज्ञात करेगी।

34,000 रु का 20% = $\frac{20}{100} \times 34000$ रु

= 6800 रु

नया मूल्य = पुराना मूल्य + वृद्धि

= 34,000 रु + 6,800 रु = 40,800 रु

अथवा

सुनीता ने ऐकिक विधि का उपयोग किया। 20% वृद्धि का अर्थ है कि 100 रु, वृद्धि के पश्चात् 120 रु हो जाते हैं। इसलिए 34000 रु बढ़कर कितना हो जाएँगे?

वृद्धि के पश्चात् मूल्य = $\frac{120}{100} \times 34000$ रु

= 40,800 रु

इसी प्रकार मूल्य में ह्रास प्रतिशत से यथार्थ ह्रास ज्ञात कर और इसे वास्तविक मूल्य में से घटाने पर नया मूल्य होगा।

मान लीजिए बिक्री में वृद्धि करने के लिए स्कूटर का मूल्य 5% घटा दिया गया, तब आइए स्कूटर का मूल्य ज्ञात करते हैं।

स्कूटर का मूल्य = 34000 रु

मूल्य में कमी = 34000 रु का 5% = $\frac{5}{100} - 34000$ रु = 1700 रु

नया मूल्य = पुराना मूल्य – मूल्य में ह्रास

= 34000 रु – 1700 रु = 32300 रु

हम इसे इस अध्याय के अगले अनुभाग में भी उपयोग करेंगे।

8.3 बट्टा ज्ञात करना

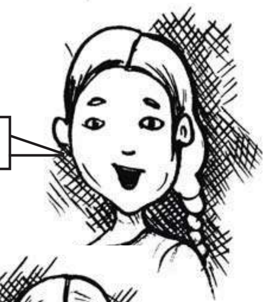
किसी वस्तु के अंकित मूल्य में दी जाने वाली छूट को **बट्टा** कहते हैं। यह सामान्यत: ग्राहकों को खरीदारी के लिए आकर्षित करने के लिए अथवा सामान की बिक्री में

वृद्धि करने के लिए दिया जाता है। आप अंकित मूल्य में से विक्रय मूल्य को घटाकर बट्टा ज्ञात कर सकते हैं। इसलिए, बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

उदाहरण 3 : 840 रु अंकित मूल्य वाली एक वस्तु 714 रु में बेची जाती है। बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना है?

हल : बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

= 840 रु – 714 रु = 126 रु



क्योंकि बट्टा अंकित मूल्य पर है इसलिए हमें अंकित मूल्य को आधार मानना पड़ेगा।

840 रु अंकित मूल्य पर 126 रु बट्टा है,

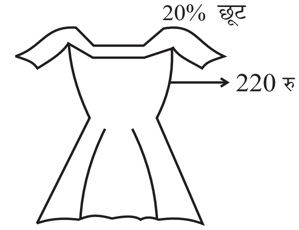
तो 100 रु अंकित मूल्य पर कितना बट्टा होगा?

बट्टा $= \frac{126}{840} \times 100 = 15\%$

यदि बट्टा प्रतिशत दिया हुआ है तो आप बट्टा भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 4 : एक फ्रॉक का सूची मूल्य 220 रु है। सेल में 20% बट्टे की घोषणा की जाती है। इस फ्राक पर बट्टे की राशि क्या है और इसका विक्रय मूल्य क्या है?

हल : अंकित मूल्य और सूची मूल्य समान होते हैं।



20% बट्टे का अर्थ है कि 100 रु अंकित मूल्य पर 20 रु बट्टा है।

ऐकिक विधि से 1 रु पर $\frac{20}{100}$ रु का बट्टा होगा।

220 रु पर बट्टा $= \frac{20}{100} \times 220$ रु $= 44$ रु

विक्रय मूल्य = (220 रु – 44 रु) अथवा 176 रु

रेहाना ने इस समस्या को इस प्रकार हल किया :

20% बट्टे का अर्थ है कि 100 रु अंकित मूल्य पर 20 रु का बट्टा है। अत: विक्रय मूल्य 80 रु है। ऐकिक विधि के उपयोग से,

जब अंकित मूल्य 100 रु है तो विक्रय मूल्य = 80 रु

जब अंकित मूल्य 1 रु है तो विक्रय मूल्य $= \frac{80}{100}$ रु

यद्यपि बट्टा ज्ञात किए बिना भी मैं सीधे विक्रय मूल्य ज्ञात कर सकती हूँ।

अत: जब अंकित मूल्य 220 रु है तो विक्रय मूल्य $= \frac{80}{100} \times 220$ रु $= 176$ रु

प्रयास कीजिए

1. एक दुकान 20% बट्टा देती है। निम्नलिखित में से प्रत्येक का विक्रय मूल्य क्या होगा?
   (a) 120 रु अंकित मूल्य वाली एक पोशाक।
   (b) 750 रु अंकित मूल्य वाले एक जोड़ी जूते।
   (c) 250 रु अंकित मूल्य वाला एक थैला।

2. 15000 रु अंकित मूल्य वाली एक मेज 14,400 रु में उपलब्ध है। बट्टा और बट्टा प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
3. एक अलमारी 5% बट्टे पर 5225 रु में बेची जाती है। अलमारी का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

8.3.1 प्रतिशत में आकलन

एक दुकान पर आपका बिल 577.80 रु है और दुकानदार 15% बट्टा भी प्रदान करता है। आप भुगतान की जाने वाली राशि का आकलन कैसे करेंगे?

(i) बिल को 577.80 रु की निकटतम दहाई में पूर्णांकित कीजिए अर्थात् 580 रु।

(ii) इसका 10% ज्ञात कीजिए, अर्थात् $\frac{10}{100} \times 580$ रु $= 58$ रु

(iii) इसका आधा लीजिए, अर्थात्, $\frac{1}{2} \times 58 = 29$ रु

(iv) (ii) और (iii) की राशियों को जोड़िए। जोड़ने पर 87 रु प्राप्त होते हैं।
इसलिए आप अपने बिल की राशि को 87 रु अथवा 85 रु कम कर सकते हैं। इस प्रकार बिल की राशि का सन्निकट मान 495 रु होगा।

1. इसी बिल राशि का 20% बट्टे से आकलन करने का प्रयास कीजिए।
2. 375 रु का 15% ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

8.4 खरीद और बिक्री से संबंधित मूल्य (लाभ एवं हानि)

विद्यालय मेले के लिए मैं एक भाग्यशाली डिप (कूपन) स्टॉल लगाने जा रही हूँ। एक भाग्यशाली डिप के लिए मैं 10 रु वसूलूँगी लेकिन मैं देने के लिए ऐसी वस्तुएँ खरीदूँगी जिनकी कीमत 5 रु है।

इस प्रकार आप 100% लाभ कमा रही हैं।

मैं उस उपहार को लपेटने के लिए 3 रु कागज़ और टेप पर खर्च करूँगी। इस प्रकार मेरा खर्च 8 रु है। जिस प्रकार मुझे 2 रु का लाभ मिलता है जो कि $\frac{2}{8} \times 100 - 25\%$ है।

कभी-कभी जब एक वस्तु खरीदी जाती है तो खरीदते समय अथवा बेचने से पहले कुछ अतिरिक्त धन भी खर्च किया जाता है। यह खर्च क्रय मूल्य में जोड़ा जाता है।
ये खर्चे कभी-कभी **ऊपरी खर्चे** कहलाते हैं। इनमें ऐसे खर्चे शामिल हो सकते हैं जैसे कि मरम्मत पर, श्रमिकों पर, परिवहन पर खर्च की गई राशि इत्यादि।

8.4.1 क्रय मूल्य/विक्रय मूल्य, लाभ प्रतिशत/हानि प्रतिशत ज्ञात करना

उदाहरण 5 : सोहन ने एक पुराना रेफ्रिजरेटर 2500 रु में खरीदा। उसने 500 रु उसकी मरम्मत पर खर्च किए और 3300 रु में बेच दिया। उसका लाभ अथवा हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : क्रय मूल्य (CP) = 2500 रु + 500 रु = 3000 रु

(क्रय मूल्य ज्ञात करने के लिए ऊपरी खर्चे जोड़े जाते हैं)

विक्रय मूल्य (SP) = 3300 रु

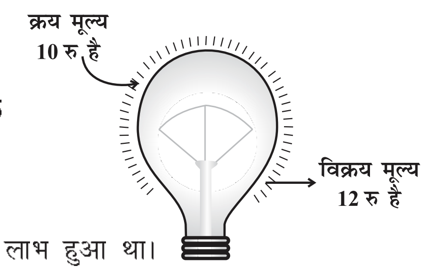
जैसा कि विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य, उसे 3300 रु – 3000 रु = 300 रु का लाभ हुआ। इस प्रकार 3000 रु पर उसे 300 रु का लाभ हुआ। 100 रु पर उसे कितना लाभ होगा?

100 रु पर लाभ $= \frac{300}{3000} \times 100\% = \frac{30}{3}\% = 10\%$ लाभ प्रतिशत $\boxed{(P\%) = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100}$

प्रयास कीजिए

1. यदि लाभ की दर 5% है तो निम्नलिखित का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए :
   - (a) 700 रु की एक साइकिल जिस पर ऊपरी खर्च 50 रु है।
   - (b) 1150 रु में खरीदा गया एक घास काटने का यंत्र जिस पर 50 रु परिवहन व्यय के रूप में खर्च किए गए हैं।
   - (c) 560 रु में खरीदा गया एक पंखा जिस पर 40 रु मरम्मत के लिए खर्च किए गए हैं।

उदाहरण 6 : एक दुकानदार ने 200 बल्ब 10 रु प्रति बल्ब की दर से खरीदे। उनमें 5 बल्ब खराब थे और उन्हें फेंकना पड़ा। शेष बल्बों को 12 रु प्रति बल्ब की दर से बेचा गया। लाभ अथवा हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।



हल : 200 बल्बों का क्रय मूल्य = 200 × 10 रु = 2000 रु

5 बल्ब खराब थे इसलिए बचे हुए बल्बों की संख्या = 200 – 5 = 195

इनको 12 रु प्रति बल्ब की दर से बेचा गया।

195 बल्बों का विक्रय मूल्य = 195 × 12 रु = 2340 रु

यहाँ 'विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य' (SP > CP) है, इसलिए, स्पष्टत: उसे लाभ हुआ था।

लाभ = 2340 रु – 2000 रु = 340 रु

2000 रु पर 340 रु का लाभ हुआ, तो 100 रु पर कितने रुपये का लाभ होगा?

प्रतिशत लाभ $= \frac{340}{2000} \times 100 = 17\%$

उदाहरण 7 : मीनू ने दो पंखे 1200 रु प्रति पंखे की दर से खरीदे। उसने एक पंखे को 5% हानि से और दूसरे पंखे को 10% लाभ से बेचा। प्रत्येक पंखे का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए। कुल लाभ अथवा हानि भी ज्ञात कीजिए।

हल : प्रत्येक पंखे का क्रय मूल्य = 1200 रु । एक पंखा 5% हानि से बेचा जाता है।

इसका अर्थ यह है कि यदि क्रय मूल्य 100 रु है तो विक्रय मूल्य 95 रु है। इसलिए जब क्रय मूल्य 1200 रु है, तब विक्रय मूल्य $= \frac{95}{100} \times 1200$ रु = 1140 रु।

दूसरा पंखा 10% लाभ से बेचा गया। इसका अर्थ यह है कि यदि क्रय मूल्य 100 रु है तो विक्रय मूल्य 110 रु है।

इसलिए, जब क्रय मूल्य 1200 रु है, तब विक्रय मूल्य $= \frac{110}{100} \times 1200$ रु $= 1320$ रु

कुल मिलाकर लाभ हुआ अथवा हानि?

यह जानने के लिए कि कुल मिलाकर लाभ हुआ अथवा हानि हमें संयुक्त क्रय मूल्य एवं संयुक्त विक्रय मूल्य ज्ञात करने की आवश्यकता है।

कुल क्रय मूल्य $= 1200$ रु $+ 1200$ रु $= 2400$ रु

कुल विक्रय मूल्य $= 1140$ रु $+ 1320$ रु $= 2460$ रु

क्योंकि कुल विक्रय मूल्य $>$ कुल क्रय मूल्य

इसलिए, $(2460 - 2400)$ रु अर्थात् 60 रु का लाभ हुआ।

प्रयास कीजिए

1. एक दुकानदार ने दो टेलीविज़न सेट 10,000 रु प्रति सेट की दर से खरीदे। उसने एक को 10% हानि से और दूसरे को 10% लाभ से बेच दिया। ज्ञात कीजिए कि कुल मिलाकर उसे इस सौदे में लाभ हुआ अथवा हानि।

8.5 बिक्री कर / Value Added Tax (वैट)

अध्यापक ने कक्षा में एक बिल दिखाया जिसमें निम्नलिखित शीर्षक लिखे हुए थे :

बिल संख्या		दिनांक		
मेनू				
क्र. सं.	वस्तु	मात्रा	दर	राशि
		बिल राशि + बिक्री कर (5%)		
	कुल योग			

ST का अर्थ है Sales Tax अर्थात् बिक्री कर। जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें इसका भुगतान करना पड़ता है।

किसी वस्तु की बिक्री पर बिक्री कर सरकार द्वारा वसूला जाता है। यह दुकानदार द्वारा ग्राहक से लिया जाता है और सरकार को दिया जाता है। इसलिए यह हमेशा वस्तु के विक्रय मूल्य पर लगता है और बिल की राशि में जोड़ दिया जाता है। आजकल वस्तु के मूल्य में यह कर **Value Added Tax (VAT)** के नाम से जुड़ता है।

उदाहरण 8 : (बिक्री कर ज्ञात करना) किसी दुकान पर एक जोड़ी रोलर स्केट्स (पहियों पर घूमने वाला जूता) का मूल्य 450 रु था। वसूले गए बिक्री कर की दर 5% थी। बिल की देय राशि ज्ञात कीजिए।

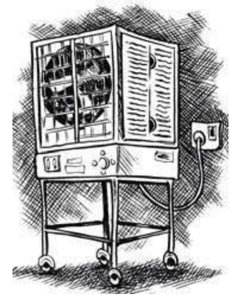
हल : 100 रु पर भुगतान किया गया कर 5 रु था।

450 रु पर भुगतान किए जाने वाला कर होगा $\frac{5}{100} \times 450$ रु $= 22.50$ रु

बिल की देय राशि = क्रय मूल्य + बिक्री कर

= 450 रु + 22.50 रु = 472.50 रु

उदाहरण 9 : वैट (**Value Added Tax (VAT)**) वहीदा ने एक कूलर 10% कर सहित 3300 रु में खरीदा। वैट के जुड़ने से पहले का कूलर का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हल : मूल्य में वैट भी शामिल है।

अत: 10% वैट का अर्थ है कि यदि वैट रहित मूल्य 100 रु है तो वैट सहित मूल्य 110 रु है।

अब यदि वैट सहित मूल्य 110 रु है तो वास्तविक मूल्य 100 रु है।

अत: जब कर सहित मूल्य 3300 रु है तो वास्तविक मूल्य $= \frac{100}{110} \times 3300$ रु $= 3000$ रु

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित वस्तुओं को खरीदने पर यदि 5% बिक्री कर जुड़ता है तो प्रत्येक का खरीद (विक्रय) मूल्य ज्ञात कीजिए :
   (i) 50 रु वाला एक तौलिया।
   (ii) साबुन की दो टिकिया जिनमें से प्रत्येक का मूल्य 35 रु है।
   (iii) 15 रु प्रति किलोग्राम की दर से 5 kg आटा।
2. निम्नलिखित वस्तुओं के मूल्य में यदि 8% वैट सम्मिलित है तो वास्तविक मूल्य ज्ञात कीजिए :
   (i) 14,500 रु में खरीदा गया एक टेलीविज़न
   (ii) 180 रु में खरीदी गई शैंपू की एक शीशी।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. किसी संख्या को दुगुना करने पर उस संख्या में 100% वृद्धि होती है। यदि हम उस संख्या को आधा कर दें तो कितना प्रतिशत ह्रास होगा?
2. 2400 रु की तुलना में 2000 रु कितना प्रतिशत कम है? क्या यह प्रतिशत उतना ही है, जितना 2000 रु की तुलना में 2400 रु अधिक है?

प्रश्नावली 8.2

1. एक व्यक्ति के वेतन में 10% वृद्धि होती है। यदि उसका नया वेतन 1,54,000 रु है तो उसका मूल वेतन ज्ञात कीजिए।

2. रविवार को 845 व्यक्ति चिड़ियाघर गए। सोमवार को केवल 169 व्यक्ति गए। चिड़ियाघर की सैर करने वाले व्यक्तियों की संख्या में सोमवार को कितने प्रतिशत कमी हुई?

3. एक दुकानदार 2400 रु में 80 वस्तुएँ खरीदता है और उन्हें 16% लाभ पर बेचता है। एक वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

4. एक वस्तु का मूल्य 15,500 रु था। 450 रु इसकी मरम्मत पर खर्च किए गए थे। यदि उसे 15% लाभ पर बेचा जाता है तो उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
5. एक VCR और TV में से प्रत्येक को 8000 रु में खरीदा गया। दुकानदार को VCR पर 4% हानि और TV पर 8% लाभ हुआ। इस पूरे लेन-देन में लाभ अथवा हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
6. सेल के दौरान एक दुकान सभी वस्तुओं के अंकित मूल्य पर 10% बट्टा देती है। 1450 रु अंकित मूल्य वाला एक जीन्स और दो कमीजें, जिनमें से प्रत्येक का अंकित मूल्य 850 रु है, को खरीदने के लिए किसी ग्राहक को कितना भुगतान करना पड़ेगा?

7. एक दूधवाले ने अपनी दो भैंसों को 20,000 रु प्रति भैंस की दर से बेचा। एक भैंस पर उसे 5% लाभ हुआ और दूसरी पर उसे 10% हानि हुई। इस सौदे में उसका कुल लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए। (**संकेत :** पहले प्रत्येक का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए)
8. एक टेलीविज़न का मूल्य 13,000 रु है। इस पर 12% की दर से बिक्री कर वसूला जाता है। यदि विनोद इस टेलीविज़न को खरीदता है तो उसके द्वारा भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।
9. अरुण एक जोड़ी स्केट्स (पहियेदार जूते) किसी सेल से खरीदकर लाया जिस पर दिए गए बट्टे की दर 20% थी। यदि उसके द्वारा भुगतान की गई राशि 1600 रु है तो अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।
10. मैंने एक हेयर ड्रायर 8% वैट सहित 5400 रु में खरीदा। वैट को जोड़ने से पहले का उसका मूल्य ज्ञात कीजिए।

8.6 चक्रवृद्धि ब्याज

शायद आपको इस प्रकार के कथन मिले होंगे 'बैंक में FD (सावधि जमा) पर एक वर्ष का ब्याज 9% वार्षिक की दर से' या 'बचत खाते पर ब्याज की दर 5% वार्षिक'।

बैंक अथवा डाकघर जैसी संस्थाओं के पास जमा किए गए धन पर इन संस्थाओं द्वारा भुगतान किया गया अतिरिक्त धन **ब्याज** कहलाता है। जब व्यक्ति धन उधार लेते हैं तो उनके द्वारा भी ब्याज का भुगतान किया जाता है। हम **साधारण ब्याज** का परिकलन करना पहले से ही जानते हैं।

उदाहरण 10 : 10,000 रु की राशि 5% वार्षिक ब्याज दर पर 2 वर्ष के लिए उधार ली जाती है। इस राशि पर साधारण ब्याज और 2 वर्ष के अंत में भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

हल : 100 रु पर 1 वर्ष के लिए देय ब्याज 15 रु है।

इसलिए 10,000 का 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{15}{100} \times 10000 = 1500$ रु

2 वर्ष का ब्याज $= 1500$ रु $\times 2 = 3000$ रु

2 वर्ष के अंत में भुगतान की जाने वाली राशि = मूलधन + ब्याज

$$= 10000 \text{ रु} + 3000 \text{ रु} = 13000 \text{ रु}$$

प्रयास कीजिए

5% वार्षिक दर से 15000 रु का 2 वर्ष के अंत में ब्याज और भुगतान की जाने वाली कुल राशि ज्ञात कीजिए।

मेरे पिताजी ने कुछ धन 3 वर्ष के लिए डाकघर में जमा करा रखा है। प्रत्येक वर्ष धन की वृद्धि पिछले वर्ष की तुलना में अधिक होती है।

हमारे पास बैंक में कुछ धन है। प्रतिवर्ष कुछ ब्याज इस धन में जुड़ जाता है जिसे पासबुक में दर्शाया जाता है। जुड़ने वाला यह ब्याज हर वर्ष एक समान नहीं है, प्रत्येक वर्ष इसमें वृद्धि होती है।

सामान्यत: लिया जाने वाला अथवा भुगतान किए जाने वाला ब्याज कभी साधारण नहीं होता है। ब्याज का परिकलन पिछले वर्ष की राशि पर किया जाता है। इसे ब्याज का संयोजन अथवा **चक्रवृद्धि ब्याज** (C.I.) कहा जाता है।

आइए, हम एक उदाहरण पर चर्चा करते हैं और प्रत्येक वर्ष का अलग-अलग ब्याज ज्ञात करते हैं। प्रत्येक वर्ष हमारी जमा राशि अथवा मूलधन परिवर्तित होता है।

चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन

8% ब्याज की दर से हिना 2 वर्ष के लिए 20,000 रु उधार लेती है जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। 2 वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि ब्याज एवं उसके द्वारा भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

असलम ने अध्यापक से पूछा कि क्या इसका अर्थ यह है कि उन्हें प्रत्येक वर्ष का ब्याज अलग-अलग ज्ञात करना चाहिए। अध्यापक ने कहा 'हाँ' और उसे निम्नलिखित चरणों का उपयोग करने के लिए सुझाव दिया :

1. एक वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए मान लीजिए प्रथम वर्ष का मूलधन P_1 है।

   यहाँ, $P_1 = 20,000$ रु

   SI_1 = 8% वार्षिक दर से प्रथम वर्ष का साधारण ब्याज

   $$= \frac{20000 \times 8}{100} \text{ रु} = 1600 \text{ रु}$$

2. तत्पश्चात् भुगतान की जाने वाली अथवा प्राप्त की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए। यह दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

   प्रथम वर्ष के अंत में राशि $= P_1 + SI_1 = 20000$ रु $+ 1600$ रु

   $= 21600$ रु $= P_2$ (दूसरे वर्ष का मूलधन)

3. इस राशि पर दूसरे वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।

SI_2 = 8% वार्षिक दर से दूसरे वर्ष का साधारण ब्याज

$= \frac{21600 \times 8}{100}$ रु = 1728 रु

4. दूसरे वर्ष के अंत में भुगतान की जाने वाली अथवा प्राप्त की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

दूसरे वर्ष के अंत में राशि $= P_2 + SI_2$

= 21600 रु + 1728 रु

= 23328 रु

कुल देय ब्याज = 1600 रु + 1728 रु

= 3328 रु

रीता ने पूछा कि क्या ब्याज की राशि साधारण ब्याज के लिए भिन्न होगी। अध्यापक ने उसे 2 वर्ष का साधारण ब्याज निकालने के लिए और स्वयं अंतर महसूस करने के लिए सुझाव दिया।

2 वर्ष का साधारण ब्याज $= \frac{20000 \times 8 \times 2}{100}$ रु = 3200 रु

रीता ने कहा कि चक्रवृद्धि ब्याज के कारण हिना को 128 रु का अधिक भुगतान करना पड़ेगा।
आइए, अब हम साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में अंतर देखते हैं। 100 रु से शुरू करते हैं। चार्ट को पूरा करने का प्रयास कीजिए :

		साधारण ब्याज के अंतर्गत	**चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर्गत**
प्रथम वर्ष	मूलधन	100.00 रु	100.00 रु
	10% की दर से ब्याज	10.00 रु	10.00 रु
	वर्ष के अंत में राशि	110.00 रु	110.00 रु
द्वितीय वर्ष	मूलधन	100.00 रु	110.00 रु
	10% की दर से ब्याज	10.00 रु	11.00 रु
	वर्ष के अंत में राशि	(110 + 10) रु = 120.00 रु	121.00 रु
तृतीय वर्ष	मूलधन	100.00 रु	121.00 रु
	10% की दर से ब्याज	10.00 रु	12.10 रु
	वर्ष के अंत में राशि	(120 + 10) रु = 130.00 रु	133.10 रु

इसका अर्थ यह हुआ कि आप उस समय तक जमा ब्याज पर ब्याज देते हैं।

ध्यान दीजिए कि 3 वर्ष में,

साधारण ब्याज से प्राप्त ब्याज = (130 – 100) रु = 30 रु

चक्रवृद्धि ब्याज से प्राप्त ब्याज = (133.10 – 100) रु = 33.10 रु

यह भी ध्यान दीजिए कि साधारण ब्याज के अंतर्गत प्रत्येक वर्ष मूलधन समान रहता है जबकि चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर्गत यह प्रत्येक वर्ष के बाद बदलता जाता है।

8.7 चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र का निगमन करना

जुबेदा ने अपने अध्यापक से पूछा, 'क्या चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की कोई सरल विधि है?' अध्यापक ने कहा, 'चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की एक संक्षिप्त विधि है। आइए, इसे ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।'

मान लीजिए R% वार्षिक ब्याज की दर से मूलधन P_1 पर ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। मान लीजिए $P_1 = 5000$ रु और $R = 5\%$ वार्षिक, तब उपर्युक्त चरणों की सहायता से :

1. $SI_1 = \dfrac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ रु अथवा $SI_1 = \dfrac{P_1 \times R \times 1}{100}$

इसलिए, $A_1 = 5000 + \dfrac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ रु अथवा $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \dfrac{P_1 R}{100}$

$= 5000\left(1+\dfrac{5}{100}\right) = P_2$ रु $\qquad = P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = 5000\left(1+\dfrac{5}{100}\right) \times \dfrac{5 \times 1}{100}$ रु अथवा $SI_2 = \dfrac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= \dfrac{5000 \times 5}{100}\left(1+\dfrac{5}{100}\right)$ रु $\qquad = P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right) \times \dfrac{R}{100}$

$= \dfrac{P_1 R}{100}\left(1+\dfrac{R}{100}\right)$

$A_2 = 5000\left(1+\dfrac{5}{100}\right)$ $\qquad A_2 = P_2 + SI_2$

$+ \dfrac{5000 \times 5}{100}\left(1+\dfrac{5}{100}\right)$ रु $\qquad = P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right) + P_1 \dfrac{R}{100}\left(1+\dfrac{R}{100}\right)$

$= 5000\left(1+\dfrac{5}{100}\right)\left(1+\dfrac{5}{100}\right)$ रु $\qquad = P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right)\left(1+\dfrac{R}{100}\right)$

$= 5000\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^2$ रु $= P_3$ $\qquad = P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right)^2 = P_3$

इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए n वर्ष के अंत में कुल राशि

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \text{ होगी।}$$

अथवा हम कह सकते हैं कि $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

जुबेदा ने कहा लेकिन इसका उपयोग करते हुए हम केवल n वर्ष के अंत में देय कुल राशि का सूत्र प्राप्त करते हैं, न कि चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र। अरुणा ने तुरंत कहा कि हम जानते हैं :

चक्रवृद्धि ब्याज = कुल राशि – मूलधन

अर्थात् $CI = A - P$, इसलिए हम चक्रवृद्धि ब्याज भी आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 11 : 12,600 रु का 2 वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

हल : हमें प्राप्त है, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

यहाँ मूलधन (P) = 12600 रु, दर (R) = 10 रु

वर्षों की संख्या $(n) = 2 = 12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$ रु $= 12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$ रु

$= 12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$ रु = 15246 रु

चक्रवृद्धि ब्याज (CI) = A – P = 15246 रु – 12600 रु = 2646 रु

प्रयास कीजिए

1. 8000 रु का 2 वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

8.8 दर का वार्षिक अथवा अर्धवार्षिक संयोजन

शायद आप जानना चाहेंगे कि 'दर' के बाद 'वार्षिक संयोजन' क्यों लिखा हुआ था। क्या इसका कोई अर्थ है?

अवश्य ही इसका अर्थ है, क्योंकि हम ब्याज की दर का अर्धवार्षिक अथवा तिमाही संयोजन भी कर सकते हैं।

आइए, हम देखते हैं कि यदि ब्याज का वार्षिक अथवा अर्धवार्षिक संयोजन किया जाए तो 100 रु के ब्याज में कितना परिवर्तन होगा?

जब ब्याज वार्षिक संयोजित न हो तो समय अवधि और दर

वह समय अवधि जिसके पश्चात् प्रत्येक बार नया मूलधन बनाने के लिए ब्याज को जोड़ा जाता है, **रूपांतरण अवधि** कहलाता है। जब ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है तो एक वर्ष में प्रत्येक छमाही के दो रूपांतरण अवधि होती है। ऐसी स्थितियों में अर्धवार्षिक दर वार्षिक दर की आधी होगी। यदि ब्याज को तिमाही संयोजित किया जाए तो क्या होगा? इस स्थिति में एक वर्ष में 4 रूपांतरण अवधि होंगी और तिमाही दर वार्षिक दर का एक चौथाई होगी।

P = 100 रु और 10% वार्षिक दर	P = 100 रु और 10% वार्षिक दर पर
पर ब्याज का संयोजन वार्षिक समय अवधि 1 वर्ष है	ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक समय अवधि 6 महीने अथवा $\frac{1}{2}$ वर्ष है
$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100} = 10$ रु	$I = \frac{100 \times \boxed{10 \times \frac{1}{2}}}{100} = 5$ रु
A = 100 रु + 10 रु = 110 रु	A = 100 रु + 5 रु = 105 रु अब अगले छह महीने के लिए P = 105 रु
	अत:, $I = \frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ रु = 5.25 रु और A = 105 रु + 5.25 रु = 110.25 रु

दर आधी हो जाती है।

क्या आपने देखा कि यदि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है, तो हम ब्याज का अभिकलन दो बार करते हैं। इसलिए समय अवधि दुगुना हो जाती है और दर आधी कर दी जाती है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में ब्याज संयोजन के लिए समय अवधि और दर ज्ञात कीजिए :

1. $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 8% वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।
2. 2 वर्ष के लिए 4% वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक राशि 16% वार्षिक दर पर 1 वर्ष के लिए उधार ली जाती है। यदि ब्याज प्रत्येक तीन महीने बाद संयोजित किया जाता है, तो 1 वर्ष में कितनी बार ब्याज देय होगा।

उदाहरण 12 : यदि ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक होता है तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर पर उधार लिए गए 12,000 रु के कर्ज का भुगतान करने के लिए कितनी राशि देनी पड़ेगी।

हल :

प्रथम छह महीनों के लिए मूलधन = 12,000 रु	प्रथम छह महीनों के लिए मूलधन = 12,000 रु
$1\frac{1}{2}$ वर्षों में 3 छमाही होती हैं। इसलिए ब्याज संयोजन 3 बार होना है। ब्याज की दर = 10% का आधा = 5% अर्धवार्षिक $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ $= 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ रु $= 12000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$ रु = 13891.50 रु	समय = 6 महीने = $\frac{6}{12}$ वर्ष = $\frac{1}{2}$ वर्ष दर = 10% $I = \frac{12000 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ रु = 600 रु A = P + I = 12000 रु + 600 रु = 2600 रु यह अगले 6 महीने के लिए मूलधन है।
	$I = \frac{12600 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ रु = 630 रु तीसरी अवधि का मूलधन = 12600 रु + 630 रु = 13230 रु $I = \frac{13230 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ रु = 661.50 रु A = P + I = 13230 रु + 661.50 रु = 13891.50 रु

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित के लिए भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए :

1. 2400 रु पर 5% वार्षिक दर से ब्याज वार्षिक संयोजन करते हुए 2 वर्ष के अंत में।
2. 1800 रु पर 8% वार्षिक दर से ब्याज तिमाही संयोजन करते हुए 1 वर्ष के अंत में।

उदाहरण 13 : 10,000 रु की राशि का 1 वर्ष और 3 महीने के लिए $8\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर से निवेश करने पर चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

हल : मयूरी ने सर्वप्रथम समय को वर्षों में परिवर्तित किया

$$1 \text{ वर्ष } 3 \text{ महीने} = 1\frac{3}{12} \text{ वर्ष} = 1\frac{1}{4} \text{ वर्ष}$$

मयूरी ने ज्ञात सूत्र में मान रखने का प्रयत्न किया और

$$A = 10000 \text{ रु} \left(1+\frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}} \text{ रु प्राप्त किया।}$$

वह परेशान थी। उसने अपने अध्यापक से पूछा कि वह भिन्न रूपी घात को कैसे ज्ञात करेगी। अध्यापक ने उसे निम्नलिखित संकेत दिया :

पहले अवधि के एक पूरे हिस्से अर्थात् 1 वर्ष के लिए राशि ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसे मूलधन के रूप में उपयोग करते हुए $\frac{1}{4}$ वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

$$A = 10000\left(1+\frac{17}{200}\right) \text{ रु}$$

$$= 10000 \times \frac{217}{200} \text{ रु} = 10850 \text{ रु}$$

अब यह राशि अगले $\frac{1}{4}$ वर्ष के लिए मूलधन का काम करेगी। हम 10,850 रु का $\frac{1}{4}$ वर्ष के लिए साधारण ब्याज ज्ञात करते हैं।

$$\text{साधारण ब्याज (SI)} = \frac{10850 \times \frac{1}{4} \times 17}{100 \times 2} \text{ रु}$$

$$= \frac{10850 \times 1 \times 17}{800} \text{ रु} = 230.56 \text{ रु}$$

प्रथम वर्ष का ब्याज $= 10850$ रु $- 10000$ रु $= 850$ रु

और अगले $\frac{1}{4}$ वर्ष का ब्याज $= 230.56$ रु

इस प्रकार कुल चक्रवृद्धि ब्याज $= 850 + 230.56 = 1080.56$ रु

8.9 चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के अनुप्रयोग

कुछ ऐसी स्थितियाँ हैं जहाँ पर हम चक्रवृद्धि ब्याज के कुल राशि ज्ञात करने के सूत्र का उपयोग कर सकते हैं। इनमें से कुछ निम्नलिखित हैं :

(i) जनसंख्या में वृद्धि (अथवा ह्रास)

(ii) यदि बैक्टीरिया वृद्धि की दर ज्ञात है तो उनकी कुल वृद्धि ज्ञात करना।

(iii) किसी वस्तु का मान ज्ञात करना यदि मध्यवर्ती वर्षों में इसके मूल्य में वृद्धि अथवा कमी होती है।

उदाहरण 14 : वर्ष 1997 के अंत में किसी शहर की जनसंख्या 20, 000 थी। इसमें 5% वार्षिक दर से वृद्धि हुई। वर्ष 2000 के अंत में उस शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल : प्रत्येक वर्ष जनसंख्या में 5% की वृद्धि होती है, इसलिए प्रत्येक नए वर्ष की नई जनसंख्या होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि यह संयोजित रूप में बढ़ रही है।

1998 के शुरू में जनसंख्या = 20, 000 (इसे हम प्रथम वर्ष के लिए मूलधन मानते हैं)

$$\text{5\% की दर से वृद्धि} = \frac{5}{100} \times 20,000 = 1000$$

$$\text{वर्ष 1999 की जनसंख्या} = 20000 + 1000 = 21000$$

इसे दूसरे वर्ष के लिए मूलधन मान लीजिए।

5% की दर से वृद्धि $= \frac{5}{100} \times 21000 - 1050$

वर्ष 2000 में जनसंख्या $= 21000 + 1050 = 22050$

इसे तीसरे वर्ष के लिए मूलधन समझ लीजिए।

5% की दर से वृद्धि $= \frac{5}{100} \times 22050 - 1102.5$

वर्ष 2000 के अंत में जनसंख्या $= 22050 + 1102.5 = 23152.5$

अथवा सूत्र की सहायता से वर्ष 2000 के अंत में जनसंख्या $= 20000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$

$$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 23152.5$$

इसलिए, लगभग जनसंख्या $= 23{,}153$

अरुणा ने पूछा, यदि जनसंख्या में कमी होती है तो क्या करना है। तब अध्यापक ने निम्नलिखित उदाहरण की चर्चा की।

उदाहरण 15 : एक T.V. 21,000 रु में खरीदा गया। एक वर्ष पश्चात् T.V. के मूल्य में 5% अवमूल्यन हो गया (अवमूल्यन का अर्थ है वस्तु के उपयोग और उम्र के कारण उसके मूल्य में कमी होना)। एक वर्ष पश्चात् T.V. का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल :

मूलधन = 21,000 रु

अवमूल्यन (कमी) = प्रतिवर्ष 21,000 रु का 5%

$$= \frac{21{,}000 \times 5 \times 1}{100} \text{ रु} = 1050 \text{ रु}$$

एक वर्ष के अंत में T.V. का मूल्य = 21,000 रु – 1050 रु = 19,950 रु

विकल्पतः, हम इसे निम्नलिखित विधि से सीधे प्राप्त कर सकते हैं

1 वर्ष के अंत में मूल्य $= 21{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)$ रु

$$= 21{,}000 \times \frac{19}{20} \text{ रु} = 19{,}950 \text{ रु}$$

प्रयास कीजिए

1. 10,500 रु मूल्य की एक मशीन का 5% की दर से अवमूल्यन होता है। एक वर्ष पश्चात् इसका मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. एक शहर की वर्तमान जनसंख्या 12 लाख है यदि वृद्धि की दर 4% है तो 2 वर्ष पश्चात् शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 8.3

1. निम्नलिखित के लिए कुल राशि एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए :

(a) 10,800 रु पर 3 वर्ष के लिए $12\frac{1}{2}$% वार्षिक दर से वार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

(b) 18,000 रु पर $2\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से वार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

(c) 62,500 रु पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 8% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

(d) 8000 रु पर 1 वर्ष के लिए 9% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक रूप से संयोजित करने पर। (आप सत्यापन करने के लिए साधारण ब्याज के सूत्र का उपयोग करते हुए एक के बाद दूसरे वर्ष के लिए परिकलन कर सकते हैं)

(e) 10,000 रु पर 1 वर्ष के लिए 8% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

2. कमला ने एक स्कूटर खरीदने के लिए किसी बैंक से 26400 रु 15% वार्षिक दर से उधार लिए जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होना है। 2 वर्ष और 4 महीने के अंत में उधार चुकता करने के लिए उसे कितनी राशि का भुगतान करना पड़ेगा?

(**संकेत** : ब्याज को वार्षिक संयोजित करते हुए पहले 2 वर्ष के लिए A ज्ञात कीजिए और दूसरे वर्ष की कुल राशि पर $\frac{4}{12}$ वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।)

3. फैबिना ने 12,500 रु 3 वर्ष के लिए 12% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर उधार लिए और राधा ने उतनी ही राशि उतने ही समय के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार ली जबकि ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होना है। किसे अधिक ब्याज का भुगतान करना है और कितना अधिक करना है?

4. मैंने जमशेद से 12,000 रु 2 वर्ष के लिए 6% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर उधार लिए। यदि मैंने यह राशि 6% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार ली हुई होती तो मुझे कितनी अतिरिक्त राशि का भुगतान करना पड़ता?

5. वासुदेवन ने 12% वार्षिक दर पर 60,000 रु का निवेश किया। यदि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है तो ज्ञात कीजिए कि वह (i) 6 महीने के अंत में (ii) एक वर्ष के अंत में, कुल कितनी राशि प्राप्त करेगा?

6. आरिफ ने एक बैंक से 80,000 रु का कर्ज लिया। यदि ब्याज की दर 10% वार्षिक है तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष पश्चात् उसके द्वारा भुगतान की जाने वाली राशियों में अंतर ज्ञात कीजिए। यदि ब्याज (i) वार्षिक संयोजित होता है (ii) अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

7. मारिया ने किसी व्यापार में 8000 रु का निवेश किया। उसे 5% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज का भुगतान किया जाएगा। यदि ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है तो

(i) दो वर्ष के अंत में उसके नाम से जमा की गई राशि ज्ञात कीजिए।

(ii) तीसरे वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।

8. 10,000 रु पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज और कुल राशि ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होना है। क्या यह ब्याज उस ब्याज से अधिक होगा जो उसे वार्षिक रूप से संयोजित करने पर प्राप्त होगा?

9. यदि राम 4096 रु 18 महीने के लिए $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर पर उधार देता है और ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है तो ज्ञात कीजिए कि राम कुल कितनी राशि प्राप्त करेगा।

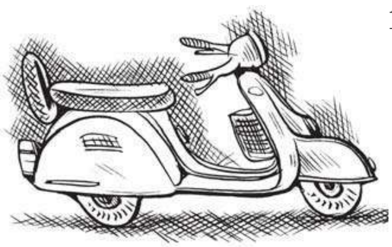
10. 5% वार्षिक दर से बढ़ते हुए वर्ष 2003 के अंत में एक स्थान की जनसंख्या 54,000 हो गई। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

(i) वर्ष 2001 में जनसंख्या

(ii) वर्ष 2005 में कितनी जनसंख्या होगी?

11. एक प्रयोगशाला में, किसी निश्चित प्रयोग में बैक्टीरिया की संख्या 2.5% प्रति घंटे की दर से बढ़ रही है। यदि प्रयोग के शुरू में बैक्टीरिया की संख्या 5,06,000 थी तो 2 घंटे के अंत में बैक्टीरिया की संख्या ज्ञात कीजिए।

12. एक स्कूटर 42,000 रु में खरीदा गया। 8% वार्षिक दर से इसके मूल्य का अवमूल्यन हो गया। 1 वर्ष के बाद स्कूटर का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हमने क्या चर्चा की?

1. अंकित मूल्य पर दी गई छूट **बट्टा** कहलाती है।

बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

2. यदि बट्टा प्रतिशत दिया हुआ है तो बट्टे का परिकलन किया जा सकता है। बट्टा = अंकित मूल्य का बट्टा प्रतिशत।

3. किसी वस्तु को खरीदने के बाद उस पर किए गए अतिरिक्त खर्चे क्रय मूल्य में शामिल कर लिए जाते हैं और ये खर्चे **ऊपरी खर्चे** कहलाते हैं। क्रय मूल्य = खरीद मूल्य + ऊपरी खर्चे

4. किसी वस्तु को बेचने पर सरकार द्वारा बिक्री कर लिया जाता है और इसे बिल की राशि में जोड़ दिया जाता है। बिक्री कर = बिल राशि का कर %

5. पिछले वर्ष की कुल राशि $(A = P + I)$ पर परिकलित किया गया ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।

6. (i) जब ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तो

कुल राशि $(A) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}$, जहाँ P मूलधन, R ब्याज की दर और n समय है।

(ii) जब ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है तो

कुल राशि $= P\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2n}$ जहाँ $\begin{cases} \frac{R}{2} & \text{ब्याज की अर्धवार्षिक दर} \\ 2n = & \text{छमाहियों (अर्धवर्षों) की संख्या} \end{cases}$

अध्याय 9

बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ

9.1 व्यंजक क्या है?

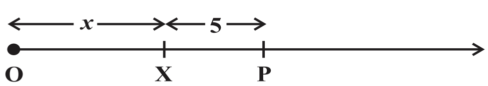
पिछली कक्षाओं में हम बीजीय व्यंजकों (अथवा केवल व्यंजकों) के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। $x + 3$, $2y - 5$, $3x^2$, $4xy + 7$ इत्यादि व्यंजकों के उदाहरण हैं।

आप और अधिक व्यंजक बना सकते हैं। जैसा कि आप जानते हैं व्यंजकों का निर्माण चरों एवं अचरों की सहायता से होता है। व्यंजक $2y - 5$ को चर y एवं अचरों 2 तथा 5 से बनाया गया है। व्यंजक $4xy + 7$ को चरों x तथा y एवं अचरों 4 तथा 7 से बनाया गया है।

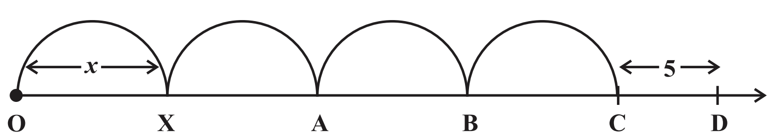
हम जानते हैं कि व्यंजक $2y - 5$ में y का मान कुछ भी हो सकता है। यह $2, 5, -3, 0, \frac{5}{2}, \frac{-7}{3}$ इत्यादि हो सकता है। वास्तव में y के असंख्य विभिन्न मान हो सकते हैं। व्यंजक के चर का मान बदलने पर व्यंजक का मान बदल जाता है। इस प्रकार y को विभिन्न मान देने पर $2y - 5$ का मान बदलता जाता है। जब $y = 2$, $2y - 5 = 2\,(2) - 5 = -1$, जब $y = 0$, $2y - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5$ इत्यादि। y के कुछ अन्य दिए हुए मानों के लिए व्यंजक $2y - 5$ के मान ज्ञात कीजिए।

संख्या रेखा और व्यंजक

व्यंजक $x + 5$ की चर्चा करते हैं। आइए, मान लेते हैं कि संख्या रेखा पर चर x की स्थिति X है।



X, संख्या रेखा पर कहीं भी हो सकता है परंतु यह निश्चित है कि $x + 5$ का मान, x के दाईं तरफ़ 5 इकाई की दूरी पर बिंदु P से निरूपित किया जाएगा। इसी प्रकार, $x - 4$ का मान X के बाईं तरफ़ 4 इकाई की दूरी पर होगा। $4x$ एवं $4x + 5$ की स्थिति के बारे में क्या कहा जा सकता है?



$4x$ की स्थिति बिंदु C पर होगी। मूल बिंदु से C की दूरी X की दूरी से चार गुना होगी। $4x + 5$ की स्थिति D, C के दाईं तरफ़ 5 इकाई की दूरी पर होगी।

प्रयास कीजिए

- एक चर वाले और दो चरों वाले व्यंजकों के पाँच-पाँच उदाहरण दीजिए।
- $x, x - 4, 2x + 1, 3x - 2$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

9.2 पद, गुणनखंड एवं गुणांक

व्यंजक $4x + 5$ को लीजिए। यह व्यंजक $4x$ एवं 5 दो पदों से बना हुआ है। **पदों को जोड़कर व्यंजक बनाया जाता है। पद स्वयं भी गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में बनाए जा सकते हैं।** पद $4x$ अपने गुणनखंडों 4 एवं x का गुणनफल है। पद 5 केवल एक गुणनखंड 5 से बना हुआ है।

व्यंजक $7xy - 5x$ के दो पद $7xy$ एवं $5x$ हैं। पद $7xy$ गुणनखंडों 7, x एवं y का गुणनफल है। किसी पद का संख्यात्मक गुणनखंड उसका **संख्यात्मक गुणांक (Numerical Coefficient) या गुणांक** कहलाता है। पद $7xy$ का गुणांक 7 है और पद $-5x$ का गुणांक -5 है।

प्रयास कीजिए

व्यंजक $x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$ के प्रत्येक पद के गुणांक को पहचानिए।

9.3 पदी, द्विपद एवं बहुपद

जिस व्यंजक में केवल एक पद होता है उसे **एकपदी** कहते हैं। दो पदों वाला व्यंजक **द्विपद** कहलाता है। तीन पदों वाले व्यंजक को **त्रिपद** कहते हैं और इसी प्रकार अन्य। व्यापकत: एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसके गुणांक शून्येतर हों और जिसके चरों की घात ऋणेतर हों, **बहुपद** कहलाता है। बहुपद के पदों की संख्या एक अथवा एक से अधिक कुछ भी हो सकती है।

एकपद के उदाहरण : $4x^2, 3xy, -7z, 5xy^2, 10y, -9, 82mnp$ इत्यादि।

द्विपद के उदाहरण : $a + b, 4l + 5m, a + 4, 5 - 3xy, z^2 - 4y^2$ इत्यादि।

त्रिपद के उदाहरण : $a + b + c, 2x + 3y - 5, x^2y - xy^2 + y^2$ इत्यादि।

बहुपद के उदाहरण : $a + b + c + d, 3xy, 7xyz - 10, 2x + 3y + 7z$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित बहुपदों को एकपद, द्विपद एवं त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए :
   $-z + 5, x + y + z, y + z + 100, ab - ac, 17$
2. बनाइए :
   (a) तीन ऐसे द्विपद जिनमें केवल एक चर x हो।
   (b) तीन ऐसे द्विपद जिनमें x और y चर हों।
   (c) तीन एकपद जिनमें x और y चर हों।
   (d) चार अथवा अधिक पदों वाले 2 बहुपद।

9.4 समान एवं असमान पद

निम्नलिखित व्यंजकों को देखिए :

$7x, 14x, -13x, 5x^2, 7y, 7xy, -9y^2, -9x^2, -5yx$

इनमें समान पद इस प्रकार है :

(i) $7x$, $14x$, एवं $-13x$ (ii) $5x^2$ एवं $-9x^2$

(iii) $7xy$ एवं $-5yx$

$7x$ एवं $7y$ समान पद क्यों नहीं हैं?

$7x$ एवं $7xy$ समान पद क्यों नहीं हैं?

$7x$ एवं $5x^2$ समान पद क्यों नहीं हैं?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से प्रत्येक के दो समान पद लिखिए :

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

9.5 बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन

पिछली कक्षाओं में हमने यह भी सीखा है कि बीजीय व्यंजकों को कैसे जोड़ा और घटाया जाता है, उदाहरणार्थ $7x^2 - 4x + 5$ एवं $9x - 10$, को जोड़ने के लिए हम इस प्रकार करते हैं :

$$\begin{array}{rrrr} & 7x^2 & -\,4x & +\;5 \\ + & & 9x & -\;10 \\ \hline & 7x^2 & +\,5x & -\;5 \end{array}$$

विचार कीजिए कि हम योगफल कैसे ज्ञात करते हैं। जोड़े जाने वाले प्रत्येक व्यंजक को हम विभिन्न पंक्तियों में लिखते हैं। ऐसा करते समय हम समान पदों को एक दूसरे के ऊपर-नीचे लिखते हैं और, जैसा ऊपर दर्शाया गया है, हम उन समान पदों को जोड़ते हैं। अतः $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$ इसी प्रकार, $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. आइए कुछ और उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : समान पदों को एक दूसरे के ऊपर-नीचे रखकर तीन व्यंजकों को विभिन्न पंक्तियों में लिखते हुए, हम प्राप्त करते हैं :

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7xy & +\,5yz & -3zx & & \\ + & & 4yz & +\,9zx & & -\,4y \\ + & -2xy & & -\,3zx & +\,5x & \\ \hline & 5xy & +\,9yz & +3zx & +\,5x & -\,4y \end{array}$$

(ध्यान दीजिए xz और zx एक समान हैं)

इस प्रकार व्यंजकों का योग $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ है। ध्यान दीजिए दूसरे व्यंजक के पद $-4y$ और तीसरे व्यंजक के पद $5x$ को योगफल में वैसे ही लिखा गया है जैसे वे हैं क्योंकि दूसरे व्यंजकों में उनका कोई समान पद नहीं है।

उदाहरण 2 : $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ में से $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ को घटाइए।

हल :

$$\begin{array}{rrrrrr} 7x^2 & -\,4xy & +\,8y^2 & +\,5x & -\,3y & \\ 5x^2 & & -\,4y^2 & & +\,6y & -\,3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & -\,4xy & +\,12y^2 & +\,5x & -\,9y & +\,3 \end{array}$$

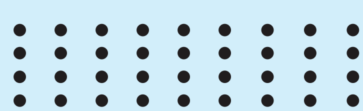
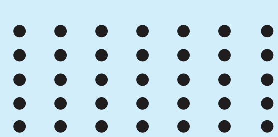
नोट किसी संख्या का घटाना उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने के समान है। इस प्रकार -3 को घटाना, $+3$ को जोड़ने के समान है, इसी प्रकार $6y$ को घटाना, $-6y$ को जोड़ने जैसा है। $-4y^2$ को घटाना $4y^2$ को जोड़ने के समान है और इसी प्रकार अन्य दूसरी पंक्ति के प्रत्येक पद के नीचे तीसरी पंक्ति में लिखे चिह्न से यह जानने में सहायता मिलती है कि कौन सी संक्रिया की जाती हैं।

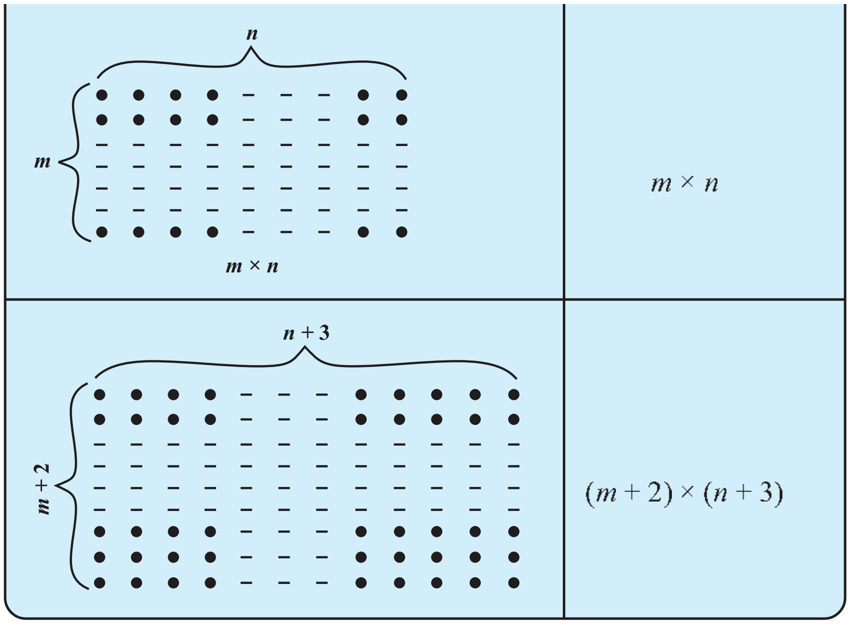
प्रश्नावली 9.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक के पदों एवं गुणांकों को पहचानिए :
   (i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$
   (iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} \times xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$
2. निम्नलिखित बहुपदों को एकपदी, द्विपद एवं त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए। कौन-सा बहुपद इन तीन श्रेणियों में से किसी में भी नहीं है?
   $x + y$, 1000, $x + x^2 + x^3 + x^4$, $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$, $4z - 15z^2$, $ab + bc + cd + da$, pqr, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$
3. निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :
   (i) $ab - bc$, $bc - ca$, $ca - ab$ (ii) $a - b + ab$, $b - c + bc$, $c - a + ac$
   (iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4$, $5 + 7pq - 3p^2q^2$ (iv) $l^2 + m^2$, $m^2 + n^2$, $n^2 + l^2$, $2lm + 2mn + 2nl$
4. (a) $12a - 9ab + 5b - 3$ में से $4a - 7ab + 3b + 12$ को घटाइए।
   (b) $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$ में से $3xy + 5yz - 7zx$ को घटाइए।
   (c) $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$ में से $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ को घटाइए।

9.6 बीजीय व्यंजकों का गुणन

(i) बिंदुओं के निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

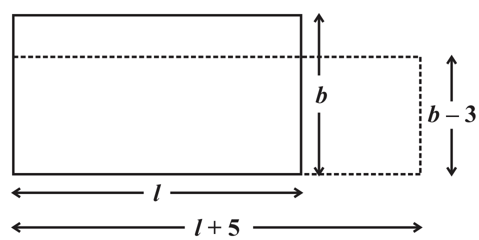
बिंदुओं के प्रतिरूप	बिंदुओं की कुल संख्या
	4×9
	5×7



बिंदुओं की संख्या ज्ञात करने के लिए हमें पंक्तियों की संख्या के व्यंजक को स्तंभों की संख्या के व्यंजक से गुणा करना है।

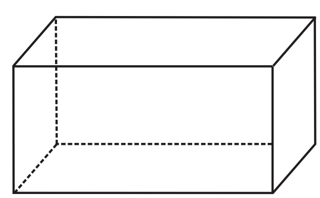
यहाँ पंक्तियों की संख्या 2 बढ़ाई गई है, अर्थात् $m + 2$ और स्तंभों की संख्या 3 बढ़ाई गई है, अर्थात् $n + 3$

(ii) क्या आप ऐसी और परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें दो बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता हो? अमीना उठकर कहती है। ''हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं।'' आयत का क्षेत्रफल $l \times b$, हैं जिसमें l लंबाई है और b चौड़ाई है। यदि आयत की लंबाई 5 इकाई बढ़ा दी जाए, अर्थात्, $(l + 5)$ कर दी जाए और चौड़ाई 3 इकाई कम कर दी जाए अर्थात् $(b - 3)$ कर दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल $(l + 5) \times (b - 3)$ होगा।



आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें $l \times b$ अथवा $(l + 5) \times (b - 3)$ के रूप के बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता है।

(iii) क्या आप आयतन के बारे में सोच सकते हैं? (एक आयताकार बक्से का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल से प्राप्त होता है।)



(iv) सरिता कहती है कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरणार्थ यदि प्रति दर्जन केलों का मूल्य p रुपये है और स्कूल पिकनिक के लिए z दर्जन केलों की आवश्यकता है, तो हमें $(p \times z)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ेगा।

मान लीजिए, प्रति दर्जन केलों का मूल्य 2 रुपये कम होता और पिकनिक के लिए 4 दर्जन कम केलों की आवश्यकता होती तो, प्रति दर्जन केलों का मूल्य $(p–2)$ रुपये होता और $(z - 4)$ दर्जन केलों की आवश्यकता होती। इसलिए, हमें $(p - 2) \times (z - 4)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ता है।

प्रयास कीजिए

क्या आप ऐसी और दो परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जहाँ हमें बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ सकता है?

[**नोट :** • चाल और समय के बारे में सोचिए।

• साधारण ब्याज, मूलधन और साधारण ब्याज की दर इत्यादि के बारे में सोचिए।]

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में हमने दो अथवा अधिक राशियों का गुणन किया है। यदि राशियाँ बीजीय व्यंजकों के रूप में दी हुई हैं और हमें उनका गुणनफल ज्ञात करना है तो इसका अर्थ यह हुआ कि हमें यह जानना चाहिए कि यह गुणनफल कैसे प्राप्त किया जाए। आइए, इसे क्रमानुसार करते हैं। सबसे पहले हम दो एकपदियों का गुणन करते हैं।

9.7 एकपदी को एकपदी से गुणा करना

9.7.1 दो एकपदियों को गुणा करना

हम प्रारंभ करते हैं

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$ से जो पहले सीख चुके हैं।

इसी प्रकार, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

अब निम्नलिखित गुणनफलों पर विचार कीजिए :

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ध्यान दीजिए एकपदियों के तीनों गुणनफल $3xy$, $15xy$, $-15xy$ भी एकपदी हैं।

कुछ और उपयोगी उदाहरण इस प्रकार हैं :

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

नोट कीजिए : $5 \times 4 = 20$

अर्थात्, गुणनफल का गुणांक = प्रथम एकपदी का गुणांक × द्वितीय एकपदी का गुणांक और

$x \times x^2 = x^3$

अर्थात्, गुणनफल का बीजीय गुणनखंड = प्रथम एकपदी का बीजीय गुणनखंड × द्वितीय एकपदी का बीजीय गुणनखंड।

ध्यान दीजिए कि हमने दोनों एकपदियों के बीजीय भागों के विभिन्न चरों की घातों को कैसे इकट्ठा किया है। ऐसा करने के लिए हमने घातों के नियमों का उपयोग किया है।

9.7.2 तीन अथवा अधिक एकपदियों को गुणा करना

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\,(x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

यह स्पष्ट है कि हम सर्वप्रथम पहले दो एकपदियों को गुणा करते हैं और इस प्रकार गुणनफल के रूप में प्राप्त एकपदी को तीसरे एकपदी से गुणा करते हैं। बहुसंख्य एकपदियों को गुणा करने के लिए इस विधि का विस्तार किया जा सकता है।

प्रयास कीजिए

$4x \times 5y \times 7z$ ज्ञात कीजिए :
सर्वप्रथम $4x \times 5y$ ज्ञात कीजिए और फिर उसे $7z$ से गुणा कीजिए, अथवा सर्वप्रथम $5y \times 7z$ ज्ञात कीजिए और इसे $4x$ से गुणा कीजिए। क्या परिणाम एक जैसा है? आप क्या विचार करते हैं? क्या गुणा करते समय क्रम का महत्त्व है?

हम दूसरे तरीके से भी इस गुणनफल को ज्ञात कर सकते हैं : $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3 y^3$
$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120\, x^6y^6$

उदाहरण 3 : एक आयत के, जिसकी लंबाई और चौड़ाई दी हुई है, क्षेत्रफल की सारणी को पूरा कीजिए :

हल :

लंबाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

उदाहरण 4 : निम्नलिखित सारणी में तीन आयताकार बक्सों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई दी हुई हैं। प्रत्येक का आयतन ज्ञात कीजिए :

	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

हल : आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

अत: (i) आयतन $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$
$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

(ii) आयतन $= m^2n \times n^2p \times p^2m$
$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3n^3p^3$

(iii) आयतन $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$
$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्नलिखित एकपदी युग्मों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   (i) $4, 7p$ (ii) $-4p, 7p$ (iii) $-4p, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$
   (v) $4p, 0$
2. निम्नलिखित एकपदी युग्मों के रूप में लंबाई एवं चौड़ाई रखने वाले आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
   (p, q); $(10m, 5n)$; $(20x^2, 5y^2)$; $(4x, 3x^2)$; $(3mn, 4np)$

3. गुणनफलों की सारणी को पूरा कीजिए :

प्रथम एकपदी → द्वितीय एकपदी ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	...	...	...	...	...
$-5y$	...	...	$-15x^2y$	...	...	...
$3x^2$	...	...	...	...	...	...
$-4xy$	...	...	...	...	...	...
$7x^2y$	...	...	...	...	...	...
$-9x^2y^2$	...	...	...	...	...	...

4. ऐसे आयताकार बक्सों का आयतन ज्ञात कीजिए जिनकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: निम्नलिखित हैं :

(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

5. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$

(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

9.8 एकपदी को बहुपद से गुणा करना

9.8.1 एकपदी को द्विपद से गुणा करना

आइए, एकपदी $3x$ को द्विपद $5y + 2$ से गुणा करते हैं, अर्थात्, $3x \times (5y + 2)$ ज्ञात करते हैं। स्मरण कीजिए कि $3x$ और $(5y + 2)$ संख्याओं को निरूपित करते हैं। इसलिए विवरण के नियम का उपयोग करते हुए, $3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$

हम सामान्यत: अपने परिकलनों में वितरण के नियम का उपयोग करते हैं। उदाहरणार्थ

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$

$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (यहाँ हमने वितरण नियम का उपयोग किया है।)

$= 700 + 42 = 742$

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$

$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (यहाँ हमने वितरण नियम का उपयोग किया है।)

$= 280 - 14 = 266$

इसी प्रकार, $(-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

और $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy.$

द्विपद एवं एकपदी के गुणनफल के बारे में आपका क्या विचार है? उदाहरणार्थ $(5y + 2) \times 3x = ?$

हम $7 \times 3 = 3 \times 7$; अथवा व्यापक रूप से $a \times b = b \times a$ के रूप में क्रमविनिमेय नियम का उपयोग कर सकते हैं।

इसी प्रकार $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$ है।

प्रयास कीजिए

गुणनफल ज्ञात कीजिए : (i) $2x(3x + 5xy)$ (ii) $a^2(2ab - 5c)$

9.8.2 एकपदी को त्रिपद से गुणा करना

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ लीजिए। पहले की तरह हम वितरण नियम का उपयोग कर सकते हैं।

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

त्रिपद के प्रत्येक पद को एकपदी से गुणा कीजिए और गुणनफल को जोड़ दीजिए।

प्रयास कीजिए

$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

विचार कीजिए वितरण नियम के उपयोग से हम एक पद का एक पद के साथ गुणन करने में सक्षम हैं।

उदाहरण 5 : व्यंजकों को सरल कीजिए और निर्देशानुसार मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x(x - 3) + 2$, $x = 1$ के लिए (ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63$, $y = -2$ के लिए

हल :

(i) $x(x - 3) + 2 = x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ के लिए, $x^2 - 3x + 2 = (1)^2 - 3(1) + 2$
$= 1 - 3 + 2 = 3 - 3 = 0$

(ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63 = 6y^2 - 21y - 3y + 12 - 63$
$= 6y^2 - 24y - 51$

$y = -2$ के लिए, $6y^2 - 24y - 51 = 6(-2)^2 - 24(-2) - 51$
$= 6 \times 4 + 24 \times 2 - 51$
$= 24 + 48 - 51 = 72 - 51 = 21$

उदाहरण 6 : जोड़िए :

(i) $5m(3 - m)$ एवं $6m^2 - 13m$ (ii) $4y(3y^2 + 5y - 7)$ एवं $2(y^3 - 4y^2 + 5)$

हल :

(i) प्रथम व्यंजक $5m(3 - m) = (5m \times 3) - (5m \times m) = 15m - 5m^2$

अब द्वितीय व्यंजक जोड़ने पर $15m - 5m^2 + 6m^2 - 13m = m^2 + 2m$

(ii) प्रथम व्यंजक $= 4y(3y^2 + 5y - 7) = (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (-7))$
$= 12y^3 + 20y^2 - 28y$

द्वितीय व्यंजक $= 2(y^3 - 4y^2 + 5) = 2y^3 + 2 \times (-4y^2) + 2 \times 5$
$= 2y^3 - 8y^2 + 10$

दोनों व्यंजकों को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rrrrr} & 12y^3 & + & 20y^2 - 28y & \\ + & 2y^3 & - & 8y^2 & + 10 \\ \hline & 14y^3 & + & 12y^2 - 28y & + 10 \end{array}$$

उदाहरण 7 : $2pq\,(p + q)$ में से $3pq\,(p - q)$ को घटाइए।

हल : हम प्राप्त करते हैं $3pq\,(p - q) = 3p^2q - 3pq^2$ और

$$2pq\,(p + q) = 2p^2q + 2pq^2$$

घटाने पर

$$\begin{array}{rcr} 2p^2q & + & 2pq^2 \\ 3p^2q & - & 3pq^2 \\ - & + & \\ \hline -p^2q & + & 5pq^2 \end{array}$$

प्रश्नावली 9.3

1. निम्नलिखित युग्मों में प्रत्येक के व्यंजकों का गुणन कीजिए :
   (i) $4p,\ q + r$ (ii) $ab,\ a - b$ (iii) $a + b,\ 7a^2b^2$ (iv) $a^2 - 9,\ 4a$
   (v) $pq + qr + rp,\ 0$

2. सारणी पूरा कीजिए :

	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	गुणनफल
(i)	a	$b + c + d$	___
(ii)	$x + y - 5$	$5xy$	___
(iii)	p	$6p^2 - 7p + 5$	___
(iv)	$4p^2q^2$	$p^2 - q^2$	___
(v)	$a + b + c$	abc	___

3. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

   (i) $(a^2) \times (2a^{22}) \times (4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right) \times \left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

   (iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right) \times \left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x \times x^2 \times x^3 \times x^4$

4. (a) $3x\,(4x - 5) + 3$ को सरल कीजिए और (i) $x = 3$ एवं (ii) $x = \frac{1}{2}$ के लिए इसका मान ज्ञात कीजिए।

   (b) $a\,(a^2 + a + 1) + 5$ को सरल कीजिए और (i) $a = 0$, (ii) $a = 1$ एवं (iii) $a = -1$ के लिए इसका मान ज्ञात कीजिए।

5. (a) $p\,(p - q),\ q\,(q - r)$ एवं $r\,(r - p)$ को जोड़िए।

   (b) $2x\,(z - x - y)$ एवं $2y\,(z - y - x)$ को जोड़िए।

   (c) $4l\,(10n - 3m + 2l)$ में से $3l\,(l - 4m + 5n)$ को घटाइए।

   (d) $4c\,(-a + b + c)$ में से $3a\,(a + b + c) - 2b\,(a - b + c)$ को घटाइए।

9.9 बहुपद को बहुपद से गुणा करना

9.9.1 द्विपद को द्विपद से गुणा करना

आइए, एक द्विपद $(2a + 3b)$ को दूसरे द्विपद $(3a + 4b)$ से गुणा करते हैं। जैसा कि हमने पहले किया है, वैसे ही गुणन के वितरण नियम का अनुसरण करते हुए हम इसे भी क्रम से करते हैं;

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b \times (2a + 3b)$$
$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$
$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$
$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad \text{(क्योंकि } ba = ab \text{ है।)}$$

ध्यान दीजिए एक द्विपद का प्रत्येक पद दूसरे द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा होता है।

जब हम एक पद का एक के साथ गुणन करते हैं, तो हम आशा करते हैं कि $2 \times 2 = 4$ पद उपस्थित होने चाहिए परंतु इनमें से दो पद समान हैं जिनको एक साथ इकट्ठा कर दिया है और इस प्रकार हमें 3 पद प्राप्त होते हैं।

बहुपद को बहुपद से गुणा करते समय हमें समान पदों को ढूँढ़ लेना चाहिए और उन्हें मिला लेना चाहिए।

उदाहरण 8 : गुणा कीजिए :

(i) $(x - 4)$ एवं $(2x + 3)$ को (ii) $(x - y)$ एवं $(3x + 5y)$ को

हल :

(i) $(x - 4) \times (2x + 3) = x \times (2x + 3) - 4 \times (2x + 3)$
$= (x \times 2x) + (x \times 3) - (4 \times 2x) - (4 \times 3) = 2x^2 + 3x - 8x - 12$
$= 2x^2 - 5x - 12$ (समान पदों को जोड़ने पर)

(ii) $(x - y) \times (3x + 5y) = x \times (3x + 5y) - y \times (3x + 5y)$
$= (x \times 3x) + (x \times 5y) - (y \times 3x) - (y \times 5y)$
$= 3x^2 + 5xy - 3yx - 5y^2 = 3x^2 + 2xy - 5y^2$ (समान पदों को जोड़ने पर)

उदाहरण 9 : गुणा कीजिए :

(i) $(a + 7)$ और $(b - 5)$ को (ii) $(a^2 + 2b^2)$ और $(5a - 3b)$ को

हल :

(i) $(a + 7) \times (b - 5) = a \times (b - 5) + 7 \times (b - 5)$
$= ab - 5a + 7b - 35$

नोट कीजिए कि इस गुणन में कोई भी समान पद नहीं हैं।

(ii) $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b) = a^2 (5a - 3b) + 2b^2 \times (5a - 3b)$
$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$

9.9.2 द्विपद को त्रिपद से गुणा करना

इस गुणन में हमें त्रिपद के प्रत्येक पद को द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा करना पड़ेगा। इस प्रकार हमें $3 \times 2 = 6$ पद प्राप्त होंगे, यदि एक पद को एक पद से गुणा करने पर समान पद बनते हैं, तो प्राप्त पदों की संख्या घटकर पाँच या उससे भी कम हो सकती है।

$\underbrace{(a+7)}_{\text{द्विपद}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{त्रिपद}} = a \times (a^2+3a+5) + 7 \times (a^2+3a+5)$ वितरण नियम के उपयोग से

$= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$

$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$

$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$ (अंतिम परिणाम में केवल 4 पद ही क्यों हैं?)

उदाहरण 10 : सरल कीजिए : $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c$

हल : हम प्राप्त करते हैं :

$$(a + b)(2a - 3b + c) = a(2a - 3b + c) + b(2a - 3b + c)$$
$$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$$

(ध्यान दीजिए $-3ab$ एवं $2ab$ समान पद हैं।)

और $(2a - 3b)c = 2ac - 3bc$ है।

इसलिए, $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$

$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$$
$$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$$

प्रश्नावली 9.4

1. द्विपदों को गुणा कीजिए :
   (i) $(2x + 5)$ और $(4x - 3)$ (ii) $(y - 8)$ और $(3y - 4)$
   (iii) $(2.5l - 0.5m)$ और $(2.5l + 0.5m)$ (iv) $(a + 3b)$ और $(x + 5)$
   (v) $(2pq + 3q^2)$ और $(3pq - 2q^2)$
   (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ और $4\left(a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)$

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   (i) $(5 - 2x)(3 + x)$ (ii) $(x + 7y)(7x - y)$
   (iii) $(a^2 + b)(a + b^2)$ (iv) $(p^2 - q^2)(2p + q)$

3. सरल कीजिए :
   (i) $(x^2 - 5)(x + 5) + 25$ (ii) $(a^2 + 5)(b^3 + 3) + 5$
   (iii) $(t + s^2)(t^2 - s)$
   (iv) $(a + b)(c - d) + (a - b)(c + d) + 2(ac + bd)$
   (v) $(x + y)(2x + y) + (x + 2y)(x - y)$ (vi) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
   (vii) $(1.5x - 4y)(1.5x + 4y + 3) - 4.5x + 12y$
   (viii) $(a + b + c)(a + b - c)$

9.10 सर्वसमिका क्या है?

समिका $(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ को लीजिए। a के किसी मान $a = 10$ के लिए हम इस समिका के दोनों पक्षों का मान ज्ञात करेंगे।

$a = 10$ के लिए बायाँ पक्ष LHS $= (a + 1)(a + 2) = (10 + 1)(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

दायाँ पक्ष RHS $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

अत: $a = 10$ के लिए समिका के दोनों पक्षों के मान समान हैं।

आइए अब $a = -5$ लेते हैं।

$$\text{LHS} = (a + 1)(a + 2) = (-5 + 1)(-5 + 2) = (-4) \times (-3) = 12$$

$$\text{RHS} = a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3(-5) + 2$$
$$= 25 - 15 + 2 = 10 + 2 = 12$$

अत: $a = -5$ के लिए, भी LHS = RHS है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं कि a के किसी भी मान के लिए, इस समिका का LHS = RHS है। **ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।** इस प्रकार $(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ एक सर्वसमिका है।

एक समीकरण अपने चर के केवल कुछ निश्चित मानों के लिए ही सत्य होता है, यह चर के सभी मानों के लिए सत्य नहीं होता है। उदाहरणार्थ समीकरण $a^2 + 3a + 2 = 132$ की चर्चा कीजिए। यह समीकरण $a = 10$ के लिए सत्य है जैसा कि हम उपर्युक्त पंक्तियों में देख चुके हैं। परंतु $a = -5$ अथवा $a = 0$ इत्यादि के लिए यह सत्य नहीं है।

दर्शाइए कि $a^2 + 3a + 2 = 132$, $a = -5$ एवं $a = 0$ के लिए सत्य नहीं है।

9.11 मानक सर्वसमिकाएँ

अब हम ऐसी तीन सर्वसमिकाओं के बारे में अध्ययन करेंगे जो बहुत उपयोगी हैं। एक द्विपद को दूसरे द्विपद से गुणा करते हुए इन सर्वसमिकाओं को प्राप्त किया जाता है।

सर्वप्रथम हम गुणनफल $(a + b)(a + b)$ अथवा $(a + b)^2$ के बारे में चर्चा करते हैं।

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad (\text{क्योंकि } ab = ba)$$

अत:
$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \text{(I)}$$

स्पष्टत: यह एक सर्वसमिका है क्योंकि वास्तविक गुणन द्वारा LHS से RHS प्राप्त किया गया है। आप सत्यापित कर सकते हैं कि a तथा b के किसी भी मान के लिए, सर्वसमिका के दोनों पक्षों के मान समान हैं।

- इसके पश्चात् हम गुणनफल $(a - b)(a - b)$ अथवा $(a - b)^2$ के बारे में चर्चा करते हैं।

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

अथवा
$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \text{(II)}$$

- अंततः $(a + b)(a - b)$ पर विचार करते हैं।

  हमें प्राप्त है : $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$

  $$= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \text{ (क्योंकि } ab = ba)$$

  अथवा $$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \qquad \text{(III)}$$

सर्वसमिका (I), (II) और (III) **मानक सर्वसमिकाएँ** कहलाती हैं।

प्रयास कीजिए

1. सर्वसमिका (I) में b के स्थान पर $-b$ रखिए। क्या आपको सर्वसमिका (II) प्राप्त होती है?

- अब हम एक और अधिक उपयोगी सर्वसमिका का अध्ययन करते हैं।

  $$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$
  $$= x^2 + bx + ax + ab$$

  अथवा $$\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab} \qquad \text{(IV)}$$

प्रयास कीजिए

1. $a = 2, b = 3, x = 5$ के लिए सर्वसमिका (IV) का सत्यापन कीजिए।
2. सर्वसमिका (IV) में $a = b$ लेने पर, आप क्या प्राप्त करते हैं? क्या यह सर्वसमिका (I) से संबंधित है?
3. सर्वसमिका (IV) में $a = -c$ तथा $b = -c$ लेने पर, आप क्या प्राप्त करते हैं? क्या यह सर्वसमिका (II) से संबंधित हैं?
4. सर्वसमिका (IV) में $b = -a$ लीजिए। आप क्या पाते हैं? क्या यह सर्वसमिका (III) से संबंधित है?

हम देख सकते हैं कि सर्वसमिका (IV) अन्य तीनों सर्वसमिकाओं का व्यापक रूप है।

9.12 सर्वसमिकाओं का उपयोग

अब हम देखेंगे कि सर्वसमिकाओं का उपयोग द्विपद व्यंजकों के गुणन और संख्याओं के गुणन के लिए भी साधारण वैकल्पिक विधि प्रदान करता है।

उदाहरण 11 : सर्वसमिका (I) का उपयोग करते हुए (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 103^2 ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) $$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \quad \text{[सर्वसमिका (I) के उपयोग से]}$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

हम $(2x + 3y)^2$ का मान सीधे ज्ञात कर सकते हैं :

$$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$$
$$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$$

$= 4x^2 + 6xy + 6\,yx + 9y^2$ (क्योंकि $xy = yx$)

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$ (क्योंकि $xy = yx$)

सर्वसमिका (I) के उपयोग से हम $(2x + 3y)$ का वर्ग करने की वैकल्पिक विधि प्राप्त करते हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि उपर्युक्त सीधी विधि की तुलना में सर्वसमिका विधि के चरणों की संख्या कम है? आप इस विधि की सरलता तब अधिक महसूस करेंगे जब आप $(2x + 3y)$ की तुलना में अधिक जटिल द्विपद व्यंजकों का वर्ग करने का प्रयत्न करेंगे।

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

हम 103 को 103 से सीधे भी गुणा करके वांछित उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि 103 का सीधी विधि से वर्ग करने की तुलना में सर्वसमिका (I) ने हमें सरल विधि प्रदान की है? 1013 का वर्ग करने का प्रयत्न कीजिए। आप इस स्थिति में भी सीधे गुणन विधि की तुलना में सर्वसमिकाओं के उपयोग की विधि को अधिक सरल पाएँगे।

उदाहरण 12 : सर्वसमिका (II) के उपयोग से (i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2\,(4p)\,(3q) + (3q)^2$ [सर्वसमिका (II) के उपयोग से]

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$

क्या आप सहमत हैं कि $(4p - 3q)^2$ का वर्ग करने के लिए सीधी विधि की तुलना में सर्वसमिकाओं की विधि ज़्यादा उबाने वाली है?

(ii) $(4.9)^2 = (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2\,(5.0)\,(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01 = 24.01$

क्या 4.9 का वर्ग करना, सीधी गुणन विधि की तुलना में सर्वसमिका (II) की सहायता से सरल नहीं है?

उदाहरण 13 : सर्वसमिका (III) का उपयोग करते हुए,

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×206 ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$= \frac{9}{4}m^2 - \frac{4}{9}n^2$

इसको सीधे करने का प्रयास कीजिए। आप महसूस करेंगे कि हमारी सर्वसमिका (III) के उपयोग की विधि कितनी आसान है।

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)\,(983 - 17)$

[यहाँ $a = 983,\ b = 17,\ a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$]

इसलिए, $983^2 - 17^2 = 1000 \times 966 = 966000$

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2$

$= 40000 - 36 = 39964$

उदाहरण 14 : निम्नलिखित को ज्ञात करने के लिए, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ सर्वसमिका का उपयोग कीजिए।

(i) 501×502 (ii) 95×103

हल :

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2) = 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$
$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3) = 100^2 + (-5 + 3)\,100 + (-5) \times 3$
$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

प्रश्नावली 9.5

1. निम्नलिखित गुणनफलों में से प्रत्येक को प्राप्त करने के लिए उचित सर्वसमिका का उपयोग कीजिए :

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$ (iii) $(2a - 7)(2a - 7)$

(iv) $(3a - \frac{1}{2})(3a - \frac{1}{2})$ (v) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(vi) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vii) $(6x - 7)(6x + 7)$ (viii) $(-a + c)(-a + c)$

(ix) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a - 9b)(7a - 9b)$

2. निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात करने के लिए, सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग कीजिए :

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

(v) $(2x + 5y)(2x + 3y)$ (vi) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$

(vii) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

3. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित वर्गों को ज्ञात कीजिए :

(i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6x^2 - 5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy + 5y)^2$

4. सरल कीजिए :

(i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$

(vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$ (vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. दर्शाइए कि :

(i) $(3x + 7)^2 - 84x = (3x - 7)^2$ (ii) $(9p - 5q)^2 + 180pq = (9p + 5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m - \frac{3}{4}n\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq + 3q)^2 - (4pq - 3q)^2 = 48pq^2$

(v) $(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a) = 0$

6. सर्वसमिकाओं के उपयोग से निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए :

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2

(v) 5.2^2 (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2

(ix) 1.05×9.5

7. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए :

(i) $51^2 - 49^2$ (ii) $(1.02)^2 - (9.8)^2$ (iii) $153^2 - 147^2$

(iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग करते हुए निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए :

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

हमने क्या चर्चा की?

1. **चरों** एवं **अचरों** की सहायता से व्यंजक बनते हैं।
2. **व्यंजक** बनाने के लिए पदों को जोड़ा जाता है। स्वयं पदों का निर्माण **गुणनखंडों** के गुणनफल के रूप में होता है।
3. व्यंजक जिनमें एक, दो तथा तीन पद होते हैं क्रमश: **एकपदी, द्विपदी** और **त्रिपदी** कहलाते हैं। सामान्यत: एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसमें पदों के गुणांक शून्येतर हैं और चरों की घात ऋणेतर है, **बहुपद** कहलाता है।
4. समान चरों से **समान पद** बनते हैं, और इन चरों की घात भी समान होती है। समान पदों के गुणांक समान होने आवश्यक नहीं है।
5. बहुपदों को जोड़ने (अथवा घटाने) के लिए सबसे पहले समान पदों को ढूँढ़िए और उन्हें जोड़ (अथवा घटा) दीजिए, उसके पश्चात् असमान पदों को उपयोग में लीजिए।
6. बहुत सी परिस्थितियों में हमें बीजीय व्यंजकों को गुणा करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, जिसकी भुजाएँ बीजीय व्यंजकों के रूप में दी हुई हैं।
7. एकपदी को एकपदी से गुणा करने पर हमेशा एकपदी प्राप्त होता है।
8. बहुपद को एकपदी से गुणा करने के लिए बहुपद का प्रत्येक पद एकपदी से गुणा किया जाता है।
9. बहुपद का द्विपद (अथवा त्रिपद) से गुणन करने के लिए हम एक पद को एक-एक पद से गुणा करते हैं, अर्थात् बहुपद का प्रत्येक पद द्विपद (अथवा त्रिपद) के प्रत्येक पद से गुणा किया जाता है। ध्यान दीजिए इस प्रकार के गुणन में, हमें गुणनफल में समान पद प्राप्त हो सकते हैं और उन्हें मिलाना पड़ सकता है।

10. **सर्वसमिका** एक ऐसी समिका है जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, जबकि समीकरण चरों के कुछ निश्चित मानों के लिए सत्य होता है। समीकरण सर्वसमिका नहीं है।

11. निम्नलिखित मानक सर्वसमिकाएँ हैं :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (III)

12. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (IV) एक अन्य उपयोगी सर्वसमिका है।

13. उपर्युक्त चार सर्वसमिकाएँ बीजीय व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने में एवं वर्ग करने में सहायक हैं। ये सर्वसमिकाएँ हमें संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करने के लिए सरल वैकल्पिक विधियाँ प्रदान करती हैं।

अध्याय

10

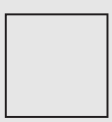
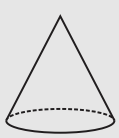
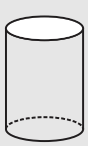
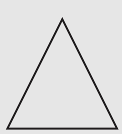
ठोस आकारों का चित्रण

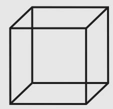
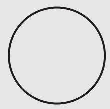
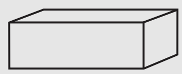
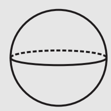
10.1 भूमिका

कक्षा VII में, आप समतल आकारों और ठोस आकारों के बारे में पढ़ चुके हैं। समतल आकारों के लंबाई और चौड़ाई जैसे दो मापन होते हैं और इसीलिए इन्हें द्विविमीय (two dimensional) आकार कहते हैं, जबकि ठोस आकारों के लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई या गहराई जैसे तीन मापन होते हैं। इसीलिए, इन आकारों को त्रिविमीय (three dimensional) आकार कहते हैं। साथ ही, एक ठोस वस्तु कुछ स्थान घेरती है। द्विविमीय और त्रिविमीय आकृतियों को संक्षेप में क्रमशः 2-D और 3-D आकृतियाँ भी कहा जा सकता है। आपको याद होगा कि त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि 2-D आकृतियाँ हैं, जबकि घन, बेलन, शंकु, गोला इत्यादि 3-D आकृतियाँ हैं।

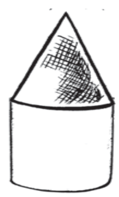
इन्हें कीजिए

निम्नलिखित का मिलान कीजिए (आपके लिए, पहला मिलान किया हुआ है):

आकार	आकार का प्रकार	आकार का नाम
	त्रि-विमीय	गोला
	द्वि-विमीय	बेलन
	त्रि-विमीय	वर्ग
	द्वि-विमीय	वृत्त

	त्रि-विमीय	घनाभ
	त्रि-विमीय	घन
	द्वि-विमीय	शंकु
	त्रि-विमीय	त्रिभुज

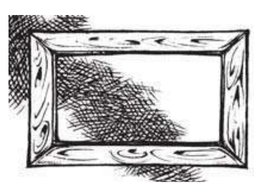
ध्यान दीजिए कि उपरोक्त में से सभी आकार अकेले हैं। परंतु हमारे व्यावहारिक जीवन में, अनेक बार हमारे सम्मुख विभिन्न आकारों में संयोजन (combinations) आते हैं। उदाहरणार्थ, निम्नलिखित वस्तुओं को देखिए :



एक तंबू
बेलन पर एक शंकु आरोपित

एक डिब्बा
एक बेलनाकार खोल

आइसक्रीम
शंकु पर एक अर्धगोला आरोपित



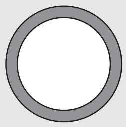
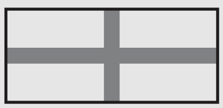
एक फोटोफ्रेम
एक आयताकार पथ

एक कटोरा
एक अर्धगोलाकार खोल

स्तंभ पर गुंबज
बेलन पर अर्धगोला आरोपित

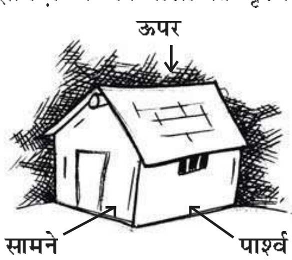
इन्हें कीजिए निम्नलिखित चित्रों (वस्तुओं) का उनके आकारों से मिलान कीजिए :

चित्र (वस्तु)		**आकार**
(i) एक कृषि योग्य खेत		एक आयताकार पार्क के अंदर दो लांबिक आयताकार पथ

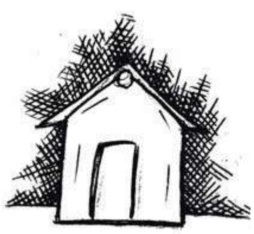
(ii)	एक गहरा छेद या नाली		एक वृत्ताकार मैदान के अनुदिश वृत्ताकार पथ
(iii)	एक खिलौना		एक वर्गाकार खेत से संलग्न त्रिभुजाकार खेत
(iv)	एक वृत्ताकार पार्क		एक बेलन में से शंकु खुरचकर निकालना
(v)	परस्पर लांबिक (क्रास) पथ		एक शंकु पर आरोपित अर्धगोला

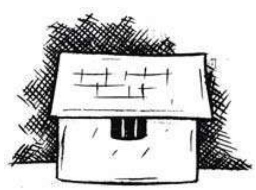
10.2 3-D आकारों के दृश्य

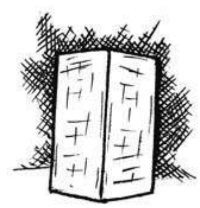
आप पढ़ चुके हैं कि त्रिविमीय वस्तुएँ विभिन्न स्थानों से भिन्न-भिन्न रूप में दिखाई दे सकती हैं। इसलिए इनको विभिन्न परिपेक्षों (दृष्टियों) से खींचा जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक दी हुई झोंपड़ी के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं :



एक झोंपड़ी

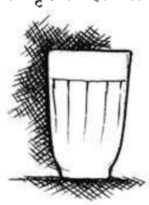

सामने से दृश्य

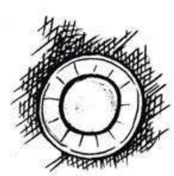

पार्श्व दृश्य


ऊपर से दृश्य

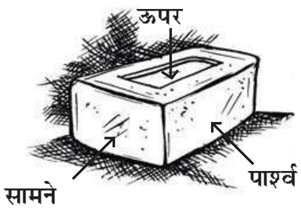
इसी प्रकार, एक गिलास के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं:


एक गिलास

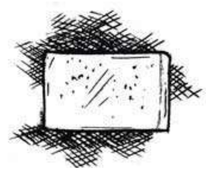

पार्श्व दृश्य

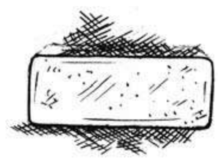

ऊपर से दृश्य

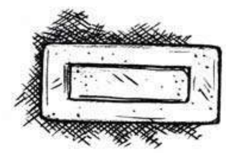
एक गिलास का ऊपर से दृश्य (top view) संकेंद्रीय वृत्तों का एक युग्म क्यों है? यदि इसे भिन्न दिशा से देखा जाए, तो क्या पार्श्व दृश्य कुछ और प्रकार का प्रतीत होगा? इसके बारे में सोचिए। अब एक ईंट के विभिन्न दृश्यों को देखिए।



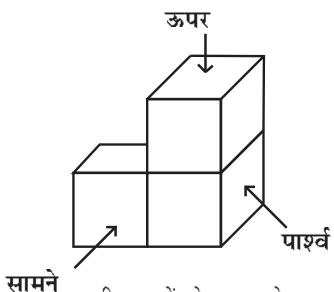
एक ईंट


सामने से दृश्य

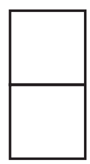

पार्श्व दृश्य

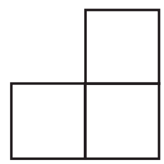

ऊपर से दृश्य

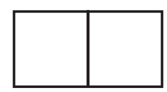
हम घनों को जोड़कर बनाई गई आकृतियों के भी विभिन्न दृश्य प्राप्त कर सकते हैं :

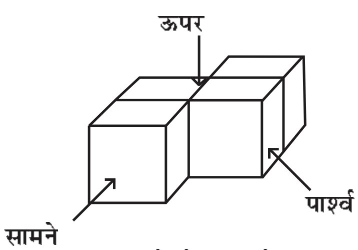


तीन घनों से बना ठोस

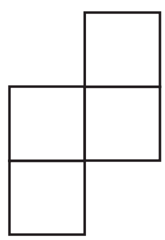

पार्श्व दृश्य

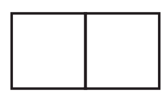

सामने से दृश्य

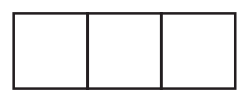

ऊपर से दृश्य

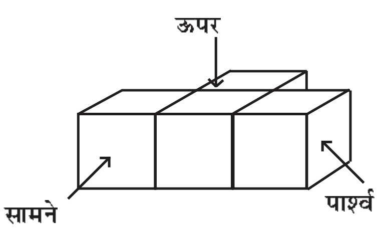


चार घनों से बना ठोस

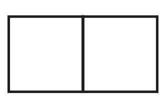

ऊपर से दृश्य

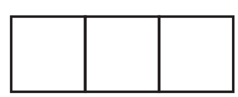

सामने से दृश्य

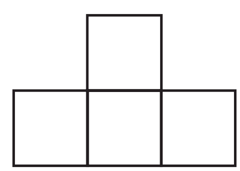

पार्श्व दृश्य



चार घनों से बना ठोस


पार्श्व दृश्य


सामने से दृश्य


ऊपर से दृश्य

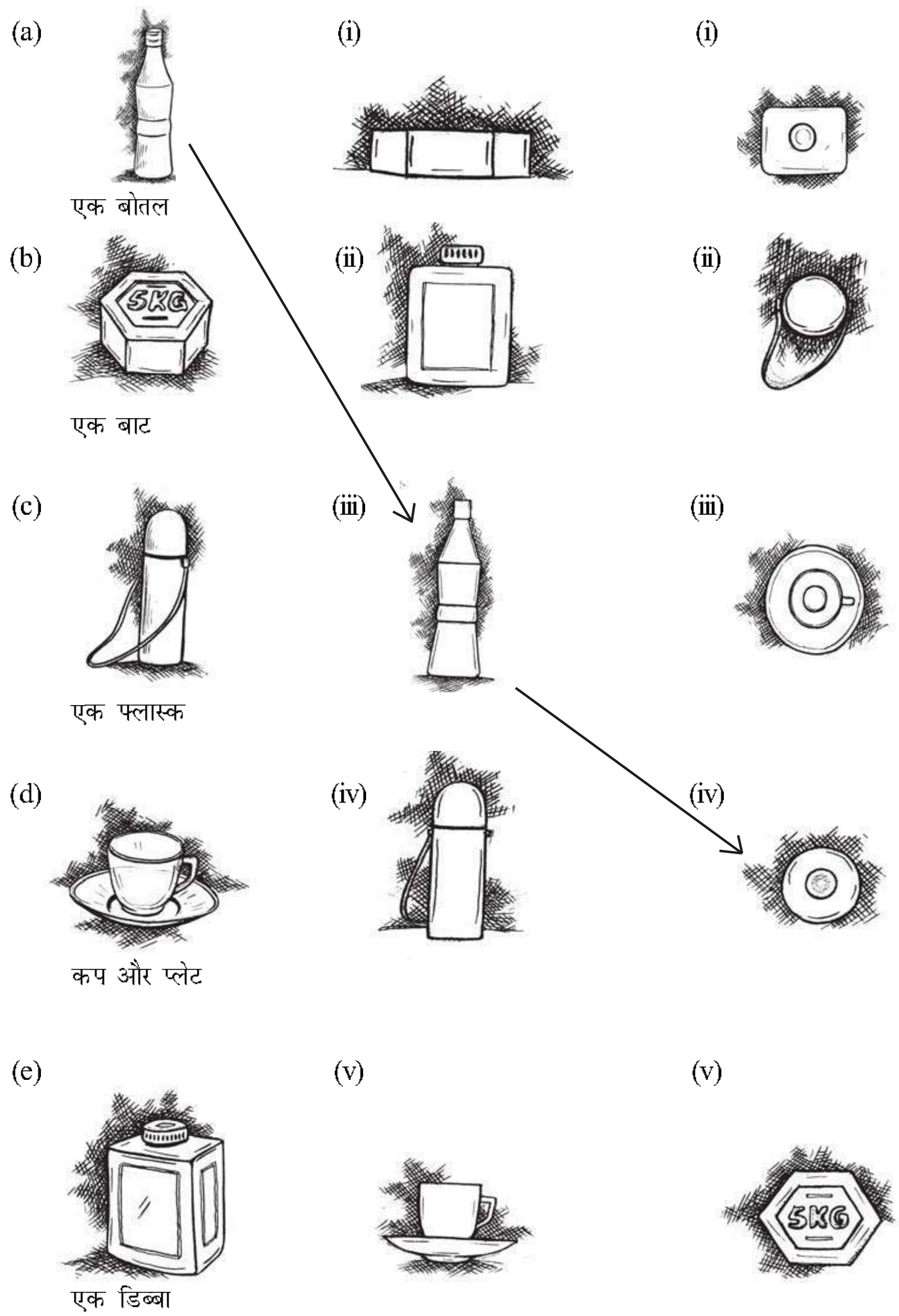
इन्हें कीजिए

अपने आसपास की विभिन्न वस्तुओं को विभिन्न स्थितियों से देखिए। अपने मित्रों के साथ उनके विभिन्न दृश्यों की चर्चा कीजिए।

प्रश्नावली 10.1

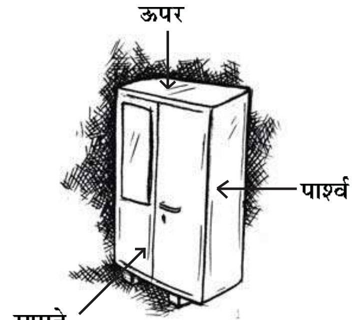
1. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए, दो दृश्य दिए गए हैं। प्रत्येक ठोस के लिए संगत, ऊपर से दृश्य और सामने से दृश्य का मिलान कीजिए। इनमें से एक आपके लिए किया गया है।

वस्तु **सामने से दृश्य** **ऊपर से दृश्य**



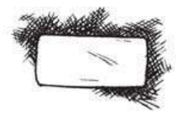
2. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए, तीन दृश्य दिए गए हैं। प्रत्येक ठोस के संगत, ऊपर से दृश्य, सामने से दृश्य और पार्श्व दृश्य की पहचान कीजिए।

(a) **वस्तु** (i) (ii) (iii)



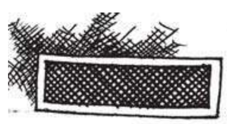
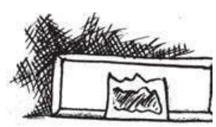
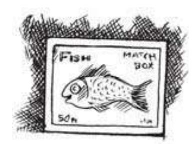
एक अलमारी



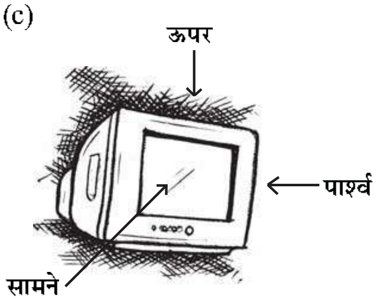


(b)

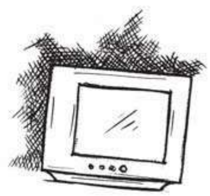
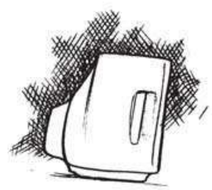
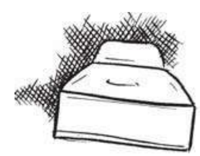
एक माचिस की डिब्बी

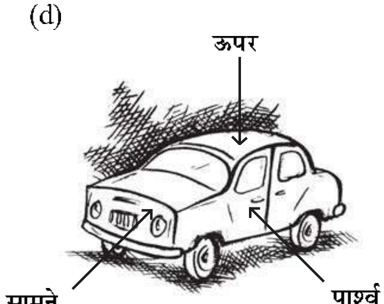
(c)



एक टेलीविज़न

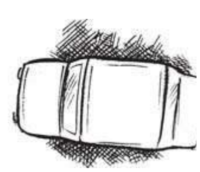




(d)



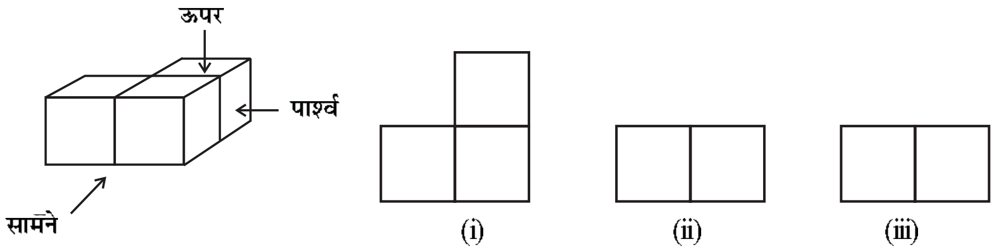
एक कार



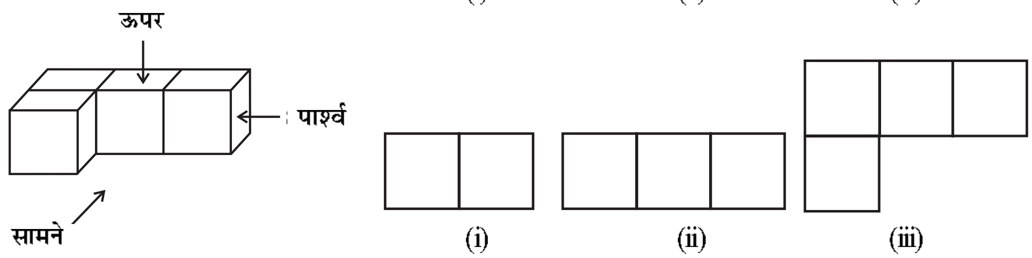


3. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए, ऊपर से दृश्य, सामने से दृश्य और पार्श्व दृश्य की पहचान कीजिए :

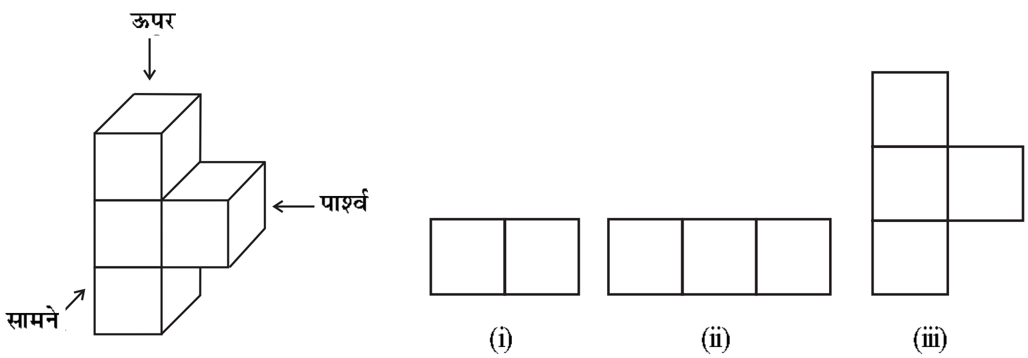
(a)



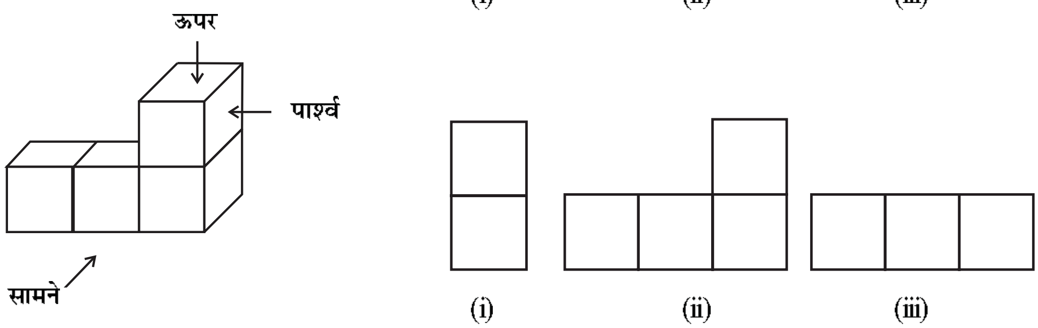
(b)



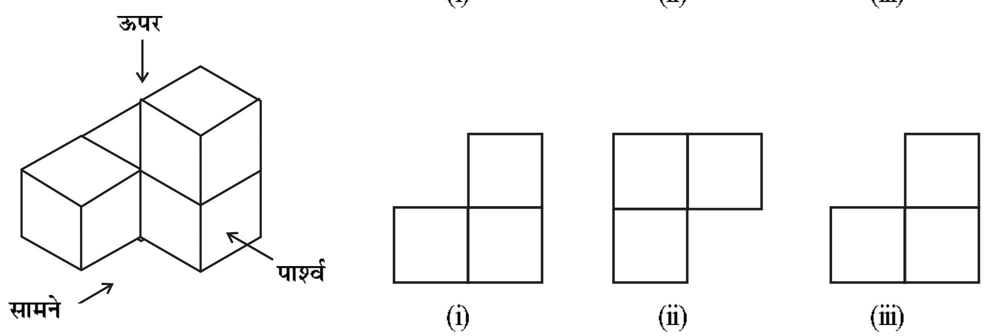
(c)



(d)

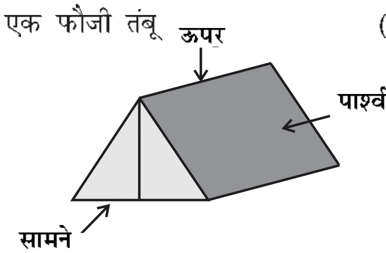


(e)

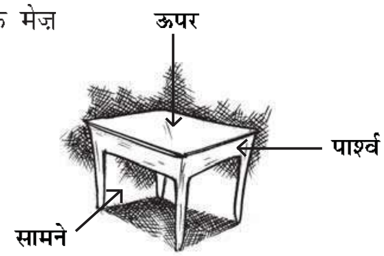


4. दी हुई वस्तुओं के, सामने से दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर से दृश्य खींचिए :

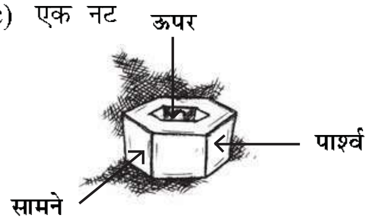
(a) एक फौजी तंबू



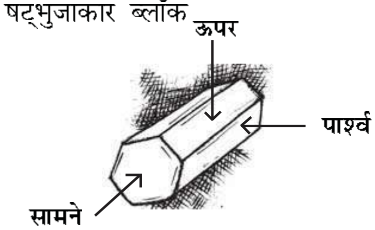
(b) एक मेज़



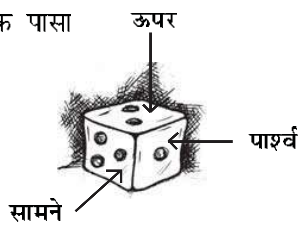
(c) एक नट



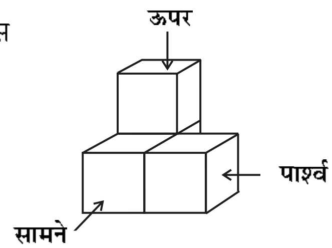
(d) एक षट्भुजाकार ब्लॉक



(e) एक पासा



(f) एक ठोस

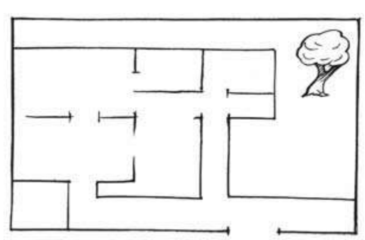


10.3 अपने आसपास के स्थान का प्रतिचित्रण

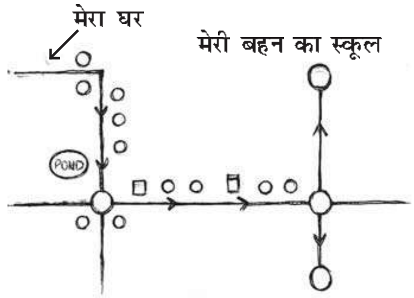
आप अपनी प्राथमिक कक्षाओं से ही मानचित्रों (maps) या प्रतिचित्रों के साथ कार्य करते आ रहे हैं। भूगोल (geography) में, आपसे मानचित्र पर एक विशेष राज्य, एक विशेष नदी, पर्वत इत्यादि का स्थान बताने को कहा गया था। इतिहास में, आपसे बहुत पहले हुई घटना के स्थान को बताने को संभवत: कहा गया होगा। आपने नदियों, सड़कों, रेल लाइनों, व्यापारिक तथा अन्य बहुत से मार्गों को खींचा (या उनका चित्रण किया) है।

हम मानचित्रों को किस प्रकार पढ़ते हैं? एक मानचित्र को पढ़ते समय, हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं और क्या समझ सकते हैं? एक मानचित्र में कौन-सी सूचनाएँ होती हैं और कौन-सी सूचनाएँ नहीं होती हैं? क्या यह एक चित्र से किसी अर्थ में भिन्न है? इस अनुच्छेद में, हम इन प्रश्नों में से कुछ के उत्तर ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। किसी घर के मानचित्र को देखिए, जिसका चित्र साथ में ही दिया गया है (आकृति 10.1)।

आकृति 10.1



इस आकृति से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? जब हम कोई चित्र खींचते हैं, तो हम उसकी स्पष्ट दिखाई देने वाली जानकारियों की वास्तविकता को निरूपित करने का प्रयत्न करते हैं, जबकि एक मानचित्र किसी एक वस्तु का अन्य वस्तुओं के संदर्भ में केवल स्थान दर्शाता है। दूसरी बात यह है कि भिन्न-भिन्न व्यक्ति चित्रों का एक दूसरे से पूर्णतया भिन्न विवरण दे सकते हैं, जो इस पर निर्भर करेगा कि वे घर को किस स्थान से देख रहे हैं। परंतु यह एक मानचित्र की स्थिति में सत्य नहीं है। प्रेक्षक की स्थिति कहीं भी हो, घर का मानचित्र वही रहता है। दूसरे शब्दों में, **एक चित्र खींचने के लिए, परिप्रेक्ष्य अति महत्त्वपूर्ण है, परंतु यह एक मानचित्र के लिए अनुकूल नहीं है।**



आकृति 10.2

अब एक मानचित्र (आकृति 10.2) को देखिए जो एक सात वर्ष के बच्चे राघव ने अपने घर से अपने स्कूल तक के मार्ग के लिए खींचा है। इस मानचित्र से क्या आप बता सकते हैं कि

(i) राघव का स्कूल उसके घर से कितनी दूर है?

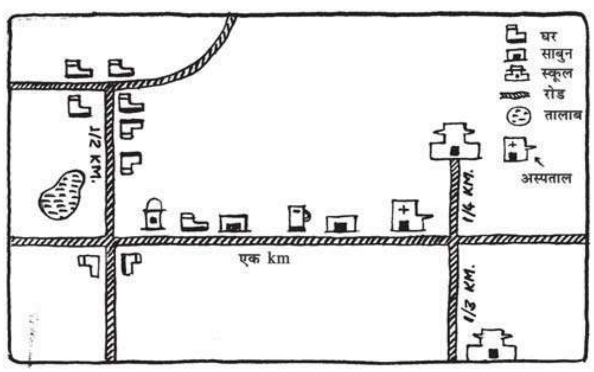
(ii) मानचित्र में प्रत्येक वृत्त क्या एक गोल चक्कर दर्शाएगा?

(iii) घर से किसका स्कूल अधिक निकट है–राघव का या उसकी बहन का?

दिए हुए मानचित्र को देखकर, उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर देना बहुत कठिन है। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों?

इसका कारण यह है कि हम नहीं जानते कि इसमें दूरियाँ सही (उचित) प्रकार से खींची गई हैं अथवा खींचे गए वृत्त गोल चक्कर हैं या कुछ और निरूपित करते हैं।

अब एक अन्य मानचित्र को देखिए, जो उसकी 10 वर्षीय बहन मीना ने अपने घर से अपने स्कूल का मार्ग दर्शाने के लिए खींचा है (आकृति 10.3)।



आकृति 10.3

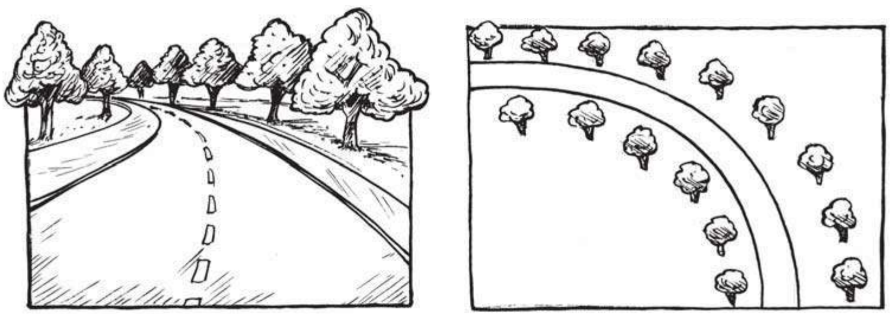
यह मानचित्र पिछले मानचित्र से भिन्न है। यहाँ, मीना ने भिन्न-भिन्न सीमा-चिह्नों (landmarks) के लिए भिन्न-भिन्न संकेतों का प्रयोग किया है। दूसरी बात यह है कि लंबी दूरियों के लिए लंबे रेखाखंड खींचे गए हैं तथा छोटे रेखाखंड खींचे गए हैं। अर्थात् उसने इस मानचित्र को एक पैमाने (scale) के अनुसार खींचा है। अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं :

- राघव का स्कूल उसके निवास स्थान से कितनी दूरी पर है?
- किसका स्कूल उनके घर से अधिक निकट है–राघव का या मीना का?
- मार्ग में कौन-कौन से महत्त्वपूर्ण सीमा-चिह्न हैं?

इस प्रकार, हम यह अनुभव करते हैं कि कुछ संकेतों का प्रयोग करने और दूरियों का वर्णन करने (जानकारी देने) से हमें मानचित्र को पढ़ने में सहायता मिलती है। ध्यान दीजिए कि मानचित्र पर दर्शाई गई दूरियाँ भूमि पर वास्तविक दूरियों के समानुपातिक (proportional) हैं। यह एक उपयुक्त पैमाना मानकर किया जाता है। एक मानचित्र को खींचते (या पढ़ते) समय यह ध्यान रखना चाहिए उसे किस पैमाने से खींचना है (या वह किस पैमाने से खींचा गया है), अर्थात् कितनी वास्तविक दूरी को मानचित्र पर 1 mm या 1 cm दूरी से व्यक्त किया गया है। इसका अर्थ

है कि यदि कोई व्यक्ति, एक मानचित्र खींचता है, तो उसे यह निर्णय करना पड़ता है कि उस मानचित्र में 1 cm स्थान एक निश्चित दूरी जैसे कि 1 km या 10 km दर्शाता है। यह पैमाना एक मानचित्र से दूसरे मानचित्र में बदल सकता है, परंतु एक ही मानचित्र में नहीं बदलता है। उदाहरणार्थ, भारत के मानचित्र को दिल्ली के मानचित्र के साथ रखकर देखिए।

आप देखेंगे कि जब मानचित्रों को विभिन्न पैमानों के अनुसार खींचा जाता है, तो दो मानचित्रों में दूरियाँ बदल जाती हैं। अर्थात् दिल्ली के मानचित्र में 1 cm स्थान भारत के मानचित्र की दूरियों की तुलना में छोटी दूरियाँ निरूपित करेगा। स्थान जितना बड़ा होगा और खींचे गए मानचित्र का साइज़ जितना छोटा होगा उतनी ही अधिक दूरी 1 cm द्वारा निरूपित होगी। इस प्रकार, सारांश, हम कह सकते हैं कि

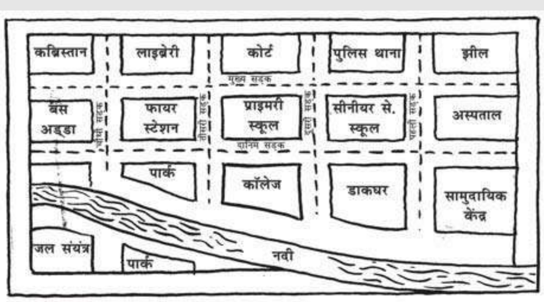


आकृति 10.4

1. एक मानचित्र एक विशेष वस्तु/स्थान की अन्य वस्तुओं/स्थानों के संदर्भ में स्थिति दर्शाता है।
2. विभिन्न वस्तुओं / स्थानों को दर्शाने के लिए उपयुक्त संकेतों का प्रयोग किया जाता है।
3. एक मानचित्र में कोई संदर्भ या परिप्रेक्ष्य नहीं होता है, अर्थात् प्रेक्षक के निकट वाली वस्तुएँ उसी साइज़ में दर्शाई जाती हैं, जितनी दूर वाली। उदाहरणार्थ, आकृति 10.4 को देखिए।
4. प्रत्येक मानचित्र में एक पैमाना संबद्ध होता है, जो एक विशेष मानचित्र के लिए स्थिर (fixed) होता है। यह वास्तविक दूरियों को कागज़ पर समानुपातिक रूप से छोटा (कम) कर देता है।

इन्हें कीजिए

1. एक नगर के संलग्न मानचित्र को देखिए (आकृति 10.5):



आकृति 10.5

(a) मानचित्र में इस प्रकार रंग भरिए : नीला – जल, लाल – फायर स्टेशन, नारंगी – लाइब्रेरी, पीला – स्कूल, हरा – पार्क, गुलाबी – सामुदायिक केंद्र, बैंगनी – अस्पताल, भूरा – कब्रिस्तान।

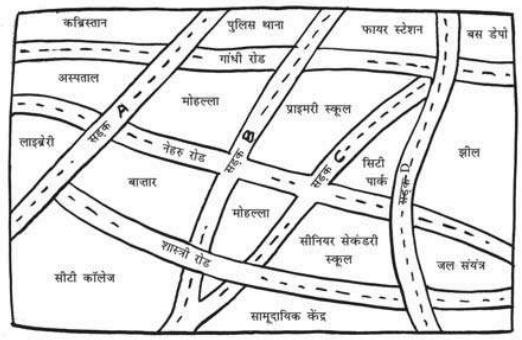
(b) दूसरी सड़क और दानिम सड़क के प्रतिच्छेदन (intersection) पर एक हरा 'X' अंकित कीजिए। जहाँ नदी, तीसरी सड़क से मिलती है, वहाँ एक काला 'Y' अंकित कीजिए तथा मुख्य सड़क और पहली सड़क के प्रतिच्छेदन पर एक लाल 'Z' अंकित कीजिए।

(c) कॉलेज से झील तक के लिए एक छोटा सड़क का मार्ग गहरे गुलाबी रंग में खींचिए।

2. अपने घर से अपने स्कूल तक के मार्ग का उस पर आने वाले महत्त्वपूर्ण सीमा-चिह्नों को दर्शाते हुए एक मानचित्र खींचिए।

प्रश्नावली 10.2

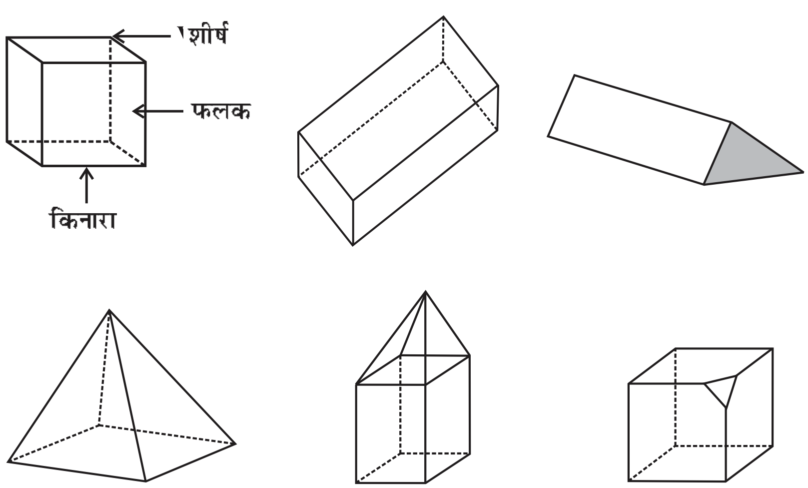
1. एक नगर के दिए हुए मानचित्र को देखिए। निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :



   (a) इस मानचित्र में इस प्रकार रंग भरिए :
   नीला – जल; लाल – फायर-स्टेशन; नारंगी – लाइब्रेरी; पीला – स्कूल; हरा – पार्क; गुलाबी – कॉलेज; बैंगनी – अस्पताल; भूरा – कब्रिस्तान।
   (b) सड़क C और नेहरू रोड के प्रतिच्छेदन पर एक हरा 'X' तथा गांधी रोड और सड़क A के प्रतिच्छेदन पर एक हरा 'Y' खींचिए।
   (c) लाइब्रेरी से बस डिपो तक एक छोटा सड़क मार्ग लाल रंग से खींचिए।
   (d) कौन अधिक पूर्व में है – सिटी पार्क या बाज़ार?
   (e) कौन अधिक दक्षिण में है – प्राइमरी स्कूल या सीनियर सैकेंडरी स्कूल?
2. उचित पैमाने और विभिन्न वस्तुओं के लिए संकेतों का प्रयोग करते हुए, अपनी कक्षा के कमरे का एक मानचित्र खींचिए।
3. उचित पैमाने और विभिन्न विशेषताओं (वस्तुओं) जैसे खेल का मैदान, मुख्य भवन, बगीचा इत्यादि के लिए संकेतों का प्रयोग करते हुए, अपने विद्यालय परिसर (compound) का एक मानचित्र खींचिए।
4. अपने मित्र के मार्गदर्शन के लिए एक मानचित्र खींचिए ताकि वह आपके घर बिना किसी कठिनाई के पहुँच जाए।

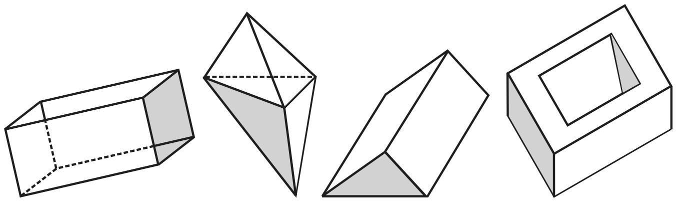
10.4 फलक, किनारे और शीर्ष

नीचे दिए ठोसों को देखिए :

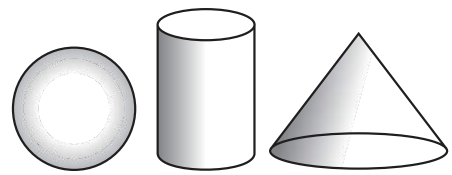


पहेली : मेरा कोई शीर्ष नहीं है। मेरा कोई सपाट फलक नहीं है। मैं कौन हूँ?

उपरोक्त ठोसों में से प्रत्येक ठोस बहुभुजीय क्षेत्रों (polygonal regions) से मिलकर बना है, जो उसके **फलक (faces)** कहलाते हैं। ये फलक **किनारों** या **कोरों (edges)** में मिलते हैं, जो रेखाखंड हैं तथा ये किनारे शीर्षों में मिलते हैं, जो **बिंदु** हैं। ऐसे ठोसों को **बहुफलक** या **बहुफलकी (polyhedra)** कहते हैं।

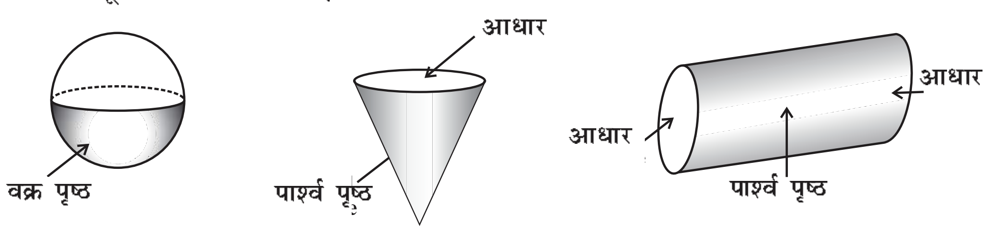


ये बहुफलक हैं।



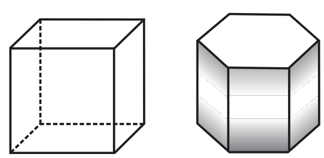
ये बहुफलक नहीं हैं।

बहुफलक उन ठोसों से किस प्रकार भिन्न हैं जो बहुफलक नहीं (अबहुफलक) हैं? निम्न आकृतियों का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। आप तीन प्रकारों के सामान्य ठोसों के बारे में जानते हैं।

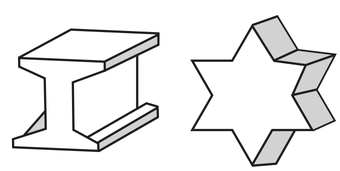


गोला **शंकु** **बेलन**

उत्तल बहुफलक : आपको उत्तल (convex) बहुभुज की अवधारणा के बारे में याद होगा। उत्तल बहुफलक की अवधारणा भी उसी प्रकार की है।

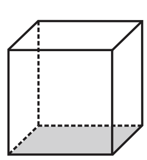


ये उत्तल बहुफलक हैं।

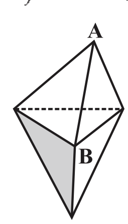


ये उत्तल बहुफलक नहीं हैं।

सम बहुफलक : एक बहुफलक तब **सम बहुफलक (regular polyhedron)** कहलाता है जब उसके सभी फलक सर्वांगसम सम बहुभुजों (regular polygons) से बने हों तथा **प्रत्येक** शीर्ष पर मिलने वाले फलकों की संख्या समान हो।

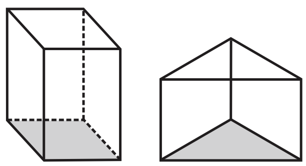


यह एक सम बहुफलक है। इसके सभी फलक सर्वांगसम सम बहुभुज हैं। फलकों की समान संख्याओं से शीर्ष बनते हैं।

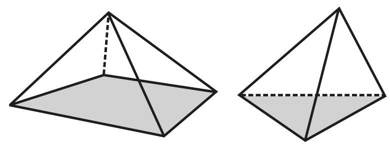


यह एक सम बहुफलक नहीं है। सभी फलक सर्वांगसम नहीं हैं, परंतु शीर्ष फलकों की समान संख्याओं से नहीं बनते हैं। A पर 3 फलक मिलते हैं, परंतु B पर 4 फलक मिलते हैं।

हमारे आसपास बहुफलक परिवार (कुल या family) में मिलने वाले दो महत्त्वपूर्ण सदस्य प्रिज़्म (prisms) और पिरामिड (pyramids) हैं।



ये प्रिज़्म हैं।



ये पिरामिड हैं।

हम कहते हैं कि एक बहुफलक **प्रिज़्म** होता है, जब उसका आधार (base) और ऊपरी सिरा (top) सर्वांगसम बहुभुज हों तथा उसके अन्य फलक, अर्थात् पार्श्व फलक (lateral faces) समांतर चतुर्भुजों के आकार के हों।

इसके दूसरी ओर, एक **पिरामिड** वह बहुफलक होता है जिसका आधार (कितनी भी भुजाओं वाला) एक बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक एक शीर्ष वाले त्रिभुज होते हैं। (यदि आप एक बहुभुज के सभी कोनों या शीर्षों को एक ऐसे बिंदु से मिला दें जो उसके तल (plane) में न हो, तो आपको पिरामिड का एक मॉडल (model) प्राप्त हो जाएगा।)

एक प्रिज़्म या पिरामिड को उसके आधार के अनुसार नामांकित किया जाता है। इस प्रकार, एक षट्भुजीय (hexagonal) प्रिज़्म का आधार एक षट्भुज होता है तथा एक त्रिभुजाकार पिरामिड का आधार एक त्रिभुज होता है। तब, एक आयताकार प्रिज़्म क्या है? एक वर्ग पिरामिड क्या है? स्पष्टत:, इनके आधार क्रमश: आयत और वर्ग हैं।

इन्हें कीजिए

निम्नलिखित बहुफलकों के लिए फलकों (faces), किनारों (edges) और शीर्षों (vertices) की संख्याओं को सारणीबद्ध कीजिए : (यहाँ V शीर्षों की संख्या, F फलकों की संख्या तथा E किनारों की संख्या प्रदर्शित करता है।)

ठोस	F	V	E	F+V	E+2
घनाभ					
त्रिभुजाकार					
त्रिभुजाकार प्रिज़्म					
वर्ग आधार वाला पिरामिड					
वर्ग आधार वाला प्रिज़्म					

आप अंतिम दो स्तंभों से क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या प्रत्येक स्थिति में आप $F+V=E+2$, अर्थात् $F+V-E=2$ प्राप्त करते हैं? यह संबंध **ऑयलर सूत्र (Euler's Formula)** कहलाता है। वास्तव में, यह सूत्र प्रत्येक बहुफलक के लिए सत्य है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

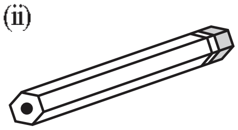
यदि किसी ठोस में से कोई टुकड़ा काट दिया जाए, तो F, V और E में क्या परिवर्तन होता है? (प्रारंभ करने के लिए, एक प्लास्टिसीन का घन लीजिए तथा उसका एक कोना काटकर इसकी खोज कीजिए।)

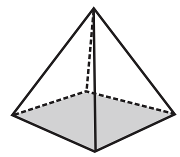
प्रश्नावली 10.3

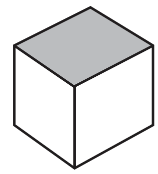
1. क्या किसी बहुफलक के फलक नीचे दिए अनुसार हो सकते हैं?
   (i) 3 त्रिभुज (ii) 4 त्रिभुज (iii) एक वर्ग और चार त्रिभुज
2. क्या ऐसा बहुफलक संभव है जिसके फलकों की संख्या कोई भी संख्या हो?
   (**संकेत** : एक पिरामिड के बारे में सोचिए।)
3. निम्नलिखित में से कौन-कौन प्रिज़्म हैं?

(i)

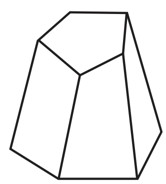
एक कील

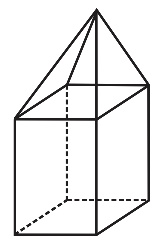
(ii)

बिना छिली हुई पेंसिल

(iii)

कागज़ों पर रखने का भार

(iv)

एक बॉक्स

4. (i) प्रिज़्म और बेलन किस प्रकार एक जैसे हैं?
   (ii) पिरामिड और शंकु किस प्रकार एक जैसे हैं?
5. क्या एक वर्ग प्रिज़्म और एक घन एक ही होते हैं? स्पष्ट कीजिए।
6. इन ठोसों के लिए ऑयलर सूत्र का सत्यापन कीजिए :

(i)


(ii)


7. ऑयलर सूत्र का प्रयोग करते हुए, अज्ञात संख्या को ज्ञात कीजिए :

फलक	?	5	20
शीर्ष	6	?	12
किनारे	12	9	?

8. क्या किसी बहुफलक के 10 फलक, 20 किनारे और 15 शीर्ष हो सकते हैं?

हमने क्या चर्चा की?

1. 2D और 3D वस्तुओं को पहचानना।
2. संयोजित या वस्तुओं के मेल में विभिन्न आकारों को पहचानना।
3. भिन्न-भिन्न स्थानों से 3D वस्तुओं के भिन्न-भिन्न दृश्य मिलते हैं।
4. एक मानचित्र एक चित्र से भिन्न होता है।
5. एक मानचित्र एक विशेष वस्तु/ स्थान की अन्य वस्तुओं/ स्थानों के संदर्भ में सही-सही स्थितियाँ दर्शाता है।
6. विभिन्न वस्तुओं/ स्थानों को दर्शाने के लिए, मानचित्र में संकेतों का प्रयोग किया जाता है।
7. एक मानचित्र में कोई संदर्भ या परिप्रेक्ष्य नहीं होता है।
8. प्रत्येक मानचित्र में एक पैमाना संबद्ध होता है, जो एक विशेष मानचित्र के लिए एक ही रहता है।
9. किसी भी बहुफलक के लिए सूत्र $F + V - E = 2$ सत्य होता है, जहाँ F फलकों की संख्या, V शीर्षों की संख्या तथा E किनारों की संख्या को प्रदर्शित करता है। यह संबंध **ऑयलर सूत्र** कहलाता है।

अध्याय

11

क्षेत्रमिति

11.1 भूमिका

हम अध्ययन कर चुके हैं कि किसी बंद समतल आकृति की सीमा के चारों ओर की दूरी उसका परिमाप कहलाता है और उस आकृति द्वारा घिरे हुए क्षेत्र को उसका क्षेत्रफल कहते हैं। हम त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि विभिन्न समतल आकृतियों का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं तथा आयताकार आकार के किनारों अथवा पगडंडियों का क्षेत्रफल भी सीख चुके हैं।

इस अध्याय में हम चतुर्भुज जैसी दूसरी बंद आकृतियों के क्षेत्रफल एवं परिमाप से संबंधित समस्याएँ हल करने का प्रयत्न करेंगे। हम घन, घनाभ और बेलन जैसे ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन का भी अध्ययन करेंगे।

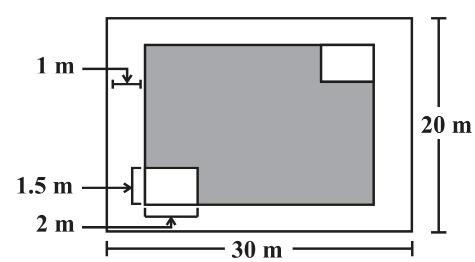
11.2 आइए स्मरण करते हैं

अपने पूर्व ज्ञान के सर्वेक्षण के लिए हम एक उदाहरण की चर्चा करते हैं।

यह एक आयताकार बगीचे की आकृति है जिसकी लंबाई 30 मीटर और चौड़ाई 20 मीटर है। (आकृति 11.1)

(i) इस बगीचे को चारों ओर से घेरने वाली बाड़ की लंबाई क्या है? बाड़ की लंबाई ज्ञात करने के लिए हमें इस बगीचे का परिमाप ज्ञात करने की आवश्यकता है जो कि 100 मीटर है (जाँच कीजिए)।

(ii) कितनी भूमि बगीचे द्वारा व्याप्त है? इस बगीचे द्वारा व्याप्त भूमि ज्ञात करने के लिए हमें इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है जो कि 600 वर्ग मीटर (m^2) है (कैसे?)



आकृति 11.1

(iii) बगीचे के परिमाप के साथ-साथ अंदर की तरफ़ एक मीटर चौड़ा रास्ता है जिस पर सीमेंट को लगवाना है। यदि 4 वर्ग मीटर (m^2) क्षेत्रफल पर सीमेंट लगवाने के लिए एक बोरी सीमेंट चाहिए तो इस पूरे रास्ते पर सीमेंट लगवाने के लिए कितनी सीमेंट की बोरियों की आवश्यकता है?

हम कह सकते हैं कि उपयोग की

गई सीमेंट की बोरियों की संख्या $= \dfrac{\text{रास्ते का क्षेत्रफल}}{\text{1 बोरी द्वारा सीमेंट किया गया क्षेत्रफल}}$

सीमेंट से बनने वाले रास्ते का क्षेत्रफल =

बगीचे का क्षेत्रफल – बगीचे का वह क्षेत्रफल जिस पर सीमेंट नहीं होना है।

रास्ते की चौड़ाई 1 मीटर है, इसलिए सीमेंट नहीं किए जाने वाला आयताकार क्षेत्रफल $(30 - 2) \times (20 - 2)\ m^2$ है। यह $28 \times 18\ m^2$ है।

अतः उपयोग किए जाने वाले सीमेंट की बोरियों की संख्या = ...

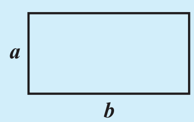
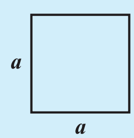
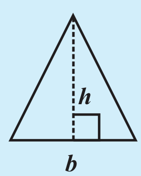
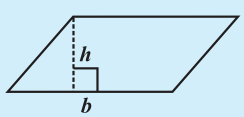
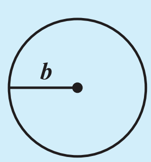
(iv) जैसा कि आरेख (आकृति 11.1) में दर्शाया गया है। इस बगीचे में फूलों की दो आयताकार क्यारियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक का आकार $1.5\ m \times 2\ m$ है और शेष बगीचे के ऊपर घास है। घास द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आयताकार क्यारियों का क्षेत्रफल = ...

रास्ते पर सीमेंट लगवाने के बाद बगीचे का बचा हुआ क्षेत्रफल = ...

घास द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल = ...

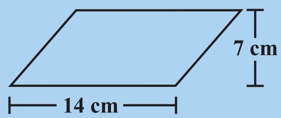
यदि हमें कुछ निश्चित माप दिए हुए हैं, तो आयतों के अतिरिक्त हम कुछ और ज्यामितीय आकारों का भी क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। निम्नलिखित का स्मरण करने और मिलान करने का प्रयत्न कीजिए।

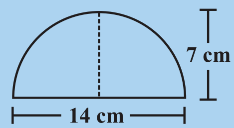
आरेख	आकार	क्षेत्रफल
	आयत	$a \times a$
	वर्ग	$b \times h$
	त्रिभुज	πb^2
	समांतर चतुर्भुज	$\frac{1}{2} b \times h$
	वृत्त	$a \times b$

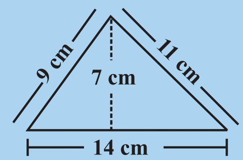
क्या आप उपर्युक्त आकारों में से प्रत्येक के परिमाप का सूत्र लिख सकते हैं?

प्रयास कीजिए

(a) निम्नलिखित आकृतियों का उनके क्षेत्रफलों से मिलान कीजिए :

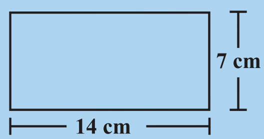


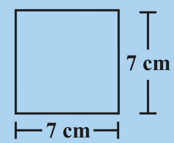




$49\ cm^2$
$77\ cm^2$
$98\ cm^2$

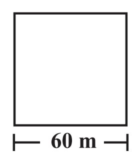
(b) प्रत्येक आकार का परिमाप लिखिए।



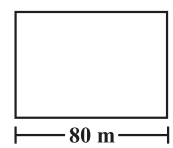


प्रश्नावली 11.1

1. जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है, एक आयताकार और एक वर्गाकार खेत के माप दिए हुए हैं। यदि इनके परिमाप समान हैं, तो किस खेत का क्षेत्रफल अधिक होगा?

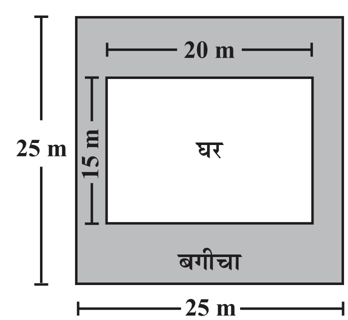


(a)

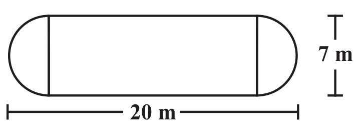


(b)

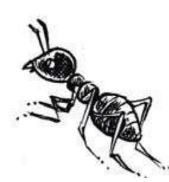
2. श्रीमती कौशिक के पास चित्र में दर्शाए गए मापों वाला एक वर्गाकार प्लाट है। वह प्लॉट के बीच में एक घर बनाना चाहती हैं। घर के चारों ओर एक बगीचा विकसित किया गया है। 55 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से इस बगीचे को विकसित करने का व्यय ज्ञात कीजिए।



3. जैसा कि आरेख में दर्शाया गया है, एक बगीचे का आकार मध्य में आयताकार है और किनारों पर अर्धवृत्त के रूप में है। इस बगीचे का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए [आयत की लंबाई $20 - (3.5 + 3.5)$ मीटर है।]

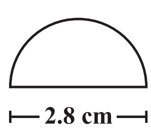


4. फर्श बनाने के लिए उपयोग की जाने वाली एक टाइल का आकार समांतर चतुर्भुज का है जिसका आधार 24 cm और संगत ऊँचाई 10 cm है। 1080 वर्ग मीटर क्षेत्रफल के एक फर्श को ढकने के लिए ऐसी कितनी टाइलों की आवश्यकता है? (फर्श के कोनों को भरने के लिए आवश्यकतानुसार आप टाइलों को किसी भी रूप में तोड़ सकते हैं।

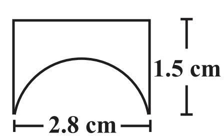


5. एक चींटी किसी फर्श पर बिखरे हुए विभिन्न आकारों के भोज्य पदार्थ के टुकड़ों के चारों ओर घूम रही है। भोज्य पदार्थ के किस टुकड़े के लिए चींटी को लंबा चक्कर लगाना पड़ेगा? स्मरण रखिए, वृत्त की परिधि सूत्र $c = 2\pi r$; जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है, की सहायता से प्राप्त की जा सकती है।

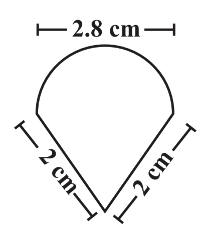
(a)

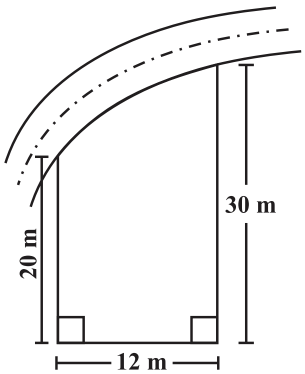


(b)

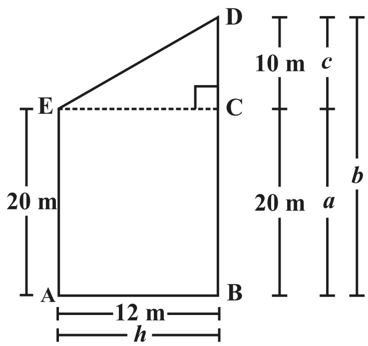


(c)





आकृति 11.2



आकृति 11.3

($b = c + a = 30$ m)

11.3 समलंब का क्षेत्रफल

नज़मा के पास मुख्य मार्ग के नजदीक एक प्लॉट है (आकृति 11.2)। उसका प्लॉट पड़ोस के दूसरे आयताकार प्लॉटों के आकार का नहीं है। इस प्लॉट में सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म समांतर है। इसलिए यह लगभग समलंब के आकार का है। क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, जैसा कि आकृति 11.3 में दर्शाया गया है, हम इस प्लॉट के शीर्षों को नाम देते हैं। EC $\parallel$ AB, खींचकर हम इसे दो भागों में बाँट सकते हैं जिनमें एक आयताकार आकार है और दूसरा त्रिभुज के आकार का है (यह C पर समकोण है) जैसा कि आकृति 11.3 में दर्शाया गया है।)

Δ ECD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \text{ m}^2$.

आयत ABCE का क्षेत्रफल $= h \times a = 12 \times 20 = 240 \text{ m}^2$.

समलंब चतुर्भुज ABDE का क्षेत्रफल $= \Delta$ ECD का क्षेत्रफल + आयत ABCE का क्षेत्रफल

$$= 60 + 240 = 300 \text{ m}^2$$

हम इन दो क्षेत्रफलों को संयुक्त रूप में लिखते हैं। इस प्रकार

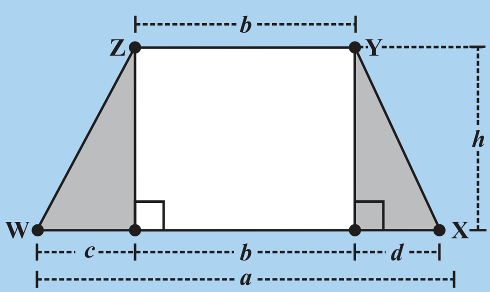
$$\text{समलंब ABDE का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} h \times c + h \times a = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$$

$$= h\left(\frac{c + 2a}{2}\right) = h\left(\frac{c + a + a}{2}\right)$$

$$= h\frac{(b+a)}{2} = \text{ऊँचाई} \frac{(\text{समांतर भुजाओं का योग})}{2}$$

इस व्यंजक में h, b तथा a का मान रखने पर हम $h\frac{(b+a)}{2} = 300 \text{ m}^2$ प्राप्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

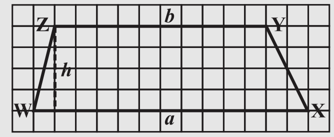


आकृति 11.4

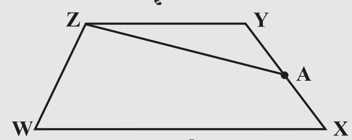
1. नज़मा की बहन के पास भी एक समलंब के आकार का प्लॉट है जैसा कि आकृति 11.4 में दर्शाया गया है इसे तीन भागों में बाँटिए। दर्शाइए कि समलंब WXYZ का क्षेत्रफल $= h\frac{(a+b)}{2}$
2. यदि $h = 10$ cm, $c = 6$ cm, $b = 12$ cm, $d = 4$ cm, तो इसके प्रत्येक भाग का मान अलग-अलग ज्ञात कीजिए और WXYZ का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इनका योग कीजिए। h, a तथा b का मान व्यंजक $\frac{h(a+b)}{2}$ में रखते हुए इसका सत्यापन कीजिए।

इन्हें कीजिए

1. आलेख कागज़ (ग्राफ पेपर) के अंदर कोई भी समलंब WXYZ खींचिए जैसा कि आकृति 11.5 में दर्शाया गया है और इसे काटकर बाहर निकाल लीजिए।
2. भुजा XY को मोड़कर इसका मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए और इसे A नाम दीजिए (आकृति 11.6)

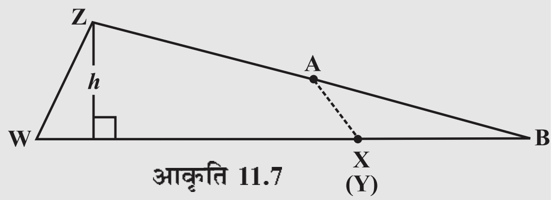


आकृति 11.5



आकृति 11.6

3. भुजा ZA के साथ-साथ काटते हुए समलंब WXYZ को दो भागों में काटिए। Δ ZYA को ऐसे रखिए जैसा कि आकृति 11.7 में दर्शाया गया है जिसमें AY को AX के ऊपर रखा गया है।
   बड़े त्रिभुज के आधार की लंबाई क्या है? इस त्रिभुज के क्षेत्रफल का व्यंजक लिखिए (आकृति 11.7)।



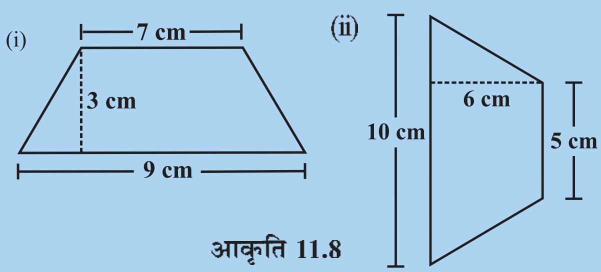
आकृति 11.7

4. इस त्रिभुज और समलंब WXYZ का क्षेत्रफल समान है। (कैसे)? त्रिभुज के क्षेत्रफल के व्यंजक का उपयोग करते हुए समलंब के क्षेत्रफल का व्यंजक प्राप्त कीजिए।

इस प्रकार समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें समांतर भुजाओं की लंबाई और इन दो समांतर भुजाओं के बीच लंबवत् दूरी की आवश्यकता है। समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योग और इनके बीच की लंबवत् दूरी के गुणनफल के आधे से हमें समलंब का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

प्रयास कीजिए

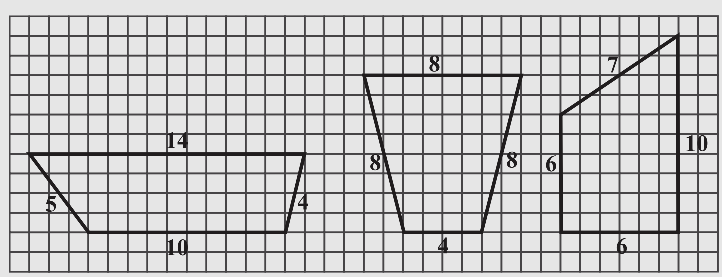
निम्नलिखित समलंबों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.8)



आकृति 11.8

इन्हें कीजिए

कक्षा VII में हमने विभिन्न परिमापों लेकिन समान क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुजों की रचना करना सीखा है। क्या यह समलंबों के लिए भी किया जा सकता है? जाँच कीजिए क्या विभिन्न परिमापों वाले निम्नलिखित समलंब क्षेत्रफल में समान हैं : (आकृति 11.9)



आकृति 11.9

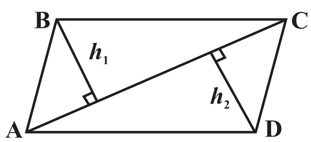
हम जानते हैं कि सभी सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में समान होती हैं। क्या हम कह सकते हैं कि समान क्षेत्रफल वाली आकृतियाँ सर्वांगसम भी होती हैं? क्या ये आकृतियाँ सर्वांगसम हैं?

एक वर्गाकार शीट पर कम से कम तीन ऐसे समलंब खींचिए जिनके परिमाप समान हों परंतु क्षेत्रफल विभिन्न हों।

11.4 सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल

किसी सामान्य चतुर्भुज का एक विकर्ण खींचकर उसे दो त्रिभुजों में विभक्त किया जा सकता है। यह 'विभक्त करने की क्रिया' सामान्य चतुर्भुज के लिए सूत्र ज्ञात करने में सहायता करती है। दी हुई आकृति का अध्ययन कीजिए। (आकृति 11.10)

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल



आकृति 11.10

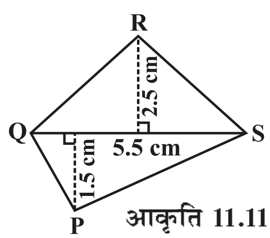
$= (\Delta$ ABC का क्षेत्रफल$) + (\Delta$ ADC का क्षेत्रफल$)$

$= (\frac{1}{2} AC \times h_1) + (\frac{1}{2} AC \times h_2) = \frac{1}{2} AC \times (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$ यहाँ AC की लंबाई d है।

उदाहरण 1 : आकृति 11.11 में दर्शाए गए चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $d = 5.5$ cm, $h_1 = 2.5$ cm, $h_2 = 1.5$ cm,



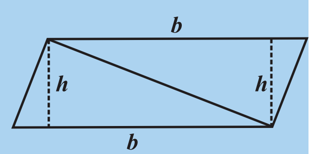
आकृति 11.11

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5 + 1.5) \text{ cm}^2$

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4 \text{ cm}^2 = 11 \text{ cm}^2$

प्रयास कीजिए

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज भी एक चतुर्भुज है। आइए, इसे भी हम दो त्रिभुजों में विभक्त करते हैं और इन दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। इस प्रकार समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात करते हैं। क्या यह सूत्र आपको पूर्व में ज्ञात सूत्र से मेल खाता है? (आकृति 11.12)



आकृति 11.12

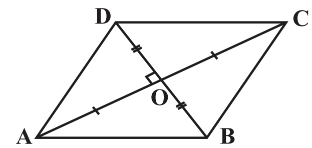
11.4.1 विशेष चतुर्भुजों का क्षेत्रफल

त्रिभुजों में विभक्त करने वाली इस विधि को हम समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करने में उपयोग कर सकते हैं। आकृति 11.13 में ABCD एक समचतुर्भुज है। इसलिए इसके विकर्ण एक दूसरे के लंब समद्विभाजक हैं।

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= (\Delta$ ACD का क्षेत्रफल$) + (\Delta$ ABC का क्षेत्रफल$)$

$$= (\frac{1}{2} \times AC \times OD) + (\frac{1}{2} \times AC \times OB) = \frac{1}{2} AC \times (OD + OB)$$

$$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \quad \text{जहाँ} \quad AC = d_1 \text{ और } BD = d_2$$



आकृति 11.13

दूसरे शब्दों में, समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है।

उदाहरण 2 : एक ऐसे समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्णों की लंबाइयाँ 10 cm और 8.2 cm हैं।

हल : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} d_1 d_2$, जहाँ d_1, d_2 विकर्णों की लंबाइयाँ हैं।

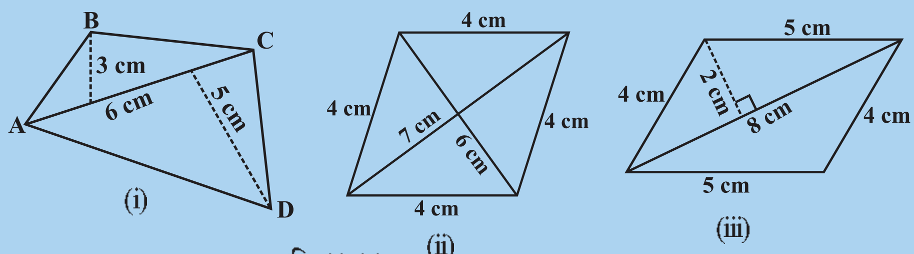
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 \text{ cm}^2 = 41 \text{ cm}^2.$$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

समांतर चतुर्भुज का विकर्ण खींचकर इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटा जाता है। क्या समलंब को भी दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है?

प्रयास कीजिए

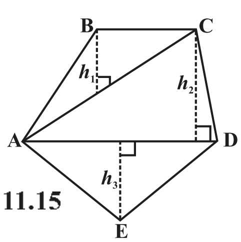
निम्नलिखित चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.14)



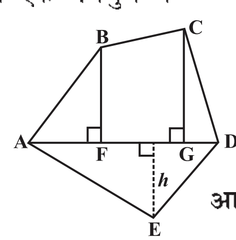
आकृति 11.14

11.5 बहुभुज का क्षेत्रफल

हम एक चतुर्भुज को त्रिभुजों में खंडित करते हैं और इसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार की विधि बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उपयोग की जा सकती है। एक पंचभुज के लिए निम्नलिखित पर विचार कीजिए (आकृति 11.15, 11.6)



आकृति 11.15



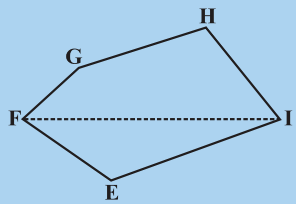
आकृति 11.16

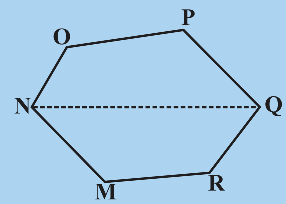
विकर्ण AC तथा AD की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को तीन भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔADC का क्षेत्रफल + ΔAED का क्षेत्रफल।

एक विकर्ण AD और इस पर दो लंब BF एवं CG की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को चार भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = समकोण त्रिभुज AFB का क्षेत्रफल + समलंब BFGC का क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुज CGD का क्षेत्रफल + Δ AED का क्षेत्रफल (समलंब BFGC की समांतर भुजाओं को पहचानिए)

प्रयास कीजिए

(i) निम्नलिखित बहुभुजों (आकृति 11.17) का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन्हें विभिन्न भागों (त्रिभुजों एवं समलंबों) में विभाजित कीजिए।





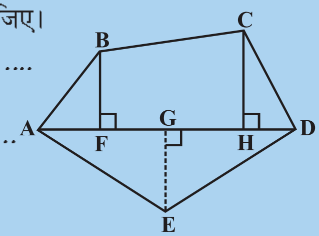
आकृति 11.17

बहुभुज EFGHI का एक विकर्ण FI है। बहुभुज MNOPQR का एक विकर्ण NQ है।

(ii) बहुभुज ABCDE को विभिन्न भागों में बाँटा गया है जैसा कि आकृति 11.18 में दर्शाया गया है। यदि AD = 8 cm, AH = 6 cm, AG = 4 cm, AF = 3 cm और लंब BF = 2 cm, CH = 3 cm, EG = 2.5 cm तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = Δ AFB का क्षेत्रफल + ...

Δ AFB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \text{AF} \times \text{BF} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = ...$



आकृति 11.18

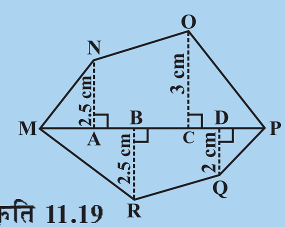
समलंब FBCH का क्षेत्रफल $= \text{FH} \times \frac{(\text{BF}+\text{CH})}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ [FH = AH – AF]

ΔCHD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \text{HD} \times \text{CH} = ...$; ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \text{AD} \times \text{GE} = ...$

इसलिए बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = ...

(iii) यदि MP = 9 cm, MD = 7 cm, MC = 6 cm, MB = 4 cm, MA = 2 cm तो बहुभुज MNOPQR (आकृति 11.19) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। NA, OC, QD एवं RB विकर्ण MP पर खींचे गए लंब हैं।



आकृति 11.19

उदाहरण 1 : समलंब के आकार के एक खेत का क्षेत्रफल 480 m^2 है; दो समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 15 m है और उनमें से एक समांतर भुजा की लंबाई 20 m है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : समलंब की समांतर भुजाओं में से एक की लंबाई $a = 20$ m, मान लीजिए दूसरी समांतर भुजा b है, ऊँचाई $h = 15$ m

समलंब का दिया हुआ क्षेत्रफल = 480 m^2

$$\text{समलंब का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} h (a+b)$$

इसलिए $480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b)$ अथवा $\frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$

अथवा $64 = 20 + b$ अथवा $b = 44$ m

अत: समलंब की दूसरी समांतर भुजा 44 m है।

उदाहरण 2 : एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 240 cm^2 है और विकर्णों में से एक की लंबाई 16cm है। दूसरा विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए एक विकर्ण की लंबाई $d_1 = 16$ cm

और दूसरे विकर्ण की लंबाई $= d_2$

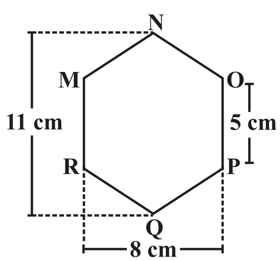
समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ d_1 \cdot d_2 = 240$

इसलिए, $\frac{1}{2} 16 \cdot d_2 = 240$

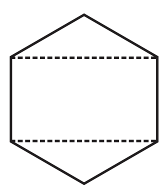
अत:, $d_2 = 30$ cm

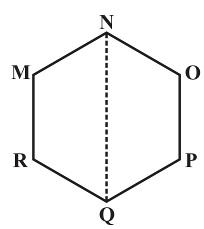
इस प्रकार दूसरे विकर्ण की लंबाई 30 cm है।

उदाहरण 3: MNOPQR (आकृति 11.20) एक षड्भुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 5 cm है। अमन और रिधिमा ने इसे दो विभिन्न प्रकार से विभाजित किया (आकृति 11.21)। दोनों प्रकार का उपयोग करते हुए इस षड्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.20


रिधिमा की विधि

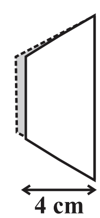


अमन की विधि

आकृति 11.21

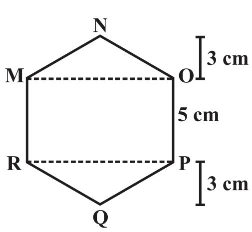
हल : अमन की विधि :

क्योंकि यह एक षड्भुज है इसलिए NQ इस षड्भुज को दो सर्वांगसम समलंबों में विभाजित करता है। आप इसे कागज़ मोड़ने की विधि से सत्यापित कर सकते हैं। (आकृति 11.22)



आकृति 11.22

अब समलंब MNQR का क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32$ cm^2.



आकृति 11.23

इसलिए षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल $= 2 \times 32 = 64$ cm^2.

रिधिमा की विधि :

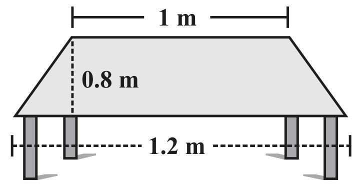
Δ MNO और Δ RPQ सर्वांगसम त्रिभुज हैं जिनमें से प्रत्येक का शीर्षलंब 3 cm है (आकृति 11.23) (1)

आप इन त्रिभुजों को काटकर और एक-दूसरे के ऊपर रखकर इसका सत्यापन कर सकते हैं।

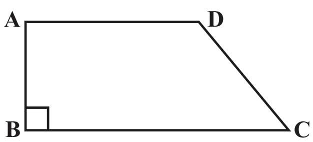
Δ MNO का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ cm}^2 = \Delta$ RPQ का क्षेत्रफल आयत MOPR का क्षेत्रफल $= 8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$.

अब, षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल $= 40 + 12 + 12 = 64 \text{ cm}^2$.

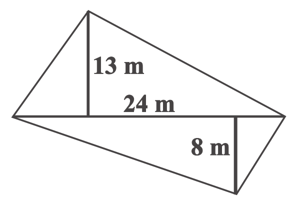
प्रश्नावली 11.2



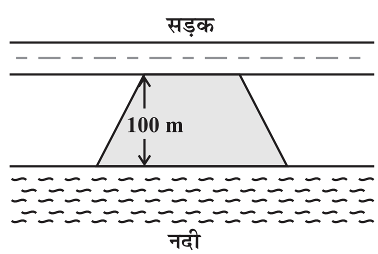
1. एक मेज़ के ऊपरी पृष्ठ (सतह) का आकार समलंब जैसा है। यदि इसकी समांतर भुजाएँ 1 m और 1.2 m हैं तथा इन समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 0.8 m है, तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक समलंब का क्षेत्रफल 34 cm^2 है और इसकी ऊँचाई 4 cm है। समांतर भुजाओं में से एक की 10 cm लंबाई है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।



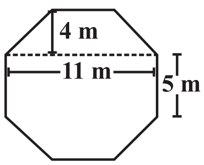
3. एक समलंब के आकार के खेत ABCD की बाड़ की लंबाई 120 m है। यदि BC = 48 m, CD = 17 m और AD = 40 m है, तो इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। भुजा AB समांतर भुजाओं AD तथा BC पर लंब है।
4. एक चतुर्भुज आकार के खेत का विकर्ण 24 m है और शेष सम्मुख शीर्षों से इस विकर्ण पर खींचे गए लंब 8 m एवं 13 m हैं। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



5. किसी समचतुर्भुज के विकर्ण 7.5 cm एवं 12 cm हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 5 cm और शीर्षलंब 4.8 cm है। यदि एक विकर्ण की लंबाई 8 cm है तो दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।
7. किसी भवन के फर्श में समचतुर्भुज के आकार की 3000 टाइलें हैं और इनमें से प्रत्येक के विकर्ण 45 cm एवं 30 cm लंबाई के हैं। 4 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से इस फर्श को पॉलिश करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

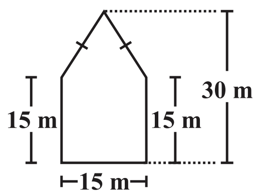


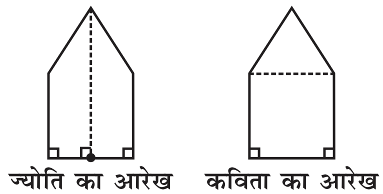
8. मोहन एक समलंब के आकार का खेत खरीदना चाहता है। इस खेत की नदी के साथ वाली भुजा सड़क के साथ वाली भुजा के समांतर हैं और लंबाई में दुगुनी है। यदि इस खेत का क्षेत्रफल $10{,}500 \text{ m}^2$ हैं और दो समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत् दूरी 100 m है, तो नदी के साथ वाली भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।



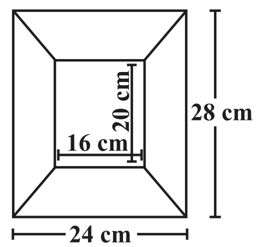
9. एक ऊपर उठे हुए चबूतरे का ऊपरी पृष्ठ अष्टभुज के आकार का है। जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। अष्टभुजी पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक पंचभुज आकार का बगीचा है जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ज्योति और कविता ने इसे दो विभिन्न तरीकों से विभाजित किया। दोनों तरीकों का उपयोग करते हुए इस बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की कोई और विधि बता सकते हैं?





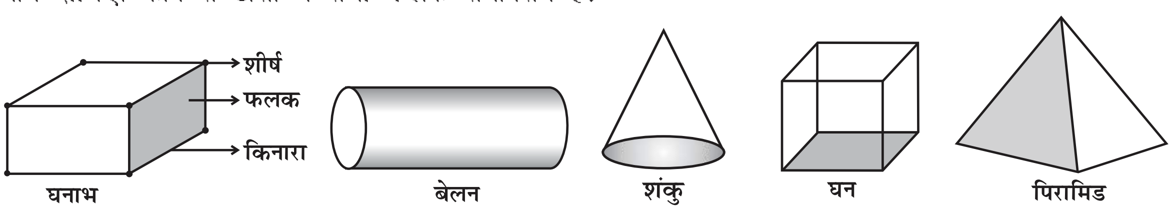
11. संलग्न पिक्चर फ्रेम के आरेख की बाहरी एवं अंतः विमाएँ क्रमशः 24 cm × 28 cm एवं 16 cm × 20 cm हैं। यदि फ्रेम के प्रत्येक खंड की चौड़ाई समान है, तो प्रत्येक खंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



11.6 ठोस आकार

आप अपनी पिछली कक्षाओं में अध्ययन कर चुके हैं कि द्विविमीय आकृतियों को त्रिविमीय आकारों के फलकों के रूप में पहचाना जा सकता है। अभी तक हमने जिन ठोसों का अध्ययन किया है उन पर ध्यान दीजिए (आकृति 11.24)।

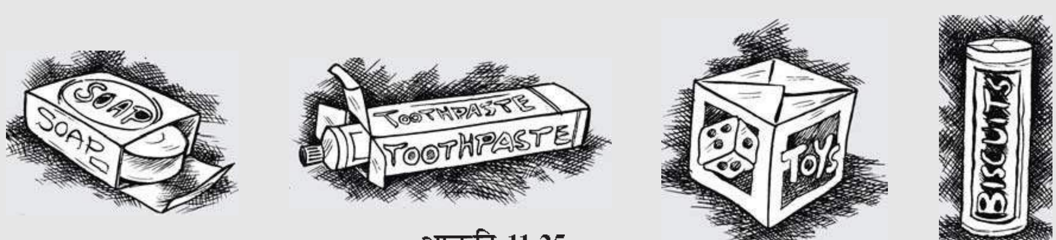
ध्यान दीजिए कि कुछ आकारों में दो या दो से अधिक समरूप (सर्वांगसम) फलक हैं। उनको नाम दीजिए। कौन से ठोसों में सभी फलक सर्वांगसम हैं?



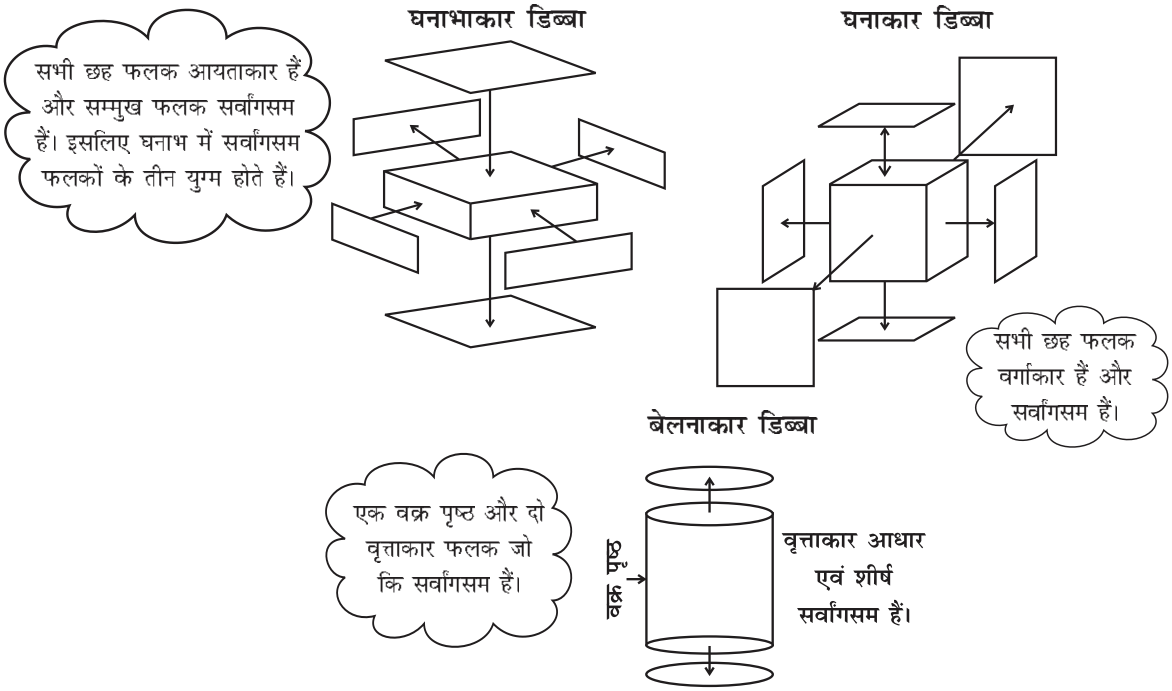
आकृति 11.24

इन्हें कीजिए

साबुन, खिलौने, मंजन, अल्पाहार इत्यादि प्रायः घनाभकार, घनाकार अथवा बेलनाकार डिब्बों में बंद आते हैं। ऐसे डिब्बों को एकत्रित कीजिए (आकृति 11.25)।

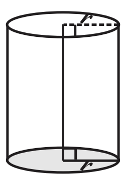


आकृति 11.25



अब एक समय में एक प्रकार के डिब्बे को लीजिए। इसके सभी फलकों को काटिए। प्रत्येक फलक के आकार को देखिए और समान फलकों को एक-दूसरे के ऊपर रखकर डिब्बे में फलकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

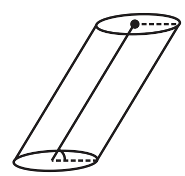
अपने प्रेक्षणों को लिखिए।



आकृति 11.26

(यह एक लंब वृत्तीय बेलन है।)

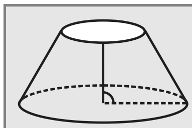
क्या आपने निम्नलिखित पर ध्यान दिया– बेलन के, सर्वांगसम वृत्ताकार फलक एक-दूसरे के समांतर हैं (आकृति 11.26)। ध्यान दीजिए कि वृत्ताकार फलकों के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड आधार पर लंब है। ऐसे बेलन लंबवृत्तीय बेलन कहलाते हैं। हम केवल इस प्रकार के बेलनों का ही अध्ययन करेंगे, यद्यपि दूसरे प्रकार के बेलन भी होते हैं (आकृति 11.27)।



आकृति 11.27

(यह एक लंब वृत्तीय बेलन नहीं है।)

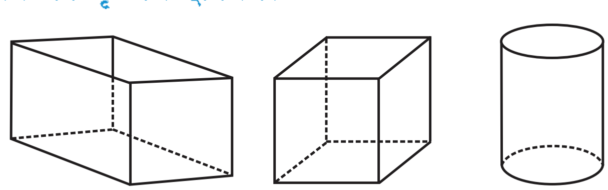
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



संलग्न आकृति में दर्शाए गए ठोस को बेलन कहना क्यों गलत है?

11.7 घन, घनाभ और बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

इमरान, मोनिका और जसपाल क्रमशः समान ऊँचाई वाले घनाभाकार, घनाकार और बेलनाकार डिब्बों को पेंट कर रहे हैं (आकृति 11.28)।



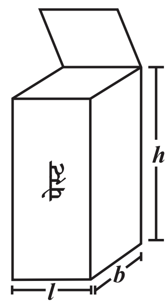
आकृति 11.28

वे यह ज्ञात करने का प्रयास करते हैं कि किसने अधिक क्षेत्रफल को पेंट किया है। हरी उन्हें सुझाव देता है कि प्रत्येक डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना उनकी मदद करेगा।

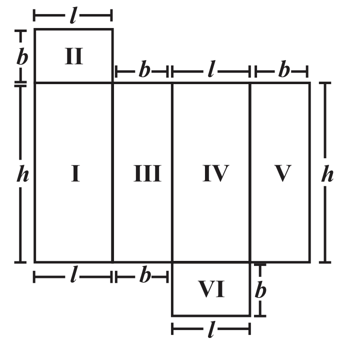
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और इनका योग कीजिए। किसी ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके फलकों के क्षेत्रफलों का योग होता है। और अधिक स्पष्ट करने के लिए हम प्रत्येक आकार को एक-एक करके लेते हैं।

11.7.1 घनाभ

मान लीजिए, आप एक घनाभकार डिब्बे (आकृति 11.29) को काटकर और खोलकर समतल फैला देते हैं (आकृति 11.30), हमें एक जाल (नेट) प्राप्त होता है।



आकृति 11.29



आकृति 11.30

प्रत्येक भुजा की विमा लिखिए। आप जानते हैं कि घनाभ में सर्वांगसम फलकों के तीन युग्म होते हैं। प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आप कौन-सा व्यंजक (सूत्र) उपयोग कर सकते हैं?

डिब्बे के सभी फलकों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = क्षेत्रफल I + क्षेत्रफल II + क्षेत्रफल III + क्षेत्रफल IV + क्षेत्रफल V + क्षेत्रफल VI

$= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

इसलिए कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l) = 2(lb + bh + hl)$

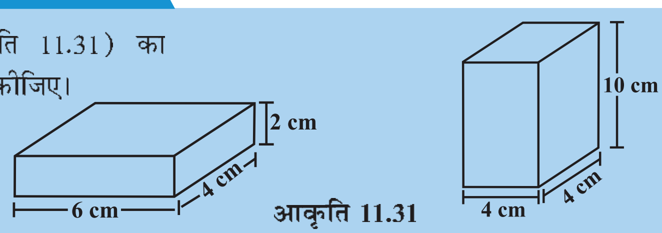
जिसमें h, l और b क्रमश: घनाभ की ऊँचाई, लंबाई और चौड़ाई हैं।

यदि उपर्युक्त दर्शाए गए डिब्बे की ऊँचाई, लंबाई और चौड़ाई क्रमश: 20 cm, 15 cm और 10 cm हैं, तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(20 \times 15 + 20 \times 10 + 10 \times 15)$

$= 2\,(300 + 200 + 150) = 1300\ m^2$

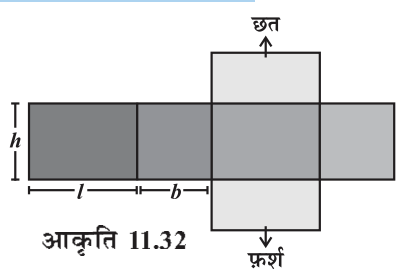
प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनाभों (आकृति 11.31) का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.31

- घनाभ की दीवारें (तल एवं शीर्ष के अतिरिक्त फलक) पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल प्रदान करती हैं। उदाहरणत: जिस घनाभाकार कमरे में आप बैठे हुए हैं उस कमरे की चारदीवारों का कुल क्षेत्रफल कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल है (आकृति 11.32)। अत: घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(h \times l + b \times h)$ अथवा $2h\,(l + b)$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



आकृति 11.32

इन्हें कीजिए

(i) एक घनाभाकार डस्टर (जिसे आपके अध्यापक कक्षा में उपयोग करते हैं) के पार्श्व पृष्ठ को भूरे रंग के कागज़ की पट्टी से इस प्रकार ढकिए कि यह डस्टर के पृष्ठ के चारों ओर बिल्कुल ठीक बैठे। कागज़ को हटाइए। कागज़ का क्षेत्रफल मापिए। क्या यह डस्टर का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल है?

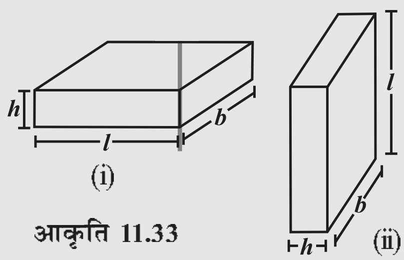
(ii) अपनी कक्षा के कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई मापिए और निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

(a) खिड़कियों और दरवाजों के क्षेत्रफल को छोड़कर कमरे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(b) इस कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(c) सफेदी किए जाने वाला, कमरे का कुल क्षेत्रफल।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



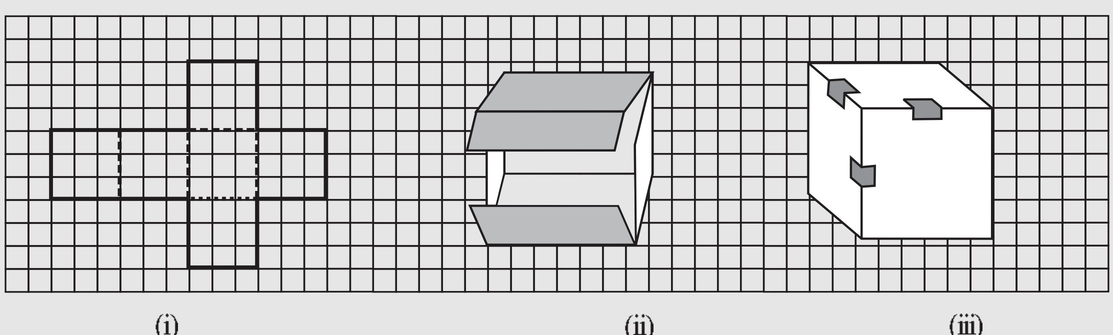
आकृति 11.33

1. क्या हम कह सकते हैं कि घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल ?
2. यदि हम किसी घनाभ (**आकृति** 11.33(i)) की ऊँचाई और आधार की लंबाई को परस्पर बदलकर एक दूसरा घनाभ (आकृति 11.33(ii)), प्राप्त कर लें तो क्या पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल बदल जाएगा?

11.7.2 घन

इन्हें कीजिए

एक वर्गांकित कागज़ पर दर्शाए गए पैटर्न को खींचिए और उसे काटिए (आकृति 11.34(i))। आप जानते हैं कि यह पैटर्न घन का जाल (नेट) है। इसे रेखाओं के अनुदिश मोड़िए (आकृति 11.34(ii)) और घन बनाने के लिए किनारों पर टेप लगाइए (आकृति 11.34(iii))

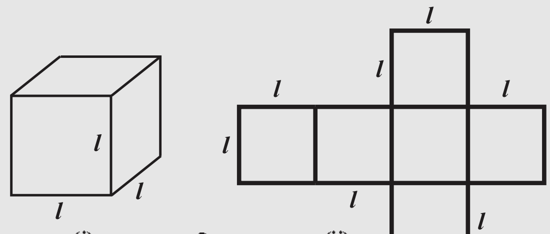


आकृति 11.34

(a) इस घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या है? ध्यान दीजिए घन के सभी फलक वर्गाकार हैं। इसलिए घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होती है (आकृति 11.35(i))।

(b) प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल लिखिए। क्या सभी फलकों के क्षेत्रफल समान हैं?

(c) इस घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल लिखिए।

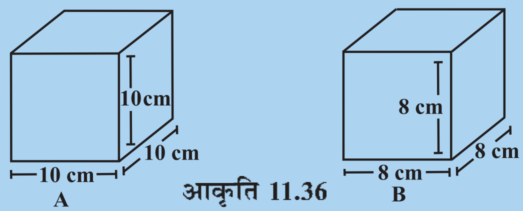


आकृति 11.35

(d) यदि घन की प्रत्येक भुजा l है, तो प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल क्या होगा (आकृति 11.35(ii))। क्या हम कह सकते हैं कि l भुजा वाले घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6l^2$ है?

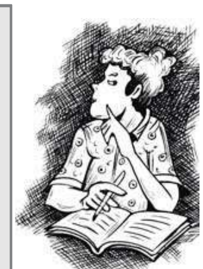
प्रयास कीजिए

घन A का पृष्ठीय क्षेत्रफल और घन B का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.36)।

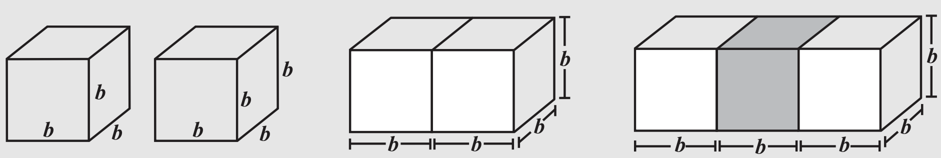


आकृति 11.36

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



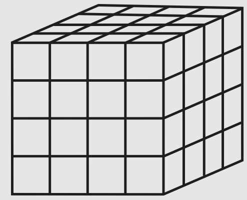
(i) b भुजा वाले दो घनों को मिलाकर एक घनाभ बनाया गया है (आकृति 11.37)। इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है? क्या यह $12b^2$ है? क्या ऐसे तीन घनों को मिलाकर बनाए गए घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $18b^2$ है? क्यों?



आकृति 11.37

(ii) न्यूनतम पृष्ठीय क्षेत्रफल का घनाभ निर्मित करने के लिए समान भुजा वाले 12 घनों को किस प्रकार व्यवस्थित करेंगे?

(iii) किसी घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पेंट करने के पश्चात् उस घन को समान विमाओं वाले 64 घनों में काटा जाता है (आकृति 11.38)। इनमें से कितने घनों का कोई भी फलक पेंट नहीं हुआ है? कितने घनों का 1 फलक पेंट हुआ है? कितने घनों के 2 फलक पेंट हुए हैं? कितने घनों के तीन फलक पेंट हुए हैं?

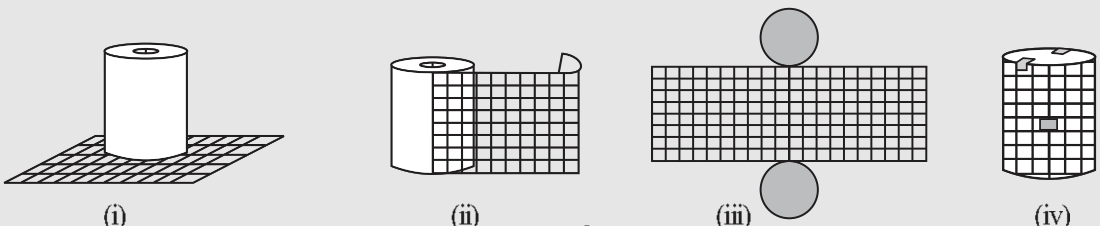

आकृति 11.38

11.7.3 बेलन

जितने भी बेलन हम देखते हैं उनमें से अधिकतर लंब वृत्तीय बेलन है। उदाहरणत: एक टिन, एक गोल खंभा, ट्यूबलाइट, पानी के पाइप इत्यादि :

इन्हें कीजिए

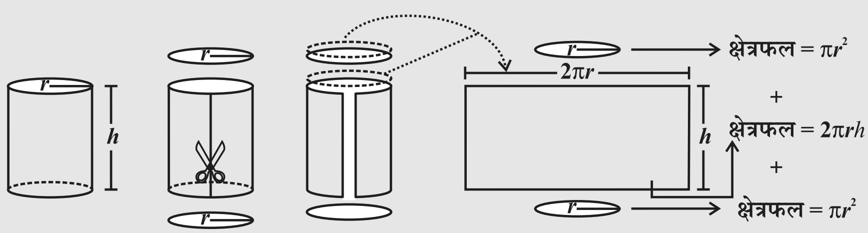
(i) एक बेलनाकार कैन अथवा डिब्बा लीजिए और इसके आधार का ग्राफ पेपर पर बनाइए और इसे काटकर बाहर निकाल लीजिए (आकृति 11.39(i))। एक ऐसा ग्राफ पेपर लीजिए जिसकी चौड़ाई कैन की ऊँचाई के समान हो। इस पट्टी को कैन के चारों ओर इस प्रकार लपेटिए ताकि यह कैन के चारों ओर बिल्कुल ठीक बैठे (अतिरिक्त कागज़ को हटा दीजिए) (आकृति 11.39(ii)) टुकड़ों को एक दूसरे से मिलाकर टेप लगाइए (आकृति 11.39(iii)) ताकि एक बेलन बन जाए (आकृति 11.39(iv)) कैन के चारों ओर लपेटे गए कागज़ का आकार क्या है।



आकृति 11.39

नि:संदेह यह आकार में आयताकार है। जब आप इस बेलन के भागों को एक दूसरे से मिलाकर टेप लगा देते हैं तो आयताकार पट्टी की लंबाई वृत्त की परिधि के समान है। वृत्ताकार आधार की त्रिज्या (r) और आयताकार पट्टी की लंबाई (l) एवं चौड़ाई (h) को नोट कीजिए। क्या $2\pi r$ = पट्टी की लंबाई? जाँच कीजिए क्या आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल $2\pi rh$ है? गिनती कीजिए कि वर्गांकित कागज़ की कितनी वर्ग इकाई बेलन को निर्मित करने में उपयोग की गई है। जाँच कीजिए क्या यह गिनती $2\pi r\,(r + h)$ के मान के लगभग समान है।

(ii) हम बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल के रूप में संबंध $2\pi r\,(r + h)$ का निगमन दूसरी विधि से भी कर सकते हैं। जैसा निम्नलिखित आकृति में दर्शाया गया है वैसे ही एक बेलन को काटने की कल्पना कीजिए (आकृति 11.40):



आकृति 11.40

नोट : जब तक कुछ कहा न गया हो हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

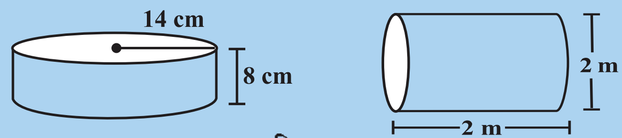
इसलिए बेलन का पार्श्व पृष्ठीय (वक्र पृष्ठीय) क्षेत्रफल $2\pi rh$ है।

बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ या $2\pi r\,(r + h)$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित बेलनों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.41)

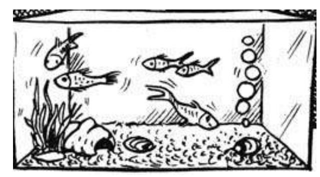


आकृति 11.41

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

नोट कीजिए कि किसी बेलन का पार्श्व पृष्ठीय (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, आधार की परिधि × बेलन की ऊँचाई के समान होता है। क्या हम घनाभ के पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल को आधार का परिमाप × घनाभ की ऊँचाई के रूप में लिख सकते हैं?

उदाहरण 4 : एक मछलीघर घनाभ के आकार का है जिसके बाह्य माप 80 cm × 30 cm × 40 cm हैं। इसके तल, पृष्ठभाग वाले फलक और पीछे वाले फलक को रंगीन कागज़ से ढकना है। आवश्यक कागज़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : मछलीघर की लंबाई $= l = 80$ cm

मछलीघर की चौड़ाई $= b = 30$ cm

मछलीघर की ऊँचाई $= h = 40$ cm

आधार का क्षेत्रफल $= l \times b = 80 \times 30 = 2400\ \text{cm}^2$

पृष्ठभाग वाले फलक का क्षेत्रफल $= b \times h = 30 \times 40 = 1200\ \text{cm}^2$

पीछे वाले फलक का क्षेत्रफल $= l \times h = 80 \times 40 = 3200\ \text{cm}^2$

वांछित क्षेत्रफल = आधार का क्षेत्रफल + पीछे वाले फलक का क्षेत्रफल + (2 × पृष्ठभाग वाले फलक का क्षेत्रफल)

$= 2400 + 3200 + (2 \times 1200) = 8000\ \text{cm}^2$

अत: वांछित रंगीन कागज़ का क्षेत्रफल 8000 cm^2 है।

उदाहरण 5 : एक घनाभाकार कक्ष की आंतरिक माप 12 m × 8 m × 4 m है। यदि सफेदी कराने का खर्च 5 रुपये प्रति वर्ग मीटर है तो उस कक्ष की चार दीवारों पर सफ़ेदी कराने का खर्च ज्ञात कीजिए। यदि उस कमरे की छत की भी सफ़ेदी कराई जाए तो सफ़ेदी कराने का खर्च कितना होगा?

हल : मान लीजिए, कमरे की लंबाई $= l = 12$ m

कमरे की चौड़ाई $= b = 8$ m , कमरे की ऊँचाई $= h = 4$ m

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × कमरे की ऊँचाई

$= 2\,(l + \text{b}) \times h = 2\,(12 + 8) \times 4$

$= 2 \times 20 \times 4 = 160\ \text{m}^2$

सफ़ेदी कराने का प्रति वर्गमीटर खर्च = 5 रु

इसलिए कमरे की चार दीवारों पर सफ़ेदी कराने का कुल खर्च = 160 × 5 = 800 रु

छत का क्षेत्रफल $= 12 \times 8 = 96\ \text{m}^2$

छत पर सफ़ेदी कराने का कुल खर्च = 800 + 480 = 1280 रु

उदाहरण 6 : एक भवन में 24 बेलनाकार खंभे हैं। प्रत्येक खंभे की त्रिज्या 28 सेमी और ऊँचाई 4 मी है। 8 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से सभी खंभे के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : बेलनाकार खंभे की त्रिज्या, $r = 28 \text{ cm} = 0.28 \text{ m}$

ऊँचाई, $h = 4 \text{ m}$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

खंभे का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04 \text{ m}^2$

ऐसे 24 खंभों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 7.04 \times 24 = 168.96 \text{ m}^2$

1 m^2 पर पेंट कराने का खर्च $= 8$ रु

अत: 168.96 m^2 क्षेत्रफल पर पेंट कराने का खर्च $= 168.96 \times 8 = 1351.68$ रु

उदाहरण 7 : एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 cm और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 cm^2 है।

हल : मान लीजिए, बेलन की ऊँचाई $= h$, त्रिज्या $= r = 7\text{cm}$

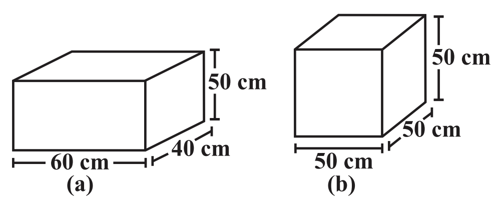
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(h + r)$

अर्थात् $2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + h) = 968$ या $h = 15 \text{ cm}$

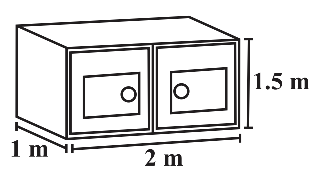
अत: बेलन की ऊँचाई 15 cm है।

प्रश्नावली 11.3

1. दो घनाभाकार डिब्बे हैं जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है। किस डिब्बे को बनाने के लिए कम सामग्री की आवश्यकता है?

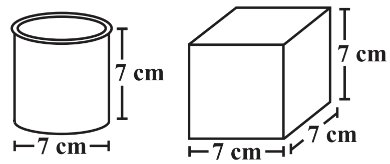


2. $80 \text{ cm} \times 48 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ माप वाले एक सूटकेस को तिरपाल के कपड़े से ढकना है। ऐसे 100 सूटकेसों को ढकने के लिए 96 cm चौड़ाई वाले कितने मीटर तिरपाल के कपड़े की आवश्यकता है?
3. एक ऐसे घन की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 600 cm^2 है।
4. रूखसार ने $1 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$ माप वाली एक पेटी को बाहर से पेंट किया। यदि उसने पेटी के तल के अतिरिक्त उसे सभी जगह से पेंट किया हो तो ज्ञात कीजिए कि उसने कितने पृष्ठीय क्षेत्रफल को पेंट किया।



5. डैनियल एक ऐसे घनाभाकार कमरे की दीवारों और छत को पेंट कर रहा है जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 15 m, 10 m एवं 7 m हैं। पेंट की प्रत्येक कैन की सहायता से 100 m^2 क्षेत्रफल को पेंट किया जा सकता है। तो उस कमरे के लिए उसे पेंट की कितनी कैनों की आवश्यकता होगी?

6. वर्णन कीजिए कि दाईं तरफ दी गई आकृतियाँ किस प्रकार एक समान हैं और किस प्रकार एक दूसरे से भिन्न हैं? किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है?

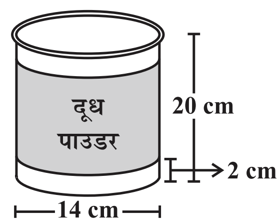


7. 7 m त्रिज्या और 3 m ऊँचाई वाला एक बंद बेलनाकार टैंक किसी धातु की एक चादर से बना हुआ है। उसे बनाने के लिए वांछित धातु की चादर की मात्रा ज्ञात कीजिए।

8. एक खोखले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4224 cm^2 है। इसे इसकी ऊँचाई के अनुदिश काटकर 33 cm चौड़ाई की एक आयताकार चादर बनाई जाती है। आयताकार चादर का परिमाप ज्ञात कीजिए।

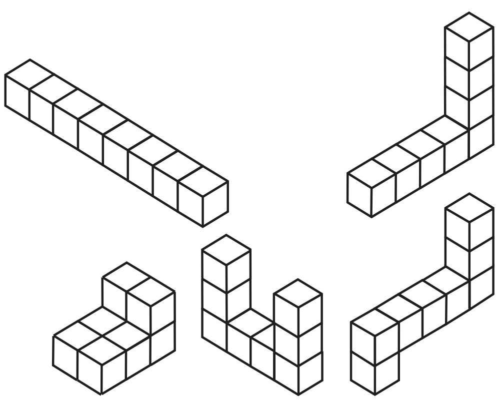
9. किसी सड़क को समतल करने के लिए एक सड़क रोलर को सड़क के ऊपर एक बार घूमने के लिए 750 चक्कर लगाने पड़ते हैं। यदि सड़क रोलर का व्यास 84 cm और लंबाई 1 m है तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक कंपनी अपने दूध पाउडर को ऐसे बेलनाकार बर्तनों में पैक करती है जिनका व्यास 14 cm और ऊँचाई 20 cm है। कंपनी बर्तन के पृष्ठ के चारों ओर एक लेबल लगाती है (जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है)। यदि यह लेबल बर्तन के तल और शीर्ष दोनों से 2 cm की दूरी पर चिपकाया जाता है तो लेबल का क्षेत्रफल क्या है?



11.8 घन, घनाभ और बेलन का आयतन

एक त्रिविमी वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह उसका **आयतन** कहलाता है। अपने आसपास की वस्तुओं के आयतन की तुलना करने का प्रयत्न कीजिए। उदाहरणत: किसी कमरे के अंदर रखी हुई अलमारी की तुलना में कमरे का आयतन अधिक है। इसी प्रकार आपके पेंसिल बक्स का आयतन इसके अंदर रखे पेन और मिटाने वाली रबर के आयतन से अधिक है। क्या आप इनमें से किसी भी वस्तु का आयतन माप सकते हैं?



आकृति 11.42

स्मरण कीजिए, हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं। यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग करेंगे क्योंकि घन सबसे अधिक सुविधाजनक ठोस आकार हैं (ठीक उसी प्रकार जैसे किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल मापने के लिए वर्ग सबसे अधिक सुविधाजनक आकार है)।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में विभाजित करते हैं, इसी प्रकार, किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें उस ठोस को घन इकाइयों में विभाजित करने की आवश्यकता है।

विचार कीजिए कि निम्नलिखित ठोसों में से प्रत्येक का आयतन 8 घन इकाई है (आकृति 11.42)।

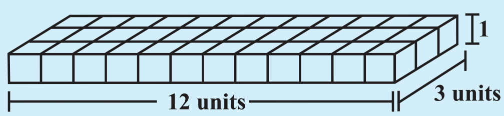
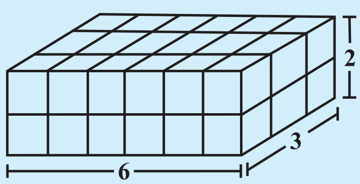
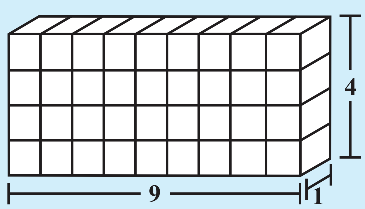
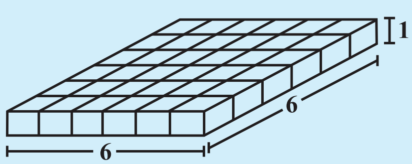
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि किसी ठोस का आयतन मापने के लिए हम उसमें स्थित घन इकाइयों को गिनते हैं।

$$
\begin{aligned}
1 \text{ घन सेंटीमीटर} &= 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3 \\
&= 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{mm}^3 \\
1 \text{ घन मीटर} &= 1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^3 \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}^3 \\
1 \text{ घन मिलीमीटर} &= 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} = 1\text{ mm}^3 \\
&= 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}^3
\end{aligned}
$$

अब हम घनाभ, घन और बेलन का आयतन ज्ञात करने के लिए कुछ व्यंजक (सूत्र) ज्ञात करते हैं। आइए, प्रत्येक ठोस पर एक-एक करके चर्चा करते हैं।

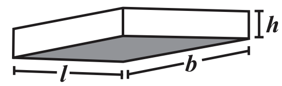
11.8.1 घनाभ

समान आकार (प्रत्येक घन की लंबाई समान) वाले 36 घन लीजिए एक घनाभ बनाने के लिए उन्हें व्यवस्थित कीजिए। आप इन्हें अनेक रूपों में व्यवस्थित कर सकते हैं। निम्नलिखित सारणी पर विचार कीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

	घनाभ	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

आप क्या देखते करते हैं?

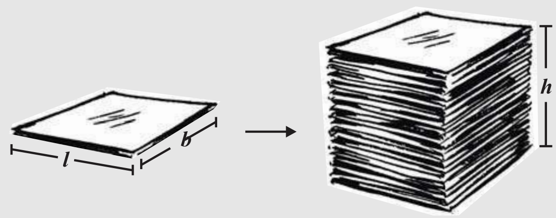
क्योंकि इन घनाभों को बनाने के लिए हमने 36 घनों का उपयोग किया है इसलिए प्रत्येक घनाभ का आयतन 36 घन इकाई है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक घनाभ का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल के समान है। उपर्युक्त उदाहरण से हम कह सकते हैं कि घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$ है। क्योंकि $l \times b$ आधार का क्षेत्रफल है इसलिए हम यह भी कह सकते हैं कि घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई।



इन्हें कीजिए

एक कागज़ की शीट लीजिए और इसके क्षेत्रफल को मापिए। इसी के समान आकार वाली कागज़ की शीटों का ढेर लगाकर एक घनाभ बनाइए (आकृति11.43)। इस ढेर की ऊँचाई मापिए। शीट के क्षेत्रफल और शीटों की ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

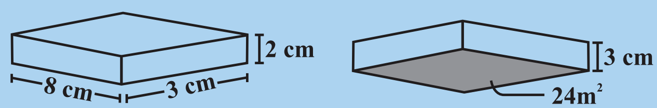
यह क्रियाकलाप इस विचार को दर्शाता है कि ठोस के आयतन का निगमन इस विधि से भी किया जा सकता है (यदि किसी ठोस का आधार और शीर्ष सर्वांगसम हैं और एक दूसरे के समांतर हैं और इसके किनारे आधार पर लंब हैं) क्या आप ऐसी वस्तुओं के बारे में सोच सकते हैं जिनका आयतन इस विधि का उपयोग करते हुए ज्ञात किया जा सकता है?



आकृति 11.43

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनाभों (आकृति 11.44) का आयतन ज्ञात कीजिए :



आकृति 11.44

11.8.2 घन

घन, घनाभ का एक अनोखा (विशेष) उदाहरण है जिसमें $l = b = h$. अत: घन का आयतन $= l \times l \times l = l^3$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनों का आयतन ज्ञात कीजिए :

(a) 4 cm भुजा वाला (b) 1.5 m भुजा वाला

इन्हें कीजिए

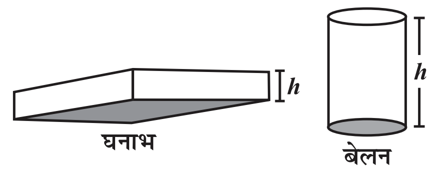
समान आकार वाले 64 घनों को जितने रूपों में आप व्यवस्थित कर सकते हैं उतने रूपों में व्यवस्थित करते हुए घनाभ बनाइए। प्रत्येक रूप का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या समान आयतन वाली ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल समान होता है?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक कंपनी बिस्कुट बेचती है। बिस्कुटों को पैक करने के लिए घनाभाकार डिब्बों का उपयोग किया जा रहा है। डिब्बा A $\rightarrow$ 3 cm × 8 cm × 20 cm, डिब्बा B $\rightarrow$ 4 cm × 12 cm × 10 cm

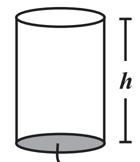
डिब्बे का कौन सा आकार कंपनी के लिए आर्थिक दृष्टि से लाभदायक रहेगा? क्यों? क्या आप ऐसे किसी और आकार (विमाएँ) के डिब्बे का सुझाव दे सकते हैं जिसका आयतन इनके समान हो परंतु इनकी तुलना में आर्थिक दृष्टि से अधिक लाभदायक हो।

11.8. 3 बेलन



हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए ज्ञात किया जा सकता है। क्या इसी प्रकार हम बेलन का आयतन ज्ञात कर सकते हैं?

घनाभ की तरह बेलन में भी एक आधार और शीर्ष होता है जो एक दूसरे के सर्वांगसम और समांतर होते हैं। घनाभ की तरह इसका वक्रपृष्ठ आधार पर लंब होता है।



इसलिए घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= l \times b \times h = lbh$

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

11.9 आयतन और धारिता

इन दो शब्दों में अधिक अंतर नहीं है।

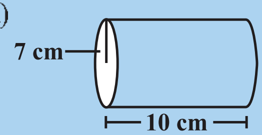
(a) किसी वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह की मात्रा उसका आयतन कहलाता है।

(b) किसी बर्तन में भरी गई वस्तु की मात्रा उसकी धारिता कहलाती है।

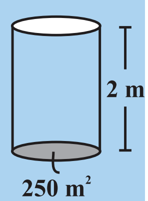
प्रयास कीजिए

संलग्न बेलनों का आयतन ज्ञात कीजिए :

(i)



(ii)



नोट : यदि किसी पानी रखे जाने वाले टिन के बर्तन में 100 cm^3 पानी भरा जा सकता है तो उस टिन के बर्तन की धारिता 100 cm^3 है।

धारिता को लीटरों में भी मापा जाता है। लीटर और cm^3 में निम्नलिखित संबंध है : 1 mL = 1 cm^3, 1 L = 1000 cm^3. अत: 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000 L.

उदाहरण 8 : एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 275 cm^3 और आधार का क्षेत्रफल 25 cm^2 है।

हल : घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

अत: घनाभ की ऊँचाई $= \dfrac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}} = \dfrac{275}{25} = 11$ cm

इस प्रकार घनाभ की ऊँचाई 11 cm है।

उदाहरण 9 : एक घनाभाकार गोदाम, जिसकी माप 60 m × 40 m × 30 m है, के अंदर कितने घनाभाकार डिब्बे रखे जा सकते हैं, यदि एक डिब्बे का आयतन 0.8 मी³ है?

हल : एक डिब्बे का आयतन = 0.8 मी³

गोदाम का आयतन = 60 × 40 × 30 = 72000 मी³

गोदाम के अंदर रखे जा सकने वाले डिब्बों की संख्या $= \dfrac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{1 डिब्बे का आयतन}}$

$$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$$

इस प्रकार गोदाम के अंदर रखे जा सकने वाले डिब्बों की संख्या 90,000 है।

उदाहरण 10 : 14 cm चौड़ाई वाले एक आयताकार कागज़ को चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर 20 cm त्रिज्या वाला एक बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए (आकृति 11.45)।

(π के लिए $\frac{22}{7}$ लीजिए)

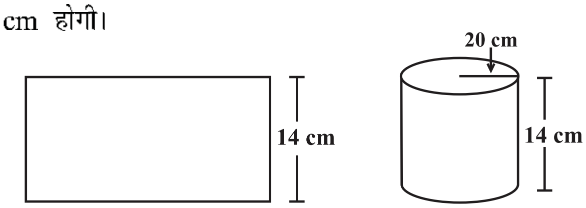
हल : कागज़ का चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर बेलन का निर्माण किया गया है, इसलिए कागज़ की चौड़ाई बेलन की ऊँचाई होगी और बेलन की त्रिज्या 20 cm होगी।

बेलन की ऊँचाई $= h = 14$ cm

त्रिज्या $= r = 20$ cm

बेलन का आयतन $= V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600 \text{ cm}^3$$



आकृति 11.45

अत: बेलन का आयतन 17600 cm^3 है।

उदाहरण 11 : 11 cm $\times$ 4 cm माप वाले आयताकार कागज़ के टुकड़े को बिना अतिव्यापन किए, मोड़कर एक 4cm ऊँचाई का बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कागज़ की लंबाई बेलन के आधार की परिधि बन जाती है और चौड़ाई, ऊँचाई बन जाती है।

मान लीजिए बेलन की त्रिज्या $= r$ और ऊँचाई $= h$

बेलन के आधार की परिधि $= 2\pi r = 11$

अथवा $2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$

इसलिए $r = \frac{7}{4}$ cm

बेलन का आयतन $= V = \pi r^2 h$

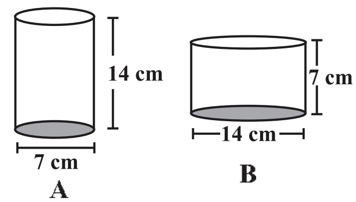
$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3.$$

अत: बेलन का आयतन 38.5 cm^3 है।

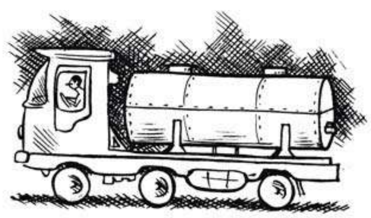
प्रश्नावली 11.4

1. आपको एक बेलनाकार टैंक दिया हुआ है, निम्नलिखित में से किस स्थिति में आप उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे और किस स्थिति में आयतन :
   (a) यह ज्ञात करने के लिए कि इसमें कितना पानी रखा जा सकता है।
   (b) इसका प्लास्टर करने के लिए वांछित सीमेंट बोरियों की संख्या।
   (c) इसमें भरे पानी से भरे जाने वाले छोटे टैंकों की संख्या।

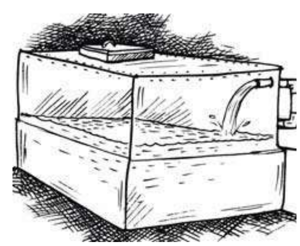
2. बेलन A का व्यास 7 cm और ऊँचाई 14 cm है। बेलन B का व्यास 14 cm और ऊँचाई 7 cm है। परिकलन किए बिना क्या आप बता सकते हैं कि इन दोनों में किसका आयतन अधिक है। दोनों बेलनों का आयतन ज्ञात करते हुए इसका सत्यापन कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या अधिक आयतन वाले बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी अधिक है।



3. एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसके आधार का क्षेत्रफल 180 cm^2 और जिसका आयतन 900 cm^3 है?

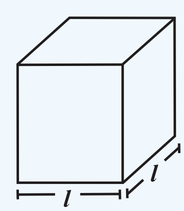


4. एक घनाभ की विमाएँ 60 cm × 54 cm × 30 cm हैं। इस घनाभ के अंदर 6 cm भुजा वाले कितने छोटे घन रखे जा सकते हैं।
5. एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 1.54 m^3 और जिसके आधार का व्यास 140 cm है?
6. एक दूध का टैंक बेलन के आकार का है जिसकी त्रिज्या 1.5 m और लंबाई 7 m है। इस टैंक में भरे जा सकने वाले दूध की मात्रा लीटर में ज्ञात कीजिए।
7. यदि किसी घन के प्रत्येक किनारे को दुगुना कर दिया जाए, तो
   (i) इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने गुना वृद्धि होगी?
   (ii) इसके आयतन में कितने गुना वृद्धि होगी?
8. एक कुंड के अंदर 60 लीटर प्रति मिनट की दर से पानी गिर रहा है। यदि कुंड का आयतन 108 m^3 है, तो ज्ञात कीजिए कि इस कुंड को भरने में कितने घंटे लगेंगे?

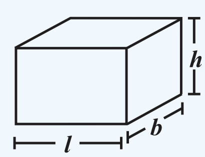


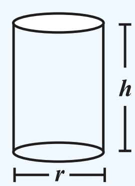
हमने क्या चर्चा की ?

1. समलंब का क्षेत्रफल
   (i) समलंब का क्षेत्रफल = समांतर भुजाओं की लंबाइयों के योग का आधा × उनके बीच की लंबवत् दूरी।
   (ii) समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = विकर्णों के गुणनफल का आधा
2. एक ठोस का **पृष्ठीय क्षेत्रफल** इसके फलकों के क्षेत्रफलों के योग के समान होता है।
3. घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$
   घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$
   बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$



4. किसी ठोस द्वारा घिरी हुई जगह की मात्रा इसका **आयतन** कहलाती है।
5. घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$
   घन का आयतन $= l^3$
   बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$





6. (i) 1 cm^3 = 1 mL
   (ii) 1L = 1000 cm^3
   (iii) 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000L

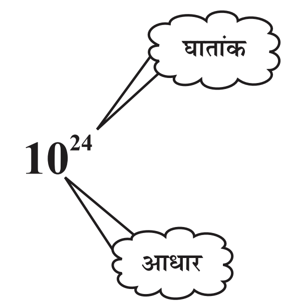
अध्याय 12

घातांक और घात

12.1 भूमिका

क्या आप जानते हैं?

पृथ्वी का द्रव्यमान 5,970,000,000,000, 000, 000, 000, 000 kg है। हम पिछली कक्षा में पहले ही पढ़ चुके हैं कि इस प्रकार की बड़ी संख्याओं को (ज्यादा सुविधाजनक) घातांकों को उपयोग करते हुए कैसे लिख सकते हैं जैसे 5.97×10^{24} kg ।



हम कहते हैं कि 10 की घात 24 ।

हम 10^{24} को 10 की घात 24 पढ़ते हैं।

हम जानते हैं $\quad 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

तथा $\quad 2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2$ (m बार)

2^{-2} किसके बराबर है अब हमें ज्ञात करना चाहिए?

यहाँ घातांक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

12.2 ऋणात्मक घातांकों की घात

आप जानते हैं कि $\quad 10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

जब घातांक 1 से कम होता है तब मान पूर्व मान का $\frac{1}{10}$ वाँ भाग हो जाता है

ऊपर के प्रतिरूप को आगे बढ़ाते हुए

हम पाते हैं $\quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$

इसी प्रकार $\quad 10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$ । 10^{-10} किसके बराबर है?

निम्नलिखित को जानिए।

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$$

संख्या को आधार 3 से विभाजित किया है।

इस प्रकार उपरोक्त प्रतिरूप को देखने पर हम कहते हैं

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

इसी प्रकार 2^{-2} से पुनः आप प्राप्त कर सकते हैं,

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} \quad \text{या} \quad 10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} \quad \text{या} \quad 10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad \text{या} \quad 3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$$ इत्यादि।

साधारणतया हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर परिमेय संख्या a, के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, जहाँ m एक धनात्मक परिमेय संख्या है। a^{-m} , a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

प्रयास कीजिए

गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए :

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

हमने सीखा कि संख्याओं को विस्तारित घातांक रूप में कैसे लिख सकते हैं, जैसे

$$1425 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

अब हमें देखना चाहिए कि 1425.36 को विस्तारित रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं।

हम जानते हैं $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

प्रयास कीजिए

घातांकों का उपयोग करते हुए निम्न को विस्तारित रूप में लिखिए।

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

12.3 घातांक के नियम

हम सीख चुके हैं कि कोई भी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ m और n प्राकृत संख्याएँ हैं। यदि घातांक ऋणात्मक है तो भी क्या यह नियम सत्य है? हमें खोजना चाहिए।

(i) हम जानते हैं कि $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ और $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए

अतः, $2^{-3} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3 \times 2^2} = \frac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

–5 दो घातांकsa –3 और –2 का योग है।

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ लेने पर

$$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$$

$(-4) + (-3) = -7$

(iii) अब $5^{-2} \times 5^4$ को लिखिए।

$$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^{(2)}$$

$(-2) + 4 = 2$

कक्षा VII में आप सीख चुके हैं कि कोई भी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, जहाँ m और n प्राकृत संख्याएँ हैं और $m > n$.

(iv) अब $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ को लिखिए।

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{-(2)}$$

$(-4) + 2 = -2$

साधारणतया हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ m और n परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

घातांक रूप को सरल कीजिए और लिखिए :

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

इसी प्रकार आप निम्न घातांकों के नियमों को सत्यापित कर सकते हैं जहाँ a और b शून्येतर परिमेय संख्याएँ और m, n कोई पूर्णांक हैं।

(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

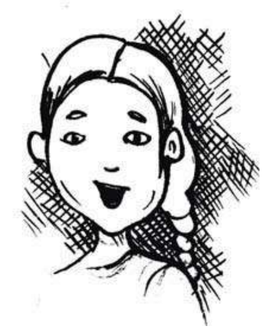
(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

इन नियमों को आप कक्षा VII में धनात्मक घातांक में भी सीख चुके हैं।

आइए, उपरोक्त घातांकों के नियमों का उपयोग करते हुए कुछ उदाहरणों को हल करते हैं।

उदाहरण 1 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) 2^{-3} (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}}$



हल :

(i) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

उदाहरण 2 : सरल कीजिए :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

हल :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \dfrac{1}{(-4)^5}$ ($a^m \times a^n = a^{m+n}$ तथा $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$)

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ ($a^m \div a^n = a^{m-n}$)

उदाहरण 3 : 4^{-3} को घात और उसके आधार 2 के रूप में लिखिए।

हल : हमें प्राप्त है, $4 = 2 \times 2 = 2^2$

अत: $(4)^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2 \times (-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

उदाहरण 4 : सरल कीजिए और उत्तर घातांक के रूप में लिखिए।

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(+3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$

हल :

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20} = \dfrac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \dfrac{1}{100^3}$

[नियम से $a^m \times b^m = (ab)^m$, $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$]

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3} = \dfrac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

(iv) $(+3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \dfrac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \dfrac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

उदाहरण 5 : m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

हल : $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$(-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$(-3)^{m+6} = (-3)^7$

दोनों ओर की घातों के आधार समान हैं जो 1 तथा −1 से भिन्न हैं, अत: उनके घातांक समान होने चाहिए।

अत: $m + 6 = 7$ या $m = 7 - 6 = 1$

> $a^n = 1$ यदि $n = 0$ है। $a = 1$ या $a = -1$ के अतिरिक्त किसी भी a के लिए यह होगा। $a = 1$ के लिए $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{-2} = \ldots = 1$ या $(1)^n = 1$ असीमित n के लिए। $a = -1$ के लिए, $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = \ldots = 1$ या $(-1)^p = 1$, p कोई सम पूर्णांक।

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

अतः साधारणतः, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

उदाहरण 6 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ का मान प्राप्त कीजिए।

हल : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

उदाहरण 7 : सरल कीजिए

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

हल :

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \{9 - 8\} \div 16 = \frac{1}{16}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$$

प्रश्नावली 12.1

1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. सरल कीजिए और उत्तर को धनात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(+3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{+2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\frac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. m का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $5^m \div 5^{-3} = 5^5$

6. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. सरल कीजिए।

(i) $\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12.4 छोटी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग कर मानक रूप में व्यक्त करना

निम्न तथ्यों का अवलोकन कीजिए :

1. पृथ्वी से सूर्य की दूरी 149,600,000,000 m है।
2. प्रकाश का वेग 300,000,000 m/s है।
3. कक्षा VII की गणित की पुस्तक की मोटाई 20 mm है।
4. लाल रक्त कोशिकाओं का औसत व्यास 0.000007 mm
5. मनुष्य के बाल की मोटाई की परास 0.005 cm से 0.01 cm होती है।
6. पृथ्वी से चंद्रमा की दूरी लगभग 384,467,000 m होती है।
7. पौधों की कोशिकाओं का आकार 0.00001275 m है।
8. सूर्य की औसत त्रिज्या 695000 km है।
9. अंतरिक्ष शटल में ठोस राकेट बूस्टर को प्रेरित करने के लिए शटल का द्रव्यमान 503600 kg है।
10. एक कागज़ की मोटाई 0.0016 cm है।
11. कंप्यूटर चिप के एक तार का व्यास 0.000003 m है।
12. माउंट एवरेस्ट की ऊँचाई 8848 m है।

यहाँ कुछ संख्याओं का अवलोकन कीजिए जो हम पढ़ सकते हैं जैसे, 2 cm, 8848 m 6,95,000 km। यहाँ कुछ बड़ी संख्याएँ भी हैं जैसे 150,000,000,000 m और कुछ बहुत छोटी संख्याएँ हैं जैसे 0.000007 m।

उपरोक्त तथ्यों के आधार पर बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं की पहचान कीजिए और संगत सारणी में लिखिए।

बहुत बड़ी संख्याएँ	बहुत छोटी संख्याएँ
150,000,000,000 m	0.000007 m
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------

पिछली कक्षा में हमने सीखा कि किसी बहुत बड़ी संख्या को मानक रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$। अब हमें 0.000007 को मानक रूप में व्यक्त करना चाहिए।

$$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$$

$$0.000007 \text{ m} = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$$

इसी तरह एक कागज़ की मोटाई जो कि 0.0016 cm है, लिखिए।

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$

$$= 1.6 \times 10^{-3}\ \text{cm}$$

अत: हम कह सकते हैं कि कागज़ की मोटाई 1.6×10^{-3} cm है।

$\underbrace{150000000000}_{11\,10\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1}.$ दशमलव 11 स्थान बाईं तरफ़ खिसक गया है

$0.\underbrace{000007}_{1\,2\,3\,4\,5\,6}$ दशमलव छ: स्थान दाईं तरफ़ खिसक गया है।

पुनः ध्यान दीजिए : $0.\underbrace{001}_{1\,2\,3}6$ दशमलव तीन स्थान दाईं तरफ़ खिसक गया है।

प्रयास कीजिए

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. दिए गए तथ्यों को मानक रूप में लिखिए।

12.4.1 बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं की तुलना

सूर्य का व्यास 1.4×10^9 m और पृथ्वी का व्यास 1.2756×10^7 m है। हम इनके व्यासों की तुलना करना चाहते हैं। सूर्य का व्यास = 1.4×10^9 m; पृथ्वी का व्यास = 1.2756×10^7 m

अत: $\frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$ जो कि लगभग 100 गुना है।

अत: सूर्य का व्यास, पृथ्वी के व्यास का लगभग 100 गुना है। लाल रक्त कोशिकाएँ जो कि 0.000007 m माप की है और पौधों की कोशिकाएँ जो कि 0.00001275 m माप की है इनके मापों की तुलना कीजिए।

लाल रक्त कोशिकाओं का आकार = 0.000007 m = 7×10^{-6} m

पौधों की कोशिकाओं का आकार = 0.00001275 m = 1.275×10^{-5} m

अत:, $\frac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \frac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (लगभग)

अत: लाल रक्त कोशिकाएँ आकार में, पौधों की कोशिकाओं की लगभग आधी हैं।

पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} kg और चंद्रमा का द्रव्यमान 7.35×10^{22} kg है। दोनों का कुल द्रव्यमान क्या होगा?

कुल द्रव्यमान = 5.97×10^{24} kg + 7.35×10^{22} kg

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22} = 604.35 \times 10^{22}$ kg

जब हम मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते हैं तब हम इन्हें 10 की समान घात में बदलते हैं।

सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 1.496×10^{11} m और पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 3.84×10^8 m है। सूर्य ग्रहण के दौरान चंद्रमा पृथ्वी और सूर्य के बीच आ जाता है। इस समय चंद्रमा और सूर्य के बीच की दूरी कितनी होती है?

सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी = 1.496×10^{11} m

पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी = 3.84×10^8 m

सूर्य और चंद्रमा के बीच की दूरी = $1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^8$

$= 1.496 \times 1000 \times 10^8 - 3.84 \times 10^8$

$= (1496 - 3.84) \times 10^8 \text{ m} = 1492.16 \times 10^8 \text{ m}$

उदाहरण 8 : निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 0.000035 (ii) 4050000

हल : (i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^6$

उदाहरण 9 : निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 3.52×10^5 (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

हल :

(i) $3.52 \times 10^5 = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \dfrac{7.54}{10^4} = \dfrac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \dfrac{3}{10^5} = \dfrac{3}{100000} = 0.00003$

एक बार पुन: हमें मानक रूप में दी गई संख्याओं को समान घातांक वाली संख्याओं में बदलना है।

प्रश्नावली 12.2

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942
   (iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837
   (v) 31860000000
2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^4 (iii) 3×10^{-8}
   (iv) 1.0001×10^9 (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^6
3. निम्नलिखित कथनों में जो संख्या प्रकट हो रही है उन्हें मानक रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 1 माईक्रॉन $\dfrac{1}{1000000}$ m के बराबर होता है।
   (ii) एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 0.000,000,000,000,000,000,16 कुलंब होता है।
   (iii) जीवाणु की माप 0.0000005 m है।
   (iv) पौधों की कोशिकाओं की माप 0.00001275 m है।
   (v) मोटे कागज़ की मोटाई 0.07 mm है।
4. एक ढेर में पाँच किताबें हैं जिनमें प्रत्येक की मोटाई 20 mm तथा पाँच कागज़ की शीटें हैं जिनमें प्रत्येक की मोटाई 0.016 mm है। इस ढेर की कुल मोटाई ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की ?

1. ऋणात्मक घातांकों वाली संख्याएँ निम्न नियमों का पालन करती हैं।
   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$
   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$
2. ऋणात्मक घातांकों का उपयोग करते हुए बहुत छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

सीधा और प्रतिलोम समानुपात

अध्याय

13

13.1 भूमिका

मोहन स्वयं अपने और अपनी बहन के लिए चाय बनाता है। वह 300 mL पानी, 2 चम्मच चीनी, 1 चम्मच चाय-पत्ती और 50 mL दूध का उपयोग करता है। यदि वह पाँच व्यक्तियों के लिए चाय बनाए, तो उसे प्रत्येक वस्तु की कितनी मात्रा की आवश्यकता होगी?

यदि दो विद्यार्थी किसी सभा के लिए कुर्सियाँ व्यवस्थित करने में 20 मिनट का समय लगाते हैं, तो इसी कार्य को करने में 5 विद्यार्थी कितना समय लेंगे?

हमें अपने दैनिक जीवन में ऐसी अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है, जहाँ हमें यह देखना आवश्यक हो जाता है कि एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन हो रहा है।

उदाहरणार्थ :

(i) यदि खरीदी गई वस्तुओं की संख्या में वृद्धि होती है, तो उनके कुल मूल्य में भी वृद्धि होती है।

(ii) बैंक में जितनी धनराशि अधिक जमा की जाएगी, उतना ही ब्याज अधिक अर्जित होगा।

(iii) जब किसी वाहन की चाल में वृद्धि होती है, उसके द्वारा वही दूरी तय करने में लिए गए समय में कमी होती है।

(iv) एक दिए हुए कार्य के लिए, जितने अधिक व्यक्ति कार्य पर लगाए जाएँगे, उतना ही उस कार्य को पूरा करने में कम समय लगेगा।

ध्यान दीजिए कि एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन हो रहा है। ऐसी पाँच और स्थितियाँ लिखिए, जहाँ एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन होता है।

मोहन द्वारा आवश्यक प्रत्येक वस्तु की मात्रा हम किस प्रकार ज्ञात करते हैं? या पाँच विद्यार्थियों द्वारा कार्य पूरा करने में लिए गए समय को हम किस प्रकार ज्ञात करेंगे? इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, हम अब कुछ विचरण (variation) की अवधारणाओं का अध्ययन करेंगे।

13.2 सीधा समानुपात

यदि 1kg चीनी का मूल्य 18 रुपये है, तो 3kg चीनी का मूल्य क्या होगा? यह 54 रुपये है। इसी प्रकार, हम 5kg या 8kg चीनी का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं।

निम्नलिखित सारणी का अध्ययन कीजिए :

चीनी का भार (kg में)	1	3	5	6	8	10
मूल्य (रुपयों में)	18	54	90	...	...	...

ध्यान दीजिए कि जैसे-जैसे चीनी के भार में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे उसके मूल्य में भी इस प्रकार से वृद्धि होती है कि इनका अनुपात (ratio) अचर रहता है।

एक और उदाहरण लीजिए। मान लीजिए एक कार 60 km की दूरी तय करने में 4 लीटर पेट्रोल का उपयोग करती है तो वह 12 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी? इसका उत्तर 180 km है। हमने इसे कैसे परिकलित किया? क्योंकि दूसरी स्थिति में 12 लीटर, अर्थात् 4 लीटर का तीन गुना पेट्रोल प्रयोग होता है, इसलिए तय की गई दूरी भी 60 km की तीन गुना होगी। दूसरे शब्दों में, जब पेट्रोल की खपत तीन गुना होगी, तो तय की गई दूरी भी पहली दूरी की तीन गुना होगी। मान लीजिए कि पेट्रोल की खपत x लीटर है तथा तय की गई संगत दूरी y km है। अब निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

पेट्रोल (x) लीटर में	4	8	12	15	20	25
दूरी (y) km में	60	...	180	...	...	...

हम पाते हैं कि जब x के मान में वृद्धि होती है, तब y के मान में भी इस प्रकार वृद्धि होती है कि अनुपात $\frac{x}{y}$ में कोई बदलाव नहीं आता है। यह अचर (मान लीजिए k) रहता है। इस स्थिति में, यह $\frac{1}{15}$ है, (इसकी जाँच कीजिए)।

यदि $\frac{x}{y} = k$ या $x = ky$ हो, तो हम कहते हैं कि $\boldsymbol{x}$ **और** $\boldsymbol{y}$ **में सीधा या प्रत्यक्ष समानुपात (direct proportion)** है [अथवा वे **अनुक्रमानुपाती (directly proportional)** हैं]। इस उदाहरण में, $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ है, जहाँ 4 और 12 पेट्रोल की खपत की लीटर में मात्राएँ (x) हैं तथा 60 और 180 km में दूरियाँ (y) हैं। अतः, जब x और y में **प्रत्यक्ष** या **सीधा अनुपात** होता है, तो हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ लिख सकते हैं। [x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हैं।)

पेट्रोल की खपत और एक कार द्वारा तय की गई दूरी एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है। इसी प्रकार, व्यय की गई कुल धनराशि और खरीदी गई वस्तुओं की संख्या भी प्रत्यक्ष अनुपात का एक उदाहरण है।

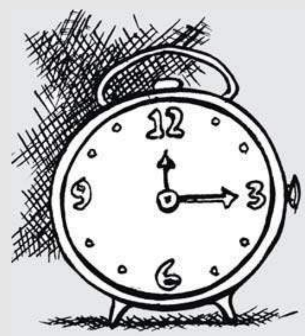
प्रत्यक्ष अनुपात के कुछ और उदाहरणों के बारे में सोचिए। जाँच कीजिए कि क्या मोहन (प्रारंभिक उदाहरण में) पाँच व्यक्तियों के लिए चाय बनाने के लिए 750 mL पानी, 5 चम्मच चीनी,

$2\frac{1}{2}$ चम्मच चायपत्ती, 125 mL दूध का प्रयोग करेगा। आइए, निम्नलिखित क्रियाकलापों की सहायता से प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा को और अधिक समझने का प्रयत्न करें।

इन्हें कीजिए

(i) • एक घड़ी लीजिए और उसकी मिनट वाली (बड़ी) सुई को 12 पर स्थिर कीजिए।
- मिनट की सुई द्वारा अपनी प्रारंभिक स्थिति से घूमे गए कोणों एवं बीते हुए समय को निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखिए :

व्यतीत हुआ समय (T) (मिनटों में)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
घूमा गया कोण (A) (डिग्री में)	(A_1) 90	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...



आप T और A के बारे में क्या देखते हैं? क्या इनमें साथ-साथ वृद्धि होती है? क्या $\frac{T}{A}$ प्रत्येक समय वही रहता है?

क्या मिनट की सुई द्वारा घूमा गया कोण व्यतीत हुए समय के अनुक्रमानुपाती (directly proportional) है? हाँ!

उपरोक्त सारणी से, आप यह भी देख सकते हैं कि

$$T_1 : T_2 = A_1 : A_2 \text{, क्योंकि}$$
$$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1:2$$
$$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1:2$$

जाँच कीजिए कि क्या $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ तथा $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$ है।

आप स्वयं अपने समय अंतराल लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं।

(ii) अपने मित्र से निम्नलिखित सारणी को भरने के लिए कहिए तथा उसकी आयु और उसकी माँ की संगत आयु का अनुपात ज्ञात करने के लिए भी कहिए।

	पाँच वर्ष पहले की आयु	वर्तमान आयु	पाँच वर्ष के बाद की आयु
मित्र की आयु (F)			
माँ की आयु (M)			
$\frac{F}{M}$			

आप क्या देखते हैं? क्या F और M में साथ-साथ वृद्धि (या कमी) होती है? क्या $\frac{F}{M}$ प्रत्येक बार वही है? नहीं। आप इस क्रियाकलाप को अपने अन्य मित्रों के साथ दोहरा सकते हैं तथा अपने प्रेक्षणों को लिख सकते हैं।

इस प्रकार, यह आवश्यक नहीं है कि साथ-साथ बढ़ने (या घटने) वाले चर सदैव अनुक्रमानुपाती हों। उदाहरणार्थ :

(i) मानवों में भौतिक परिवर्तन समय के साथ होते रहते हैं, परंतु आवश्यक नहीं है कि ये एक पूर्व निर्धारित अनुपात में हों।

(ii) व्यक्तियों के भार और लंबाई में परिवर्तन किसी ज्ञात अनुपात में नहीं होते हैं।

(iii) किसी पेड़ की ऊँचाई और उसकी शाखाओं पर उगने वाली पत्तियों की संख्या में सीधा संबंध या अनुपात नहीं होता है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या x और y अनुक्रमानुपाती हैं।

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. मूलधन = 1000 रुपये, ब्याज दर = 8% वार्षिक। निम्नलिखित सारणी को भरिए तथा ज्ञात कीजिए कि, किस प्रकार का ब्याज (साधारण या चक्रवृद्धि) समय अवधि के साथ प्रत्यक्ष अनुपात में बदलता या परिवर्तित होता है।

$$\frac{P \times r \times t}{100}$$

$$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - P$$

समय अवधि	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष
साधारण ब्याज (रु में)			
चक्रवृद्धि ब्याज (रु में)			

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि हम समय अवधि और ब्याज की दर स्थिर रखें, तो साधारण ब्याज मूलधन के साथ प्रत्यक्ष अनुपात में परिवर्तित होता है। क्या ऐसा ही संबंध चक्रवृद्धि ब्याज के लिए भी होगा? क्यों?

आइए, अब कुछ उदाहरण हल करें, जहाँ हम प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 1 : एक विशेष प्रकार के 5 मीटर कपड़े का मूल्य 210 रुपये है। इसी प्रकार के 2, 4, 10 और 13 मीटर कपड़े के मूल्यों के लिए एक सारणी बनाइए।

हल : मान लीजिए कि कपड़े की लंबाई x मीटर है तथा उसका मूल्य (रुपयों में) y है।

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

जैसे-जैसे कपड़े की लंबाई में वृद्धि होती है, उसके मूल्य में भी उसी अनुपात में वृद्धि होती जाती है। अतः, यह एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।

हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ के प्रकार के संबंध का उपयोग करते हैं।

(i) यहाँ $x_1 = 5$, $y_1 = 210$ और $x_2 = 2$ है।

अतः, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ से हमें $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ प्राप्त होता है।

अर्थात्, $5y_2 = 2 \times 210$ या $y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$

(ii) यदि $x_3 = 4$, तो $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3}$ या $5y_3 = 4 \times 210$ या $y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

[क्या हम यहाँ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ का उपयोग कर सकते हैं? प्रयास कीजिए।]

(iii) यदि $x_4 = 10$, तो $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4}$ या $5 \times y_4 = 10 \times 210$ या $y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(iv) यदि $x_5 = 13$, तो $\frac{5}{210} = \frac{13}{y_5}$ या $5 \times y_5 = 13 \times 210$ या $y_5 = \frac{13 \times 210}{5} = 546$

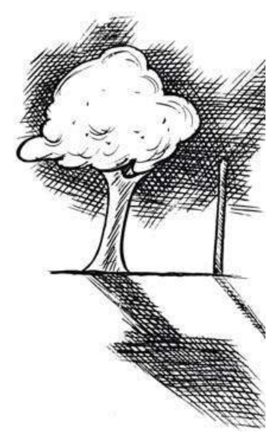
[ध्यान दीजिए कि यहाँ हम $\frac{5}{210}$ के स्थान पर $\frac{2}{84}$ या $\frac{4}{168}$ या $\frac{10}{420}$ का भी उपयोग कर सकते हैं।]

उदाहरण 2 : 14 मीटर ऊँचे एक बिजली के खंभे की छाया 10 मीटर है। समान स्थितियों में उस पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी छाया 15 मीटर है।

हल : मान लीजिए कि पेड़ की ऊँचाई x मीटर है। हम नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी बनाते हैं :

वस्तु की ऊँचाई (मीटर में)	14	x
छाया की लंबाई (मीटर में)	10	15

ध्यान दीजिए कि वस्तु की ऊँचाई जितनी अधिक होगी, उसकी छाया की लंबाई उतनी ही अधिक होगी। अतः, यह एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।



अर्थात्, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ से हमें प्राप्त होता है : $\frac{14}{10} = \frac{x}{15}$ (क्यों?)

या $\frac{14 \times 15}{10} = x$ या $\frac{14 \times 3}{2} = x$

अतः $x = 21$। इस प्रकार पेड़ की ऊँचाई 21 मीटर है।

वैकल्पिक रूप से, हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ को $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ के रूप में लिख सकते हैं।

अतः $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ या $14 : x = 10 : 15$

अतः $10 \times x = 15 \times 14$ या $x = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

उदाहरण 3 : यदि मोटे कागज़ की 12 शीटों (sheets) का भार 40 ग्राम है, तो ऐसे ही कागज़ की कितनी शीटों का भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा?

हल : मान लीजिए कि उन शीटों की संख्या x है जिनका भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम है। हम उपरोक्त सूचना को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखते हैं :

शीटों की संख्या	12	x
शीटों का भार (ग्राम में)	40	2500

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम
$2\frac{1}{2}$ किलोग्राम = 2500 ग्राम

शीटों की संख्या अधिक होगी, तो उनका भार भी उतना ही अधिक होगा। अत: शीटों की संख्या और उनके भार परस्पर अनुक्रमानुपाती हैं।

अत: $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

या $\frac{12 \times 2500}{40} = x$ या $750 = x$

अत: कागज़ की शीटों की वांछित संख्या 750 है।

वैकल्पिक विधि : दो राशियाँ x और y जो प्रत्यक्ष अनुपात में विचरण (vary) करती हैं में

$x = ky$ या $\frac{x}{y} = k$ का संबंध होता है।

यहाँ $k = \frac{\text{शीटों की संख्या}}{\text{ग्रामों में शीटों का भार}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$। अब x उन कागज़ की शीटों की संख्या है जिनका भार $2\frac{1}{2}$ kg (2500 gm) है। संबंध $x = ky$ का उपयोग करने पर, $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

इस प्रकार, कागज़ की 750 शीटों का भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा।

उदाहरण 4 : एक रेलगाड़ी 75 km/h की एकसमान (uniform) चाल से चल रही है।

(i) वह 20 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी?

(ii) 250 km की दूरी तय करने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि 20 मिनट में तय की गई दूरी (km में) x है तथा 250 km की दूरी तय करने में लगने वाला समय (मिनटों में) y है।

1 घंटा = 60 मिनट

तय की गई दूरी (km में)	75	x	250
लिया गया समय (मिनटों में)	60	20	y

क्योंकि चाल एकसमान है, इसलिए तय की गई दूरी लिए गए समय के अनुक्रमानुपाती होगी।

(i) हमें प्राप्त है : $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$ या $\frac{75 \times 20}{60} = x$

या $x = 25$ । अतः रेलगाड़ी 20 मिनट में 25 km की दूरी तय करेगी।

(ii) साथ ही, $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

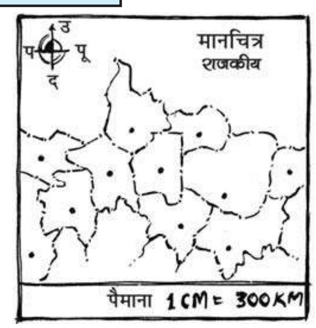
या $y = \frac{250 \times 60}{75} = 200$ मिनट, अर्थात् 3 घंटे 20 मिनट

अतः 250 km की दूरी तय करने के लिए 3 घंटे 20 मिनट का समय लगेगा।

वैकल्पिक रूप से, जब x ज्ञात है, तो संबंध $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ से y को ज्ञात किया जा सकता है।

> आप जानते हैं कि एक मानचित्र (map) एक बहुत बड़े क्षेत्र का लघु निरूपण होता है। प्रायः मानचित्र के सबसे नीचे वाले भाग में एक पैमाना (scale) दिया रहता है। यह पैमाना वास्तविक लंबाई और मानचित्र पर निरूपित लंबाई में संबंध दर्शाता है। इस प्रकार, मानचित्र का पैमाना मानचित्र पर दो बिंदुओं की दूरी और बड़े क्षेत्र पर दोनों बिंदुओं की वास्तविक दूरी का अनुपात होता है।
>
> उदाहरणार्थ, यदि मानचित्र पर 1 cm वास्तविक दूरी 8 km निरूपित करता है (अर्थात् पैमाना 1 cm : 8 km या 1 : 800000 है), तो उसी मानचित्र पर 2 cm वास्तविक दूरी 16 km निरूपित करता है। अतः, हम कह सकते हैं कि मानचित्र का पैमाना प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा पर आधारित है।

उदाहरण 5 : एक मानचित्र का पैमाना 1 : 30000000 दिया है। दो नगर मानचित्र में 4 cm की दूरी पर हैं। उनके बीच की वास्तविक दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : मान लीजिए कि मानचित्र दूरी x cm है तथा वास्तविक दूरी y cm है।

तब, $1 : 30000000 = x : y$ या $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$

क्योंकि $x = 4$ है, इसलिए $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$

अथवा $y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ cm $= 1200$ km

इस प्रकार, मानचित्र पर 4 cm की दूरी वाले नगरों की वास्तविक दूरी 1200 km है।

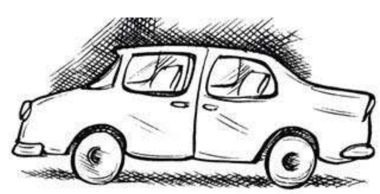
इन्हें कीजिए

अपने राज्य का एक मानचित्र लीजिए। वहाँ पर प्रयुक्त पैमाने को लिख लीजिए। पैमाने (ruler) का प्रयोग करते हुए, मानचित्र पर किन्हीं दो नगरों की दूरी मापिए। इन दोनों नगरों के बीच की वास्तविक दूरी परिकलित कीजिए।

प्रश्नावली 13.1

1. एक रेलवे स्टेशन के निकट कार पार्किंग शुल्क इस प्रकार हैं–

4 घंटों तक	60 रुपये
8 घंटों तक	100 रुपये
12 घंटों तक	140 रुपये
24 घंटों तक	180 रुपये

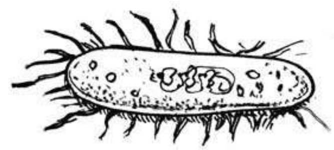


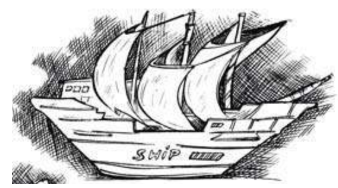
जाँच कीजिए कि क्या कार पार्किंग शुल्क पार्किंग समय के प्रत्यक्ष अनुपात में है।

2. एक पेंट के मूल मिश्रण (base) के 8 भागों में लाल रंग के पदार्थ का 1 भाग मिलाकर मिश्रण तैयार किया जाता है। निम्नलिखित सारणी में, मूल मिश्रण के वे भाग ज्ञात कीजिए जिन्हें मिलाए जाने की आवश्यकता है :

लाल रंग के पदार्थ के भाग	1	4	7	12	20
मूल मिश्रण के भाग	8	...	...	...	...

3. प्रश्न 2 में यदि लाल रंग के पदार्थ के 1 भाग के लिए 75 mL मूल मिश्रण की आवश्यकता है, तो मूल मिश्रण के 1800 mL में हमें कितना लाल रंग का पदार्थ मिलाना चाहिए?
4. किसी सॉफ्ट ड्रिंक फैक्ट्री में एक मशीन 840 बोतलें 6 घंटे में भरती है। वह मशीन पाँच घंटे में कितनी बोतलें भरेगी?
5. एक बैक्टीरिया (bacteria) या जीवाणु के फोटोग्राफ (चित्र) को 50,000 गुना आवर्धित करने पर उसकी लंबाई 5 cm हो जाती है, जैसा कि संलग्न चित्र में दिखाया गया है। इस बैक्टीरिया की वास्तविक लंबाई क्या है? यदि फोटोग्राफ को केवल 20,000 गुना आवर्धित किया जाए, तो उसकी आवर्धित लंबाई क्या होगी?





6. एक जहाज के मॉडल में, उसका मस्तूल (mast) 9 cm ऊँचा है, जबकि वास्तविक जहाज का मस्तूल 12 m ऊँचा है। यदि जहाज की लंबाई 28 m है, तो उसके मॉडल की लंबाई कितनी है?
7. मान लीजिए 2 kg चीनी में 9×10^6 क्रिस्टल हैं। निम्नलिखित चीनी में कितने चीनी के क्रिस्टल होंगे? (i) 5 kg (ii) 1.2 kg
8. रश्मि के पास एक सड़क का मानचित्र है, जिसके पैमाने में 1 cm की दूरी 18 km निरूपित करती है। वह उस सड़क पर अपनी गाड़ी से 72 km की दूरी तय करती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी मानचित्र में क्या होगी?
9. एक 5 m 60 cm ऊँचे ऊर्ध्वाधर खंभे की छाया की लंबाई 3 m 20 cm है। उसी समय पर ज्ञात कीजिए–
   (i) 10 m 50 cm ऊँचे एक अन्य खंभे की छाया की लंबाई
   (ii) उस खंभे की ऊँचाई जिसके छाया की लंबाई 5*m* है।
10. माल से लदा हुआ एक ट्रक 25 मिनट में 14 km चलता है। यदि चाल वही रहे, तो वह 5 घंटे में कितनी दूरी तय कर पाएगा?

इन्हें कीजिए

1. एक वर्गांकित कागज़ पर भिन्न-भिन्न भुजाओं के पाँच वर्ग खींचिए। निम्नलिखित सूचना को एक सारणी के रूप में लिखिए :

	वर्ग-1	**वर्ग-2**	**वर्ग-3**	**वर्ग-4**	**वर्ग-5**
एक भुजा की लंबाई (L)					
परिमाप (P)					
$\frac{L}{P}$					

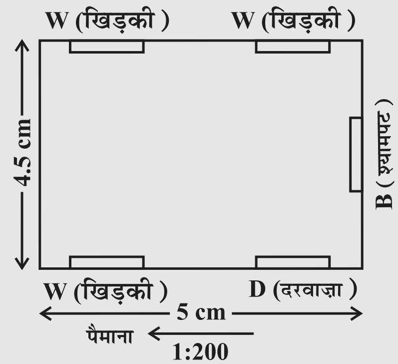
क्षेत्रफल (A)					
$\frac{L}{A}$					

ज्ञात कीजिए कि क्या भुजा की लंबाई

(a) वर्ग के परिमाप के अनुक्रमानुपाती है। (b) वर्ग के क्षेत्रफल के अनुक्रमानुपाती है।

2. पाँच व्यक्तियों के लिए हलवा बनाने के लिए, निम्नलिखित सामग्री की आवश्यकता होती है : सूजी / रवा = 250 g, चीनी = 300 g, घी = 200 g, पानी = 200 g
समानुपात की अवधारणा का प्रयोग करते हुए, अपनी कक्षा के लिए हलवा बनाने के लिए, इन सामग्रियों की मात्राओं में होने वाले परिवर्तनों का आकलन (estimate) कीजिए।

3. एक पैमाने का चुनाव करते हुए, अपनी कक्षा के कमरे का मानचित्र खींचिए, जिसमें खिड़कियाँ, दरवाजे, ब्लैकबोर्ड इत्यादि दर्शाए गए हों। (एक उदाहरण यहाँ दिया गया है।)



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

'सीधा समानुपात (विचरण)' की अब तक हल की गई समस्याओं में से कुछ को लीजिए। क्या आप सोचते हैं कि इन समस्याओं को इकाई की विधि या ऐकिक विधि (unitary method) से हल किया जा सकता है?

13.3 प्रतिलोम अनुपात

दो राशियाँ इस प्रकार भी परिवर्तित (बदल) हो सकती हैं कि यदि एक राशि में वृद्धि होती है, तो दूसरी राशि में कमी होती है तथा एक में कमी होने पर दूसरी में वृद्धि होती है। उदाहरणार्थ, जब किसी काम पर अधिक व्यक्ति लगाए जाते हैं, तो वह काम कम समय में पूरा हो जाता है। इसी प्रकार, यदि चाल बढ़ा दी जाए, तो एक निश्चित दूरी तय करने में कम समय लगता है। इसको समझने के लिए, आइए निम्नलिखित स्थिति को देखें :

ज़ाहिदा अपने स्कूल चार विभिन्न प्रकारों से जा सकती है। वह पैदल जा सकती है, दौड़ कर जा सकती है, साइकिल पर जा सकती है और कार में जा सकती है। संलग्न सारणी का अध्ययन कीजिए :

	पैदल चलकर	दौड़कर	साइकिल पर	कार द्वारा
गति (km/hour में)	3	6	9	45
लिया गया समय (मिनटों में)	30	15	10	2

$\times 2$ $\times 3$ $\times 15$

$\times \frac{1}{2}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{15}$

ध्यान दीजिए कि जब चाल में वृद्धि होती है, तो समान दूरी को तय करने में लगने वाले समय में कमी होती है। जब ज़ाहिदा दौड़कर अपनी चाल दुगुनी करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{2}$ हो जाता है।

किसी संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम (inverse) उसका व्युत्क्रम (reciprocal) होता है। इस प्रकार, $\frac{1}{2}$, 2 का प्रतिलोम है। (ध्यान दीजिए कि $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ है।)

जब वह अपनी चाल साइकिल पर तीन गुना करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{3}$ रह जाता है। इसी प्रकार, जब वह अपनी चाल 15 गुनी करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{15}$ रह जाता है। अर्थात् समय में होने वाली कमी का अनुपात चाल में होने वाली संगत वृद्धि के अनुपात का प्रतिलोम (inverse) होता है। क्या हम कह सकते हैं कि गति और समय व्युत्क्रमानुपात में परिवर्तित होते हैं।

आइए, एक अन्य उदाहरण पर विचार करें। एक विद्यालय गणित की पाठ्यपुस्तकों के लिए 6000 रुपये खर्च करना चाहता है। 40 रुपये प्रति पुस्तक की दर से कितनी पुस्तकें खरीदी जा सकती हैं? स्पष्ट है कि 150 पुस्तकें खरीदी जा सकती हैं। यदि एक पाठ्यपुस्तक का मूल्य 40 रुपये से अधिक हो, तो उसी निश्चित राशि में 150 से कम पुस्तकें खरीदी जाएँगी। निम्नलिखित सारणी को देखिए :

प्रत्येक पुस्तक का मूल्य (रु में)	40	50	60	75	80	100
खरीदी जा सकने वाली पुस्तकों की संख्या	150	120	100	80	75	60

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि यदि प्रत्येक पुस्तक के मूल्य में वृद्धि होती है, तो एक निश्चित फंड (राशि) में खरीदी जा सकने वाली पुस्तकों की संख्या में कमी हो जाएगी।

जब पुस्तक का मूल्य 40 रुपये से 50 रुपये होता है, तो इसकी वृद्धि का अनुपात 4:5 है तथा संगत पुस्तकों की संख्या 150 से कम होकर 120 होने पर अनुपात 5:4 है। इसका अर्थ है कि दोनों अनुपात एक-दूसरे के प्रतिलोम (inverse) हैं।

ध्यान दीजिए कि दोनों राशियों के संगत मानों का गुणनफल अचर अर्थात्

$$40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000 \text{ है।}$$

यदि हम प्रत्येक पुस्तक के मूल्य (रु. में) को x तथा खरीदी गई पुस्तकों की संख्याओं को y से निरूपित करें, तो जब x में वृद्धि होती है, तब y में कमी होती है और विलोमत: यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि गुणनफल xy अचर रहता है। हम कहते हैं कि x, y के साथ प्रतिलोम रूप से विचरण (varies inversely) करता है तथा y, x के साथ प्रतिलोम रूप से विचरण करता है। इस प्रकार, दो राशियाँ x और y प्रतिलोम समानुपात में विचरित कही जाती हैं, यदि उनके बीच में $xy = k$ के प्रकार का कोई संबंध हो, जहाँ k कोई अचर है। यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगतमान क्रमश: y_1, y_2 हों, तो $x_1y_1 = x_2y_2 (= k)$, अर्थात् $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ होता है।

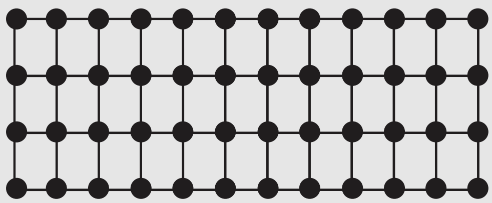
हम कहते हैं कि x और y **प्रतिलोम अनुपात (inverse proportion)** में हैं।

अत:, उपरोक्त उदाहरण में, एक पुस्तक का मूल्य और एक निश्चित धनराशि में खरीदी जाने वाली पुस्तकों की संख्या व्युत्क्रमानुपाती हैं। इसी प्रकार, एक वाहन की चाल और उसके द्वारा एक निश्चित दूरी तय करने में लिया गया समय परस्पर प्रतिलोम अनुपात में बदलते हैं। इसी प्रकार की कुछ अन्य राशियों के युग्मों के उदाहरणों के बारे में सोचिए जो प्रतिलोम अनुपात में बदलती (विचरित होती) हैं। अब आप फर्नीचर को व्यवस्थित करने की उस समस्या पर ध्यान दे सकते

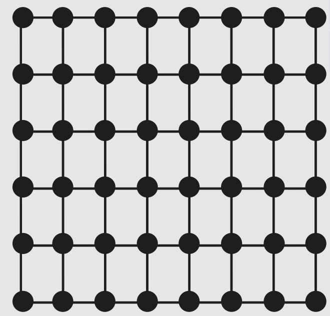
हैं, जो हमने इस अध्याय की भूमिका में वर्णित की थी। प्रतिलोम समानुपात को और अच्छी प्रकार से समझने के लिए एक क्रियाकलाप यहाँ दिया जा रहा है।

इन्हें कीजिए

एक वर्गांकित कागज़ लीजिए और उस पर 48 काउंटरों (counters) को पंक्तियों की विभिन्न संख्याओं में नीचे दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए :



4 पंक्तियाँ, 12 स्तंभ



6 पंक्तियाँ, 8 स्तंभ

पंक्तियों की संख्या (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
स्तंभों की संख्या (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

आप क्या देखते हैं? जब R में वृद्धि होती है, तो C में कमी होती है।

(i) क्या $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ है? (ii) क्या $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ है?

(iii) क्या R और C परस्पर व्युत्क्रमानुपाती हैं?

इस क्रियाकलाप को 36 काउंटरों के साथ प्रयास कीजिए।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि कौन-से चरों (यहाँ x और y) के युग्म परस्पर प्रतिलोम समानुपात में हैं :

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

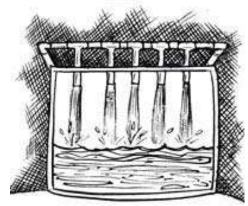
आइए, कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करें, जहाँ हम प्रतिलोम समानुपात की अवधारणा का प्रयोग करते हैं।

जब दो राशियाँ x और y प्रत्यक्ष या सीधे समानुपात में होती हैं (अर्थात् अनुक्रमानुपाती होती हैं), तो इन्हें $x \alpha y$ भी लिखा जाता है। जब दो राशियाँ x और y प्रतिलोम समानुपात में (अर्थात् व्युत्क्रमानुपाती) होती हैं, तो उन्हें $x \alpha \frac{1}{y}$ भी लिखा जाता है।

उदाहरण 7 : एक टंकी को 1 घंटे 20 मिनट में भरने के लिए 6 पाइपों (pipes) की आवश्यकता पड़ती है। यदि उसी प्रकार के केवल 5 पाइपों का ही उपयोग किया जाए, तो वह टंकी कितने समय में भरेगी?

हल : मान लीजिए कि टंकी को भरने का वांछित समय x मिनट है। तब, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

पाइपों की संख्या	6	5
समय (मिनटों में)	80	x



पाइपों की संख्या जितनी कम होगी, टंकी को भरने में उतना ही अधिक समय लगेगा। अत: यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

अत: $80 \times 6 = x \times 5 \ (x_1 y_1 = x_2 y_2)$

या $\frac{80 \times 6}{5} = x$ या $x = 96$

इस प्रकार, टंकी को 5 पाइपों द्वारा 96 मिनट, अर्थात् 1 घंटा 36 मिनट में भरा जाएगा।

उदाहरण 8 : एक छात्रावास में 100 विद्यार्थी हैं और उनके भोजन की सामग्री 20 दिन के लिए पर्याप्त है। यदि इस समूह में 25 विद्यार्थी और आ जाएँ, तो यह भोजन सामग्री कितने दिन चलेगी?

हल : मान लीजिए कि भोजन सामग्री 125 विद्यार्थियों के लिए y दिन तक चलेगी। हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :

विद्यार्थियों की संख्या	100	125
दिनों की संख्या	20	y

ध्यान दीजिए कि जितने विद्यार्थी अधिक होंगे उतने ही कम समय में भोजन सामग्री समाप्त हो जाएगी। अत: यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

इसलिए $100 \times 20 = 125 \times y$

या $\frac{100 \times 20}{125} = y$

या $y = 16$

वैकल्पिक रूप से, हम $x_1 y_1 (x_2 y_2$ को $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ लिख सकते हैं।

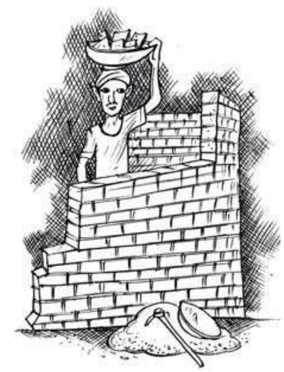
अर्थात् $y_1 : x_2 = y_2 : y_1$

या $100 : 125 = y : 20$

या $y = \frac{100 \times 20}{125} = 16$

उदाहरण 9 : यदि 15 श्रमिक किसी दीवार को 48 घंटे में निर्मित कर सकते हैं, तो इसी कार्य को 30 घंटे में पूरा करने के लिए, कितने श्रमिकों की आवश्यकता होगी?

हल : मान लीजिए दीवार को 30 घंटे में निर्मित करने के लिए y श्रमिकों की आवश्यकता है। तब, हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :



घंटों की संख्या	48	30
श्रमिकों की संख्या	15	y

स्पष्टत:, अधिक श्रमिक होने पर, दीवार बनने में कम समय लगेगा।
अत: यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

इसलिए, $48 \times 15 = 30 \times y$

अत: $\dfrac{48 \times 15}{30} = y$ या $y = 24$

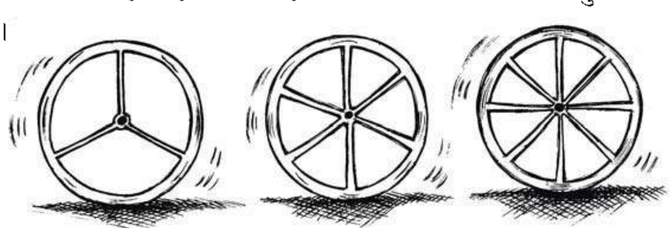
अर्थात् इस कार्य को 30 घंटे में समाप्त करने के लिए 24 श्रमिकों की आवश्यकता है।

प्रश्नावली 13.2

1. निम्नलिखित में से कौन प्रतिलोम अनुपात में हैं?
   (i) किसी कार्य पर लगे व्यक्तियों की संख्या और उस कार्य को पूरा करने में लगा समय।
   (ii) एक समान चाल से किसी यात्रा में लिया गया समय और तय दूरी।
   (iii) खेती की गई भूमि का क्षेत्रफल और काटी गई फसल।
   (iv) एक निश्चित यात्रा में लिया गया समय और वाहन की चाल।
   (v) किसी देश की जनसंख्या और प्रति व्यक्ति भूमि का क्षेत्रफल।
2. एक टेलीविज़न गेम शो (game show) में, 1,00,000 रुपये की पुरस्कार राशि विजेताओं में समान रूप से वितरित की जानी है। निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या एक व्यक्तिगत विजेता को दी जाने वाली पुरस्कार की धनराशि विजेताओं की संख्या के अनुक्रमानुपाती है या व्युत्क्रमानुपाती है।

विजेताओं की संख्या	1	2	4	5	8	10	20
प्रत्येक विजेता का पुरस्कार (रु में)	1,00,000	50,000	...	...	...	...	...

3. रहमान तीलियों या डंडियों का प्रयोग करते हुए, एक पहिया बना रहा है। वह समान तीलियाँ इस प्रकार लगाना चाहता है कि किन्हीं भी क्रमागत तीलियों के युग्मों के बीच के कोण बराबर हैं।



निम्नलिखित सारणी को पूरा करके, उसकी सहायता कीजिए :

तीलियों की संख्या	4	6	8	10	12
क्रमागत तीलियों के एक युग्म के बीच का कोण	90°	60°	...	...	...

(i) क्या तीलियों की संख्या और क्रमागत तीलियों के किसी युग्म के बीच का कोण प्रतिलोम समानुपात में है?

(ii) 15 तीलियों वाले एक पहिए के क्रमागत तीलियों के किसी युग्म का कोण परिकलित कीजिए।

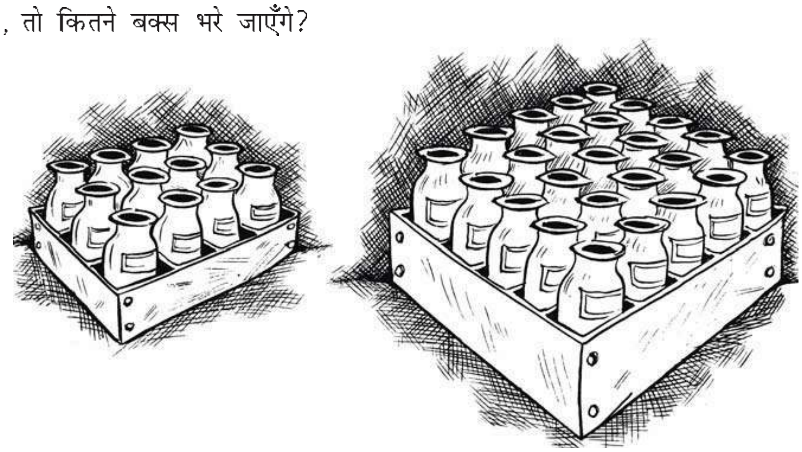
(iii) यदि क्रमागत तीलियों के प्रत्येक युग्म के बीच का कोण 40° है, तो आवश्यक तीलियों की संख्या कितनी होगी?

4. यदि किसी डिब्बे की मिठाई को 24 बच्चों में बाँटा जाए, तो प्रत्येक बच्चे को 5 मिठाइयाँ मिलती हैं। यदि बच्चों की संख्या में 4 की कमी हो जाए, तो प्रत्येक बच्चे को कितनी मिठाइयाँ मिलेंगी?

5. एक किसान की पशुशाला में 20 पशुओं के लिए 6 दिन का पर्याप्त भोजन है। यदि इस पशुशाला में 10 पशु और आ जाएँ, तो यह भोजन कितने दिन तक पर्याप्त रहेगा?

6. एक ठेकेदार यह आकलन करता है कि जसमिंदर के घर में पुन: तार लगाने का कार्य 3 व्यक्ति 4 दिन में कर सकते हैं। यदि वह तीन के स्थान पर चार व्यक्तियों को इस काम पर लगाता है, तो यह कार्य कितने दिन में पूरा हो जाएगा?

7. बोतलों के एक बैच (batch) को 25 बक्सों में रखा जाता है, जबकि प्रत्येक बक्स में 12 बोतलें हैं। यदि इसी बैच की बोतलों को इस प्रकार रखा जाए कि प्रत्येक बक्स में 20 बोतलें हों, तो कितने बक्स भरे जाएँगे?



8. एक फैक्ट्री को कुछ वस्तुएँ 63 दिन में बनाने के लिए 42 मशीनों की आवश्यकता होती है। उतनी ही वस्तुएँ 54 दिन में बनाने के लिए, कितनी मशीनों की आवश्यकता होगी?

9. एक कार एक स्थान तक पहुँचने में 60 km/h की चाल से चलकर 2 घंटे का समय लेती है। 80 km/h की चाल से उस कार को कितना समय लगेगा?

10. दो व्यक्ति एक घर में नई खिड़कियाँ 3 दिन में लगा सकते हैं।

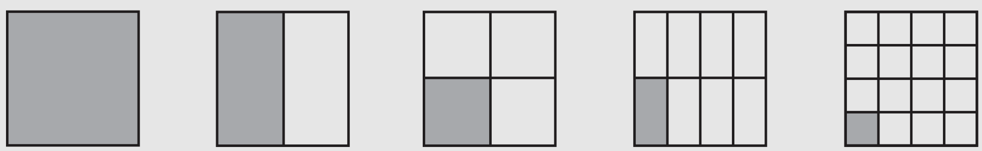
(i) कार्य प्रारंभ होने से पहले, एक व्यक्ति बीमार पड़ जाता है। अब यह कार्य कितने दिन में पूरा हो पाएगा?

(ii) एक ही दिन में खिड़कियाँ लगवाने के लिए, कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी?

11. किसी स्कूल में, 45 मिनट अवधि के 8 कालांश होते हैं। यह कल्पना करते हुए कि स्कूल का कार्य समय उतना ही रहता है, यदि स्कूल में बराबर अवधि के 9 कालांश हों, तो प्रत्येक कालांश कितने समय का होगा?

इन्हें कीजिए

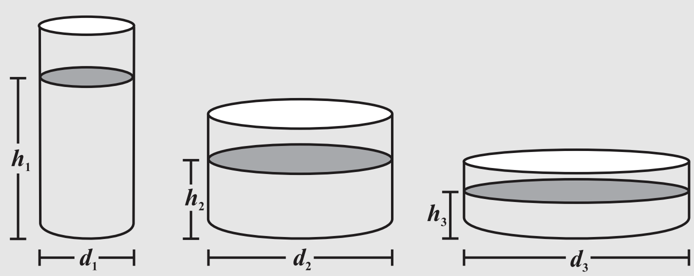
1. एक कागज़ की शीट लीजिए। इसे आकृति में दर्शाए अनुसार मोड़िए। प्रत्येक स्थिति में, भागों की संख्या तथा एक भाग का क्षेत्रफल लिखिए।



अपने प्रेक्षणों की सारणी बनाइए और उसकी अपने मित्रों से चर्चा कीजिए। क्या यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है? क्यों?

भागों की संख्या	1	2	4	8	16
प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल	कागज़ का क्षेत्रफल	कागज़ के क्षेत्रफल का $\frac{1}{2}$	...	...	...

2. वृत्तीय आधार वाले विभिन्न मापों के कुछ बर्तन लीजिए। प्रत्येक बर्तन में पानी की समान मात्रा भरिए। प्रत्येक बर्तन का व्यास और उस बर्तन में पानी किस ऊँचाई तक है उसे माप कर लिखिए। अपने प्रेक्षणों की एक सारणी बनाइए। क्या यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है?



बरतन का व्यास (cm में)			
पानी के स्तर की ऊँचाई (cm में)			

हमने क्या चर्चा की?

1. दो राशियाँ x और y प्रत्यक्ष या **सीधे समानुपात** में अथवा **परस्पर अनुक्रमानुपाती** कही जाती हैं, यदि वे साथ-साथ इस प्रकार बढ़ती (घटती) हैं कि उनके संगत मानों का अनुपात अचर रहता है। अर्थात्, यदि $\frac{x}{y} = k$ हो (जहाँ k एक धनात्मक अचर है), तो x और y परस्पर अनुक्रमानुपाती कहलाती हैं। इस प्रकार की स्थिति में, यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हों तो $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ होता है।

2. दो राशियाँ x और y **प्रतिलोम समानुपात** में अथवा **परस्पर व्युत्क्रमानुपाती** कही जाती हैं, यदि x में हुई एक वृद्धि y में एक समानुपाती कमी उत्पन्न करे तथा x में हुई एक कमी y में एक समानुपाती वृद्धि उत्पन्न करे ताकि इनके संगत मानों का गुणनफल अचर रहे। अर्थात् यदि $xy = k$ हो, तो x और y परस्पर व्युत्क्रमानुपाती कहलाती हैं। इस स्थिति में, यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हों, तो $x_1 y_1 = x_2 y_2$ या $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ होता है।

अध्याय 14

गुणनखंडन

14.1 भूमिका

14.1.1 प्राकृत संख्याओं के गुणनखंड

आपको याद होगा कि आपने गुणनखंडों (factors) के बारे में कक्षा VI में पढ़ा था। आइए, एक प्राकृत संख्या लेते हैं। मान लीजिए यह संख्या 30 है। हम इसे अन्य प्राकृत संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखते हैं, जैसे

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

इस प्रकार 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 और 30 संख्या 30 के गुणनखंड हैं। इनमें से 2, 3 और 5, संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंड हैं (क्यों?)। जब कोई संख्या अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखी हो, तो वह उसका अभाज्य गुणनखंड रूप कहलाता है। उदाहरण के लिए 30 को अभाज्य गुणनखंड रूप में $2 \times 3 \times 5$ लिखते हैं।

> हम जानते हैं कि 30 को इस रूप में भी लिखा जा सकता है :
> $30 = 1 \times 30$
> इस प्रकार, 1 और 30 भी 30 के गुणनखंड हैं। आप देखेंगे कि 1 प्रत्येक संख्या का एक गुणनखंड होता है उदाहरणार्थ, $101 = 1 \times 101$ होता है।
> परंतु जब भी हम किसी संख्या को गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे, तो हम, 1 को गुणनखंड के रूप में तब तक नहीं लिखेंगे। जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो।

70 का अभाज्य गुणनखंड रूप $2 \times 5 \times 7$ है। 90 का अभाज्य गुणनखंड रूप $2 \times 3 \times 3 \times 5$ है, इत्यादि।

इसी प्रकार, हम बीजीय व्यंजकों (algebraic expression) को भी उनके गुणनखंडों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसका हम इस अध्याय में अध्ययन करेंगे।

14.1.2 बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड

हम कक्षा VII में देख चुके हैं कि बीजीय व्यंजकों के पद (terms) गुणनखंडों के गुणनफलों के रूप में बनते हैं। उदाहरणार्थ, बीजीय व्यंजक $5xy + 3x$ में, पद $5xy$ गुणनखंडों 5, x और y से बना है, अर्थात्

$$5xy = 5 \times x \times y$$

ध्यान दीजिए कि $5xy$ के गुणनखंड 5, x और y को और आगे गुणनखंडित नहीं किया जा सकता है, अर्थात् उन्हें गुणनखंडों के

> ध्यान दीजिए कि 1 पद $5xy$, का एक गुणनखंड है, क्योंकि
> $$5xy = 1 \times 5 \times x \times y$$
> वास्तव में, 1 प्रत्येक पद का एक गुणनखंड होता है। प्राकृत संख्याओं की स्थिति की ही तरह, जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो, हम 1 को किसी भी पद का अलग से गुणनखंड नहीं लिखते हैं।

गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। हम कह सकते हैं कि $5xy$ के अभाज्य गुणनखंड (prime factors) 5, x और y हैं। बीजीय व्यंजकों में, हम 'अभाज्य' के स्थान पर शब्द 'अखंडनीय (irreducible)' का प्रयोग करते हैं। हम कहते हैं कि $5xy$ का अखंडनीय रूप $5 \times x \times y$ है। ध्यान दीजिए कि $5 \times (xy)$ पद $5xy$ का अखंडनीय रूप नहीं है, क्योंकि गुणनखंड xy को और आगे x एवं y के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात् $xy = x \times y$ है।

अब, व्यंजक $3x\,(x + 2)$ पर विचार कीजिए। इसे गुणनखंडों 3, x और $(x + 2)$ के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात्

$$3x(x + 2) = 3 \times x \times (x + 2)$$

व्यंजक $3x\,(x + 2)$ के अखंडनीय गुणनखंड 3, x और $(x + 2)$ हैं।

इसी प्रकार, व्यंजक $10x\,(x + 2)\,(y + 3)$ को अखंडनीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$10x\,(x + 2)\,(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x + 2) \times (y + 3)$$

14.2 गुणनखंडन क्या है?

जब हम किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखंड करते हैं, तो हम उसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखंड, संख्याएँ, बीजीय चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं। $3xy$, $5x^2y$, $2x\,(y + 2)$, $5\,(y + 1)\,(x + 2)$ जैसे व्यंजक पहले से ही गुणनखंड रूप में हैं। जैसा कि हम पहले से ही जानते हैं, हम उपरोक्त व्यंजकों के गुणनखंड इन्हें देखकर ही पढ़ सकते हैं।

इसके विपरीत $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$ जैसे व्यंजकों पर विचार कीजिए। यह स्पष्ट नहीं है कि इनके गुणनखंड क्या हैं। इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखंड करने के लिए, हमें क्रमबद्ध विधियाँ विकसित करने की आवश्यकता है। यही अब हम करेंगे।

14.2.1 सार्व गुणनखंडों की विधि

- हम एक सरल उदाहरण से प्रारंभ करते हैं : $2x + 4$ के गुणनखंड कीजिए।

  हम इसके प्रत्येक पद को अखंडनीय गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे :

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$

अत: $$2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

ध्यान दीजिए कि गुणनखंड 2 दोनों पदों में उभयनिष्ठ (सार्व) है।

देखिए, बंटन नियम द्वारा

$$2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

अत: हम लिख सकते हैं कि

$$2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2\,(x + 2)$$

इस प्रकार, व्यंजक $2x + 4$ वही है जो $2\,(x + 2)$ है। अब हम इसके गुणनखंड पढ़ सकते हैं : ये 2 और $(x + 2)$ हैं। ये गुणनखंड अखंडनीय हैं।

अब, $5xy + 10x$ के गुणनखंड कीजिए।

$5xy$ और $10x$ के अखंडनीय गुणनखंड रूप क्रमश: हैं :

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

ध्यान दीजिए कि दोनों पदों में 5 और x उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं। अब,

$$5xy + 10x = (5 \times x \times y) + (5 \times x \times 2)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

हम दोनों पदों को बंटन नियम द्वारा संयोजित करते हैं :

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$$

अतः $5xy + 10x = 5x(y + 2)$ (यही वांछित गुणनखंड रूप है।)

उदाहरण 1 : $12a^2b + 15ab^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम पाते हैं :

$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

इन दोनों पदों में 3, a और b सार्व गुणनखंड हैं

अतः

$$12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$$
$$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$$
$$= 3ab \times (4a + 5b) \quad \text{(पदों को मिलाने पर)}$$
$$= 3ab\,(4a + 5b) \quad \text{(वांछित गुणनखंड रूप)}$$

उदाहरण 2 : $10x^2 - 18x^3 + 14x^4$ के गुणनखंड कीजिए।

हल :

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$
$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$
$$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$$

इन तीनों पदों में सार्व गुणनखंड 2, x और x हैं।

अतः

$$10x^2 - 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x)$$
$$+ (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$$
$$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$$
$$= 2x^2 \times (5 - 9x + 7x^2) = \underbrace{2x^2(7x^2 - 9x + 5)}$$ (तीनों पदों को मिलाने पर)

क्या आप देख रहे हैं कि एक व्यंजक के गुणनखंड रूप में केवल एक ही पद होता है?

प्रयास कीजिए

गुणनखंड कीजिए :

(i) $12x + 36$ (ii) $22y - 33z$ (iii) $14pq + 35pqr$

14.2.2 पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखंडन

व्यंजक $2xy + 2y + 3x + 3$ पर विचार कीजिए। आप देखेंगे कि पहले दो पदों में सार्व गुणनखंड 2 और y हैं तथा अंतिम दो पदों में सार्व गुणनखंड 3 है। परंतु सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड नहीं है। हम किस प्रकार प्रारंभ करेंगे?

आइए, $(2xy + 2y)$ को गुणनखंड रूप में लिखें।

$$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$$
$$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$$
$$= (2y \times x) + (2y \times 1) = 2y\,(x + 1)$$

इसी प्रकार,

$$3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$$
$$= 3 \times (x + 1) = 3\,(x + 1)$$

ध्यान दीजिए : यहाँ हमें 1 को गुणनखंड के रूप में दर्शाने की आवश्यकता है। क्यों?

अत: $2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1)$

ध्यान दीजिए कि यहाँ दाएँ पक्ष के दोनों पदों में एक सार्व गुणनखंड $(x + 1)$ है। दोनों पदों को मिलाने पर,

$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1) = (x + 1)\,(2y + 3)$$

अब, व्यंजक $2xy + 2y + 3x + 3$ गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में है। इसके गुणनखंड $(x + 1)$ और $(2y + 3)$ हैं। ध्यान दीजिए कि ये गुणनखंड अखंडनीय हैं।

पुन: समूहन (regrouping) क्या है?

मान लीजिए कि उपरोक्त व्यंजक $2xy + 3 + 2y + 3x$ के रूप में दिया है, तब इसका गुणनखंडन देखना सरल नहीं है। इसी व्यंजक को $2xy + 2y + 3x + 3$ के रूप में पुनर्व्यवस्थित करने पर, इसके $(2xy + 2y)$ और $(3x + 3)$ समूह बनाकर गुणनखंडन किया जा सकता है, यही **पुन: समूहन** है।

पुन: समूहन एक से अधिक विधियों द्वारा संभव हो सकता है। मान लीजिए कि हम उपरोक्त व्यंजक को $2xy + 3x + 2y + 3$ के रूप में पुन: समूहन करते हैं। इससे भी हम गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं। आइए, प्रयास करें :

$$\begin{aligned} 2xy + 3x + 2y + 3 &= 2 \times x \times y + 3 \times x + 2y + 3 \\ &= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3) \\ &= (2y + 3)\,(x + 1) \end{aligned}$$

गुणनखंड वही हैं (जैसा कि उन्हें होना चाहिए), यद्यपि वे विभिन्न क्रम में दिखाई दे रहे हैं।

उदाहरण 3 : $6xy - 4y + 6 - 9x$ के गुणनखंड कीजिए।

हल :

चरण 1 जाँच कीजिए कि क्या सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड है। यहाँ कोई नहीं है।

चरण 2 समूहन के बारे में सोचिए। ध्यान दीजिए कि पहले दो पदों में सार्व गुणनखंड $2y$ है। अत:,

$$6xy - 4y = 2y\,(3x - 2) \qquad \text{(a)}$$

अंतिम दो पदों के बारे में क्या कहा जा सकता है? उन्हें देखिए। यदि आप इनका क्रम बदलकर $-9x + 6$, लिख लें, तो गुणनखंड $(3x - 2)$ आ जाएगा।

अत:
$$\begin{aligned} -9x + 6 &= -3\,(3x) + 3\,(2) \\ &= -3\,(3x - 2) \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

चरण 3 (a) और (b) को एक साथ रखने पर,

$$\begin{aligned} 6xy - 4y + 6 - 9x &= 6xy - 4y - 9x + 6 \\ &= 2y\,(3x - 2) - 3\,(3x - 2) \\ &= (3x - 2)\,(2y - 3) \end{aligned}$$

इस प्रकार, $(6xy - 4y + 6 - 9x)$ के गुणनखंड $(3x - 2)$ और $(2y - 3)$ हैं।

प्रश्नावली 14.1

1. दिए हुए पदों में सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए :
   (i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14\,pq, 28p^2q^2$
   (iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6\,abc, 24ab^2, 12\,a^2b$
   (vi) $16\,x^3, -4x^2, 32x$ (vii) $10\,pq, 20qr, 30rp$
   (viii) $3x^2\,y^3, 10x^3\,y^2, 6\,x^2\,y^2z$
2. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   (i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$
   (iv) $-16\,z + 20\,z^3$ (v) $20\,l^2\,m + 30\,a\,l\,m$
   (vi) $5\,x^2\,y - 15\,xy^2$ (vii) $10\,a^2 - 15\,b^2 + 20\,c^2$
   (viii) $-4\,a^2 + 4\,ab - 4\,ca$ (ix) $x^2\,y\,z + x\,y^2z + x\,y\,z^2$
   (x) $a\,x^2\,y + b\,x\,y^2 + c\,x\,y\,z$
3. गुणनखंड कीजिए : (तीनों पदों को मिलाने पर)
   (i) $x^2 + x\,y + 8x + 8y$ (ii) $15\,xy - 6x + 5y - 2$
   (iii) $ax + bx - ay - by$ (iv) $15\,pq + 15 + 9q + 25p$
   (v) $z - 7 + 7\,x\,y - x\,y\,z$

14.2.3 सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन

हम जानते हैं कि

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(I)}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(III)}$$

निम्नलिखित हल किए उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाएगा कि गुणनखंडन के लिए इन सर्वसमिकाओं (identities) का किस प्रकार प्रयोग किया जा सकता है। पहले हम दिए हुए व्यंजक को देखते हैं। यदि यह उपरोक्त सर्वसमिकाओं में से किसी एक के दाएँ पक्ष के रूप का है, तो उस सर्वसमिका के बाएँ पक्ष के संगत व्यंजक से वांछित गुणनखंड प्राप्त हो जाते हैं।

उदाहरण 4 : $x^2 + 8x + 16$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : इस व्यंजक को देखिए। इसके तीन पद हैं। अत: इसमें सर्वसमिका III का प्रयोग नहीं किया जा सकता है। साथ ही, इसके पहले और तीसरे पद पूर्ण वर्ग हैं तथा बीच वाले पद का चिह्न धनात्मक है। अत: यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप का है, जहाँ $a = x$ और $b = 4$ हैं।

इस प्रकार, $a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2\,(x)\,(4) + 4^2$

$= x^2 + 8x + 16$

क्योंकि $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,

तुलना करने पर, $x^2 + 8x + 16 = (\,x + 4)^2$ (वांछित गुणनखंडन)

उदाहरण 5 : $4y^2 - 12y + 9$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि $4y^2 = (2y)^2, 9 = 3^2$ और $12y = 2 \times 3 \times (2y)$

अत: $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times 3 \times (2y) + (3)^2$

$= (\,2y - 3)^2$ (वांछित गुणनखंडन)

ध्यान दीजिए कि दिया हुआ व्यंजक $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का है, जहाँ $a = 2y$, $b = 3$ तथा $2ab = 2 \times 2y \times 3 = 12y$ हैं।

उदाहरण 6 : $49p^2 - 36$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यहाँ दो पद हैं। दोनों ही पूर्ण वर्ग हैं तथा दूसरा ऋणात्मक है अर्थात् यह व्यंजक $(a^2 - b^2)$ के रूप का है। यहाँ सर्वसमिका III का प्रयोग किया जाएगा।

$$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (6)^2$$
$$= (7p - 6)(7p + 6) \text{ (वांछित गुणनखंडन)}$$

उदाहरण 7 : $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : दिए हुए व्यंजक के पहले तीन पदों से $(a - b)^2$ प्राप्त होता है। चौथा पद एक वर्ग है। इसलिए इस व्यंजक को दो वर्गों के अंतर के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

इस प्रकार $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (सर्वसमिका II से)

$= [(a - b) - c)((a - b) + c)]$ (सर्वसमिका III से)

$= (a - b - c)(a - b + c)$ (वांछित गुणनखंडन)

ध्यान दीजिए कि वांछित गुणनखंडन प्राप्त करने के लिए, हमने किस प्रकार एक के बाद एक दो सर्वसमिकाओं का प्रयोग किया है।

उदाहरण 8 : $m^4 - 256$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $m^4 = (m^2)^2$ और $256 = (16)^2$

अतः दिए हुए व्यंजक में सर्वसमिका III का प्रयोग होगा।

इसलिए $m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$

$= (m^2 - 16)(m^2 + 16)$ [(सर्वसमिका (III)से]

अब $m^2 + 16$ के आगे गुणनखंड नहीं किए जा सकते हैं, परंतु $(m^2 - 16)$ के सर्वसमिका III के प्रयोग से और भी गुणनखंड किए जा सकते हैं।

अब $m^2 - 16 = m^2 - 4^2$

$= (m - 4)(m + 4)$

इसलिए $m^4 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$

14.2.4 $(x + a)(x + b)$ के रूप के गुणनखंड

आइए अब चर्चा करें कि हम एक चर वाले व्यंजकों, जैसे $x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$, इत्यादि के गुणनखंड किस प्रकार कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि ये व्यंजक $(a + b)^2$ या $(a - b)^2$ के प्रकार के नहीं है, अर्थात् ये पूर्ण वर्ग नहीं हैं। उदाहरणार्थ, $x^2 + 5x + 6$ में पद 6 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। स्पष्टतः इस प्रकार के व्यंजक $(a^2 - b^2)$ के प्रकार के भी नहीं हैं।

परंतु ये $x^2 + (a + b)x + ab$ के प्रकार के प्रतीत होते हैं। इसलिए इस प्रकार के गुणनखंड करने के लिए, हम पिछले अध्याय में अध्ययन की गई सर्वसमिका सात का प्रयोग कर सकते हैं। यह सर्वसमिका है :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \qquad \text{(IV)}$$

इसके लिए हमें x के गुणांक (coefficient) और अचर पद को देखना होगा। आइए, निम्नलिखित उदाहरण में देखें कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 9 : $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यदि हम सर्वसमिका (IV) के दाएँ पक्ष (RHS) से $x^2 + 5x + 6$ की तुलना करें, तो हम पाएँगे कि $ab = 6$ और $a + b = 5$ है। यहाँ से हमें a और b ज्ञात करने चाहिए। तब $(x + a)$ और $(x + b)$ गुणनखंड होंगे।

यदि $ab = 6$ है, तो इसका अर्थ है कि a और b संख्या 6 के गुणनखंड हैं।

आइए, $a = 6$ और $b = 1$ लेकर प्रयास करें। इन मानों के लिए $a + b = 7$ है और 5 नहीं है। इसलिए यह विकल्प सही नहीं है।

आइए $a = 2$ और $b = 3$ लेकर प्रयास करें। इसके लिए, $a + b = 5$ है, जो ठीक वही है जो हम चाहते हैं।

तब, इस दिए हुए व्यंजक का गुणनखंड रूप $(x + 2)(x + 3)$ है।

व्यापक रूप में, $x^2 + px + q$ के प्रकार के बीजीय व्यंजक के गुणनखंड करने के लिए, हम q के (अर्थात् अचर पद के) दो गुणनखंड a और b इस प्रकार ज्ञात करते हैं कि		
	$ab = q$ और $a + b = p$ हो।	
तब, यह व्यंजक हो जाता है :	$x^2 + (a + b)x + ab$	
या	$x^2 + ax + bx + ab$	
या	$x(x + a) + b(x + a)$	
या	$(x + a)(x + b)$	जो, वांछित गुणनखंड हैं।

उदाहरण 10 : $y^2 - 7y + 12$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $12 = 3 \times 4$ और $3 + 4 = 7$ है।

इसलिए
$$y^2 - 7y + 12 = y^2 - 3y - 4y + 12$$
$$= y(y - 3) - 4(y - 3) = (y - 3)(y - 4)$$

ध्यान दीजिए कि इस बार हमने a और b ज्ञात करने के लिए, दिए हुए व्यंजक की तुलना सर्वसमिका IV से नहीं की। पर्याप्त अभ्यास के बाद, आपको दिए हुए व्यंजकों के गुणनखंड करने के लिए उनकी तुलना सर्वसमिकाओं के व्यंजकों से करने की आवश्यकता नहीं है तथा आप सीधे ही गुणनखंड कर सकते हैं जैसा हमने ऊपर किया है।

उदाहरण 11 : $z^2 - 4z - 12$ के गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

हल : यहाँ $ab = -12$ है। इसका अर्थ है कि a और b में से एक ऋणात्मक है। साथ ही, $a + b = -4$ है। इसका अर्थ है कि बड़े संख्यात्मक मान वाला ऋणात्मक है। हम $a = -4$ और $b = 3$; लेकर प्रयास करते हैं। परंतु यह कार्य नहीं करेगा, क्योंकि $a + b = -1$ है। इनसे अगले संभव मान $a = -6$ और $b = 2$ हैं, तब $a + b = -4$ है, जो हमें चाहिए।

अत:
$$z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$$
$$= z(z - 6) + 2(z - 6)$$
$$= (z - 6)(z + 2)$$

उदाहरण 12 : $3m^2 + 9m + 6$ के गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 3 सभी पदों का एक सार्व गुणनखंड है।

अत: $3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$

अब, $m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2$ (क्योंकि $2 = 1 \times 2$)

$= m(m + 1) + 2(m + 1)$

$= (m + 1)(m + 2)$

अत: $3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   (i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$
   (iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$
   (vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$
   (vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (संकेत : पहले $(l + m)^2$ को प्रसारित कीजिए।)
   (viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
2. गुणनखंड कीजिए :
   (i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$
   (iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$
   (vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$
   (viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$
3. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   (i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$
   (iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$
   (vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$
   (viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$
4. गुणनखंड कीजिए :
   (i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$
   (iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
5. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   (i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

14.3 बीजीय व्यंजकों का विभाजन

हम सीख चुके हैं कि बीजीय व्यंजकों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है। हम यह भी जानते हैं कि दो व्यंजकों को किस प्रकार गुणा किया जाता है। परंतु हमने एक बीजीय व्यंजक से दूसरे व्यंजक के विभाजन पर अभी तक चर्चा नहीं की है इस अनुच्छेद में, हम यही करना चाहते हैं।

आपको याद होगा कि विभाजन (division) गुणन (multiplication) की प्रतिलोम संक्रिया है। इस प्रकार, $7 \times 8 = 56$ से $56 \div 8 = 7$ या $56 \div 7 = 8$ प्राप्त होता है।

यही हम बीजीय व्यंजकों के विभाजन (या भाग देने) के लिए भी कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

अत: $6x^3 \div 2x = 3x^2$

तथा साथ ही, $6x^3 \div 3x^2 = 2x$

(ii) $5x\,(x + 4) = 5x^2 + 20x$

अत: $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

तथा साथ ही, $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$

अब हम ध्यानपूर्वक देखेंगे कि एक व्यंजक को अन्य व्यंजक से किस प्रकार विभाजित किया जा सकता है। प्रारंभ करने के लिए, हम एक एकपदी (monomial) का एक अन्य एकपदी से विभाजन पर विचार करेंगे।

14.3.1 एकपदी का एक अन्य एकपदी से विभाजन

$6x^3 \div 2x$ पर विचार कीजिए।

हम $2x$ और $6x^3$ को अखंडनीय गुणनखंड रूपों में लिख सकते हैं :

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

अब हम $2x$ को अलग करने के लिए, $6x^3$ के गुणनखंडों के समूह बनाते हैं।

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

इस प्रकार, $6x^3 \div 2x = 3x^2$

सार्व गुणनखंडों को निरस्त करने की एक संक्षिप्त विधि वह है जो हम संख्याओं के विभाजन में करते हैं।

जैसे $$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

इसी प्रकार, $$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

उदाहरण 13 : निम्नलिखित विभाजन कीजिए :

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

हल :

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

अत: $$(-20x^4) \div 10x^2 = \frac{-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x}{2 \times 5 \times x \times x} = -2 \times x \times x = -2x^2$$

(ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$ $= \dfrac{7 \times x \times x \times y \times y \times z \times z}{2 \times 7 \times x \times y \times z}$

$$= \frac{x \times y \times z}{2} = \frac{1}{2}xyz$$

प्रयास कीजिए

भाग दीजिए :

(i) $24xy^2z^3$ को $6yz^2$ से (ii) $63a^2b^4c^6$ को $7a^2b^2c^3$ से

14.3.2 एक बहुपद का एक एकपदी से विभाजन

आइए, एक त्रिपद (trinomial) $4y^3 + 5y^2 + 6y$ का एकपदी $2y$ से विभाजन पर विचार करें।

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2 \times 2 \times y \times y \times y) + (5 \times y \times y) + (2 \times 3 \times y)$$

[यहाँ, हम बहुपद (polynomial) के प्रत्येक पद को गुणनखंड के रूप में लिखते हैं।] हम पाते हैं कि $2 \times y$ दो पदों में एक सार्व गुणनखंड है साथ ही, हम इसे तीसरे पद $5y^2$ के लिए भी एक सार्व गुणनखंड के रूप में बदल सकते हैं। तब, हम प्राप्त करते हैं :

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2 \times y \times (2 \times y \times y) + 2 \times y \times \left(\frac{5}{2} \times y\right) + 2 \times y \times 3$$

$$= 2y\,(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}y\right) + 2y\,(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (सार्व गुणनखंड $2y$ को अलग दर्शाया गया है

अत: $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y} = \frac{2y(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3)}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

वैकल्पिक रूप में, हम त्रिपद के प्रत्येक पद को, निरस्तीकरण की विधि का प्रयोग करते हुए, उस एकपदी से भाग दे सकते थे :

यहाँ हम अंश में बहुपद के प्रत्येक पद को हर में एकपदी से भाग देते हैं।

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

उदाहरण 14 : उपरोक्त दोनों विधियों का प्रयोग करते हुए, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ को $8xyz$ से भाग दीजिए।

हल : $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z \times (x + y + z) \quad \text{(सार्व गुणनखंड बाहर लेने पर)}$$

$$= 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$$

अत: $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)}{8 \times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3\,(x + y + z)$$

वैकल्पिक रूप में $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \dfrac{24x^2yz}{8xyz} + \dfrac{24xy^2z}{8xyz} + \dfrac{24xyz^2}{8xyz}$

$$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$$

14.4 बहुपद का बहुपद से विभाजन

- $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$ पर विचार कीजिए।

  हर के साथ $(7x^2 + 14x)$ के गुणनखंडों की जाँच एवं मिलान करने के लिए, पहले इसके गुणनखंड करेंगे।

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$

$$= 7 \times x \times (x + 2) = 7x(x + 2)$$

क्या यह अंश के प्रत्येक पद को हर में दिए द्विपद से भाग देने में कोई सहायता करेगा?

अब, $(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \dfrac{7x^2 + 14x}{x + 2}$

$$= \frac{7x(x + 2)}{x + 2} = 7x \text{ (गुणनखंड } (x + 2) \text{ को काटने पर)}$$

उदाहरण 15 : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ को $11x\,(x - 8)$ से भाग दीजिए।

हल : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$, के गुणनखंड करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$

(कोष्ठक में से सार्व गुणनखंड x^2 बाहर करने पर)

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,[x\,(x - 8) + 3(x - 8)]$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\;(x - 8)\,(x + 3)$$

अत: $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x + 3) \times (x - 8)}{11 \times x \times (x - 8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x\,(x + 3) = 4x(x + 3)$$

उदाहरण 16 : $z(5z^2 - 80)$ को $5z(z + 4)$ से भाग दीजिए।

हम अंश और हर में से सार्व गुणनखंड 11, x और $(x - 8)$ को काट देते हैं।

हल : भाज्य $= z(5z^2 - 80)$

$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$

$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$

$= 5z \times (z + 4)\,(z - 4)$ [सार्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ को प्रयोग करने पर]

इस प्रकार, $z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \dfrac{5z(z+4)(z-4)}{5z(z+4)} = (z - 4)$

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखित विभाजन कीजिए :
   (i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$
   (iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$
2. दिए हुए बहुपद को दिए हुए एकपदी से भाग दीजिए :
   (i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$
   (iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$
   (v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$
3. निम्नलिखित विभाजन कीजिए :
   (i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$
   (iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$
   (v) $96abc\,(3a - 12)\,(5b - 30) \div 144(a - 4)\,(b - 6)$
4. निर्देशानुसार भाग दीजिए :
   (i) $5(2x + 1)\,(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)\,(y - 4) \div 13x(y - 4)$
   (iii) $52pqr\,(p + q)\,(q + r)\,(r + p) \div 104pq(q + r)\,(r + p)$
   (iv) $20(y + 4)\,(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3) \div x(x + 1)$
5. व्यंजक के गुणनखंड कीजिए और निर्देशानुसार भाग दीजिए :
   (i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$
   (iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$
   (v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$
   (vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

14.5 क्या आप त्रुटि ज्ञात कर सकते हैं?

कार्य (Task) 1 एक समीकरण को हल करते समय, सरिता निम्नलिखित प्रकार से हल करती है :

$3x + x + 5x = 72$

अत: $8x = 72$

और इसलिए, $x = \dfrac{72}{8} = 9$

उसने कहाँ त्रुटि की है? सही उत्तर ज्ञात कीजिए।

किसी पद के गुणांक 1 को प्राय: दर्शाया नहीं जाता है। परंतु समान पदों को जोड़ते समय, हम इसे योग में सम्मिलित करते हैं।

कार्य (Task) 2 अप्पू ने यह किया :

$$x = -3\ ,\ 5x = 5 - 3 = 2$$

क्या उसकी प्रक्रिया सही है? यदि नहीं, तो इसे सही कीजिए।

एक ऋणात्मक मान रखते समय, कोष्ठकों का प्रयोग करना याद रखें।

कार्य (Task) 3 नम्रता और सलमा ने बीजीय व्यंजकों का गुणा निम्नलिखित प्रकारों से किया :

	नम्रता	सलमा
(a)	$3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(b)	$(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(c)	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(d)	$(x+8)^2 = x^2 + 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$
(e)	$(x-5)^2 = x^2 - 25$	$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

याद रखिए, जब आप कोष्ठकों में बंद किसी व्यंजक को उसके बाहर लिखे अचर (या चर) से गुणा करते हैं, तो व्यंजक के प्रत्येक पद से उस अचर (या चर) को गुणा किया जाता है।

याद रखिए, जब आप किसी एकपदी का वर्ग करते हैं, तो संख्यात्मक गुणांक और प्रत्येक गुणनखंड का वर्ग किया जाता है।

कोई भी सूत्र प्रयोग करने से पहले, यह सुनिश्चित कर लें कि क्या वह सूत्र वास्तव में प्रयोग किया जा सकता है।

क्या नम्रता और सलमा द्वारा किए गए गुणन सही हैं? कारण सहित अपने उत्तर दीजिए।

कार्य (Task) 4 जोसफ ने एक विभाजन इस प्रकार किया : $\dfrac{a+5}{5} = a + 1$

उसके मित्र शिरीश ने यह विभाजन इस प्रकार किया : $\dfrac{a+5}{5} = a$

उसके अन्य मित्र सुमन ने इसे इस प्रकार किया : $\dfrac{a+5}{5} = \dfrac{a}{5} + 1$

किसने विभाजन सही किया? किसने विभाजन गलत विधि से किया? और क्यों?

एक बहुपद को एकपदी से भाग देते समय, हम अंश के बहुपद के प्रत्येक पद को हर में दिए एकपदी से भाग देते हैं।

कुछ मनोरंजन!

अतुल सदैव अलग तरीके से सोचता है। वह सुमथि अध्यापिका से पूछता है, "यदि आप जो कुछ कहती हैं वह सत्य है, तो मैं $\dfrac{64}{16} = \dfrac{4}{1} = 4$ के लिए सही उत्तर क्यों प्राप्त कर रहा हूँ?"

अध्यापिका स्पष्ट करती है, "ऐसा इसलिए है कि $64 = 16 \times 4$; है तथा $\dfrac{64}{16} = \dfrac{16 \times 4}{16 \times 1} = \dfrac{4}{1}$ है।

वस्तुत: हम सार्व गुणनखंड 16 को काटते हैं; 6 को नहीं, जैसा कि आप देख सकते हैं। वास्तव में, 6 न तो 64 का और न ही 16 का गुणनखंड है।" अध्यापिका आगे कहती है, "साथ ही, $\dfrac{664}{166} = \dfrac{4}{1}, \dfrac{6664}{1666} = \dfrac{4}{1}$, इत्यादि भी हैं।" क्या यह रोचक नहीं है? क्या आप $\dfrac{64}{16}$ के प्रकार के कुछ अन्य उदाहरण ज्ञात करने में अतुल की सहायता कर सकते हैं?

प्रश्नावली 14.4

निम्नलिखित गणितीय कथनों में त्रुटि ज्ञात करके उसे सही कीजिए :

1. $4(x - 5) = 4x - 5$
2. $x(3x + 2) = 3x^2 + 2$
3. $2x + 3y = 5xy$
4. $x + 2x + 3x = 5x$
5. $5y + 2y + y - 7y = 0$
6. $3x + 2x = 5x^2$
7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 2x^2 + 8x + 7$
8. $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$
9. $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 6x + 4$
10. $x = -3$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है।
    (*a*) $x^2 + 5x + 4$ से $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 + 2 + 4 = 15$ प्राप्त होता है।
    (*b*) $x^2 - 5x + 4$ से $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$ प्राप्त होता है।
    (*c*) $x^2 + 5x$ से $(-3)^2 + 5(-3) = -9 - 15 = -24$ प्राप्त होता है।
11. $(y - 3)^2 = y^2 - 9$
12. $(z + 5)^2 = z^2 + 25$
13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 - 3b^2$
14. $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 8$
15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 8$
16. $\dfrac{3x^2}{3x^2} = 0$
17. $\dfrac{3x^2 + 1}{3x^2} = 1 + 1 = 2$
18. $\dfrac{3x}{3x+2} = \dfrac{1}{2}$
19. $\dfrac{3}{4x+3} = \dfrac{1}{4x}$
20. $\dfrac{4x+5}{4x} = 5$
21. $\dfrac{7x+5}{5} = 7x$

हमने क्या चर्चा की?

1. जब हम किसी व्यंजक का गुणनखंड करते हैं, तो हम उसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखंड, संख्याएँ, बीजीय चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं।
2. एक अखंडनीय गुणनखंड वह गुणनखंड है जिसे और आगे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।
3. किसी व्यंजक का गुणनखंड करने की एक क्रमबद्ध विधि सार्व गुणनखंड विधि है। इस विधि के तीन चरण होते हैं : (i) व्यंजक के प्रत्येक पद को अखंडनीय गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए। (ii) सार्व गुणनखंडों का पता लगाइए और उन्हें अलग कर लीजिए। (iii) प्रत्येक पद में शेष गुणनखंडों को बंटन नियम के अनुसार संयोजित कीजिए।
4. कभी-कभी एक दिए हुए व्यंजक के सभी पदों में एक सार्व गुणनखंड नहीं होता है, परंतु इन पदों के कुछ समूह इस प्रकार बनाए जा सकते हैं कि प्रत्येक समूह के सभी पदों में एक सार्व गुणनखंड होता है। जब हम ऐसा करते हैं, तो सभी समूहों में एक सार्व गुणनखंड प्रकट हो जाता है, जिससे हम व्यंजक के गुणनखंड प्राप्त कर लेते हैं। यह विधि पुन:समूहन विधि कहलाती है।
5. पुन:समूहन द्वारा गुणनखंडन में, यह याद रखना चाहिए कि व्यंजक के पदों के प्रत्येक पुन:समूहन पुन:व्यवस्था से गुणनखंड प्राप्त नहीं होते हैं। हमें व्यंजक को देखना चाहिए तथा प्रयास और भूल-विधि से वांछित पुन:समूहन प्राप्त करना चाहिए।

6. गुणनखंडन किए जा सकने वाले व्यंजकों में से अनेक $a^2 + 2\,ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ और $x^2 + (a + b) + ab$ के रूप के होते हैं या उन्हें इस रूप में बदला जा सकता है। इन व्यंजकों के गुणनखंड अध्याय 9 में दी हुई निम्नलिखित सर्वसमिकाओं I, II, III और IV से ज्ञात किए जा सकते हैं :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$
$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)\,(x + b).$$

7. उन व्यंजकों में, जिनके गुणनखंड $(x + a)\,(x + b)$ के प्रकार के हैं, याद रखना चाहिए कि संख्यात्मक (अचर) पद से ab प्राप्त होता है। इसके गुणनखंडों a और b को इस प्रकार चुनना चाहिए कि चिह्न को ध्यान में रखते हुए, इनका योग x के गुणांक के बराबर हो।
8. हम जानते हैं कि संख्याओं की स्थिति में विभाजन, गुणा की प्रतिलोम संक्रिया होती है। यही बात बीजीय व्यंजकों के विभाजन के लिए भी लागू रहती है।
9. एक बहुपद को एक एकपदी से विभाजन की स्थिति में, हम या तो विभाजन, बहुपद के प्रत्येक पद को उस एकपदी से भाग देकर कर सकते हैं या सार्व गुणनखंड विधि से कर सकते हैं।
10. एक बहुपद को एक बहुपद से विभाजन की स्थिति में, हम भाज्य बहुपद के प्रत्येक पद को भाजक बहुपद से भाग देकर विभाजन नहीं कर सकते। इसके स्थान पर, हम प्रत्येक बहुपद के गुणनखंड करते हैं और इनमें सार्वगुणनखंडों को काट देते हैं।
11. इस अध्याय में पढ़े गए बीजीय व्यंजकों के विभाजनों की स्थिति से हमें

    भाज्य = भाजक × भागफल प्राप्त होगा।

    परंतु व्यापक रूप में यह संबंध निम्नलिखित है :

    भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

    इस प्रकार, इस अध्याय में हमने केवल उन विभाजनों की चर्चा की है, जिनमें शेषफल शून्य है।
12. बीजीय प्रश्नों को हल करते समय विद्यार्थी अनेक प्रकार की त्रुटियाँ करते हैं। आपको ऐसी त्रुटियाँ करने से बचना चाहिए।

नोट

अध्याय

15

आलेखों से परिचय

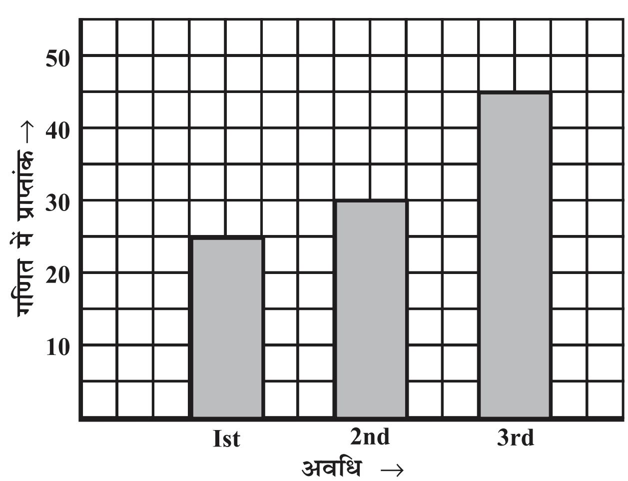
15.1 भूमिका

क्या आपने समाचार पत्रों, दूरदर्शन, मैगज़ीन, पुस्तकों आदि में आलेख देखें हैं? आलेखों का उद्देश्य संख्यात्मक तथ्यों को चित्रों द्वारा दिखाना है, जिससे वे शीघ्र, आसानी व स्पष्टता से समझे जा सकें। इस प्रकार आलेख, एकत्रित आँकड़ों का चित्रों द्वारा प्रदर्शन है। आँकड़ों को तालिका द्वारा भी प्रस्तुत किया जा सकता है,अपितु आलेखों द्वारा प्रदर्शन समझने में बहुत आसान होता है। आँकड़ों का **रुझान** या उनकी **तुलना** दिखाने के लिए तो ये बहुत ही उपयुक्त होते हैं। हम अब तक अनेक प्रकार के आलेख देख चुके हैं। आइए, उनको याद कर लें।

15.1.1 एक दंड-आलेख

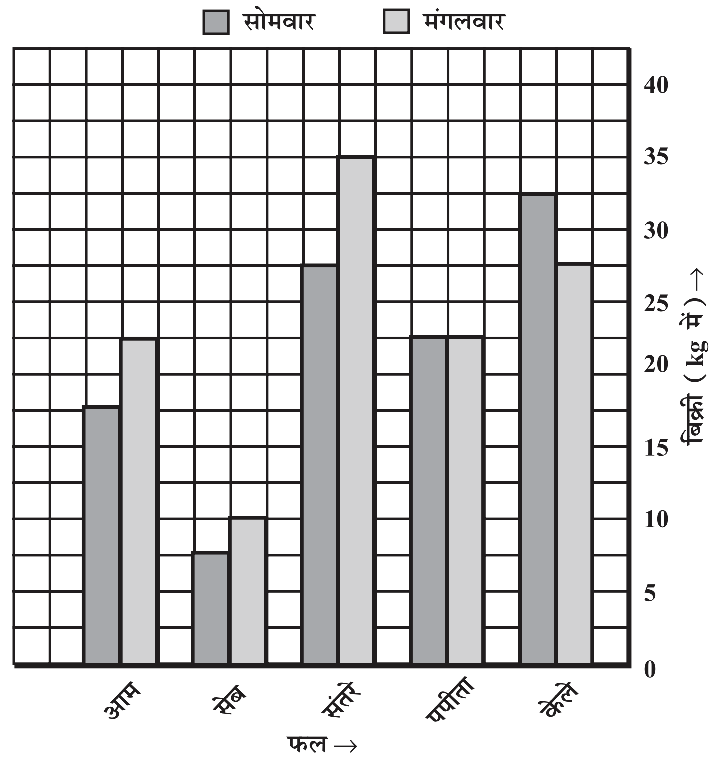
एक दंड-आलेख विभिन्न श्रेणियों के बीच तुलना करने के काम आता है। इसमें दो या अधिक समांतर व ऊर्ध्वाधर (या क्षैतिज), दंड या आयत होते हैं।

आकृति 15.1 में दंड आलेख, अनु द्वारा तीन सत्रीय परीक्षाओं के गणित में प्राप्तांकों को दर्शाता है। यह आपको उसके प्रदर्शन की तुलना, आसानी से करने में सहायता करता है। हम कह सकते हैं कि उसकी प्रगति अच्छी है।



आकृति 15.1

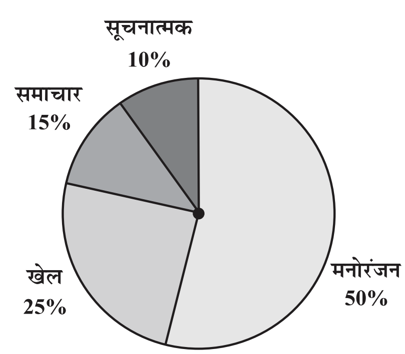
दंड-आलेखों में दोहरे दंड भी हो सकते हैं; जैसे आकृति 15.2 में। यह आलेख किन्हीं दो दिनों में, विभिन्न प्रकार के फलों की बिक्री (रु में) का तुलनात्मक विवरण है। आकृति 15.2 तथा आकृति 15.1 में क्या अंतर है? अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए।



आकृति 15.2

15.1.2 वृत्त-चित्र (वृत्त-आलेख या पाई ग्राफ)

एक वृत्त आलेख किसी एक संपूर्ण के विभिन्न भागों की तुलना करने के लिए प्रयोग किया जाता है। वृत्त, एक संपूर्ण को दर्शाता है। आकृति 15.3, एक वृत्त-आलेख है। यह दूरदर्शन के विभिन्न चैनलों के दर्शकों की प्रतिशतता दर्शाता है।



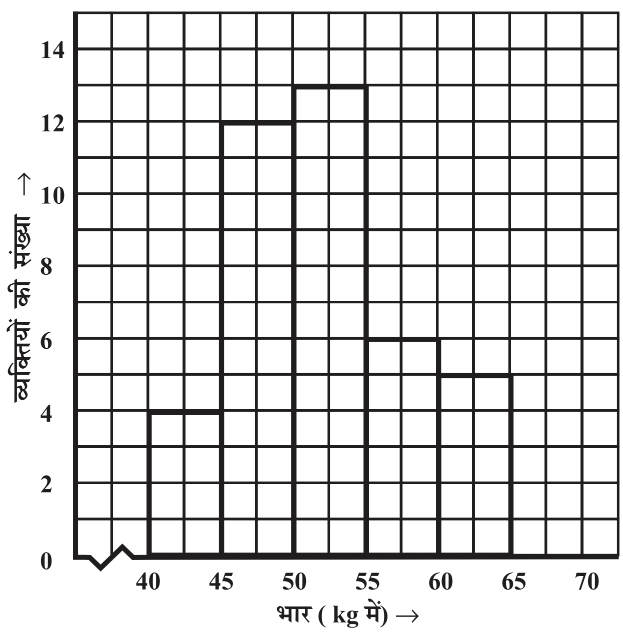
आकृति 15.3

15.1.3 आयत-चित्र

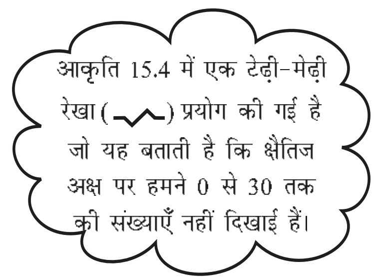
एक आयत चित्र, एक दंड-आलेख जैसा ही होता है जो आँकड़ों को अंतराल में दर्शाता है। इसमें अंतरालों को संलग्न दंडों द्वारा दिखाया जाता है।

आकृति 15.4 में आयत चित्र एक क्षेत्र के 40 व्यक्तियों के भारों (kg में) का बंटन दर्शाता है।

भार (kg में)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
व्यक्तियों की संख्या	4	12	13	6	5



आकृति 15.4



ध्यान दीजिए, दंडों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है क्योंकि अंतरालों के बीच भी कोई अंतर नहीं है। आप इस आयत चित्र से क्या सूचनाएँ प्राप्त करते हैं? उनकी एक सूची बनाइए।

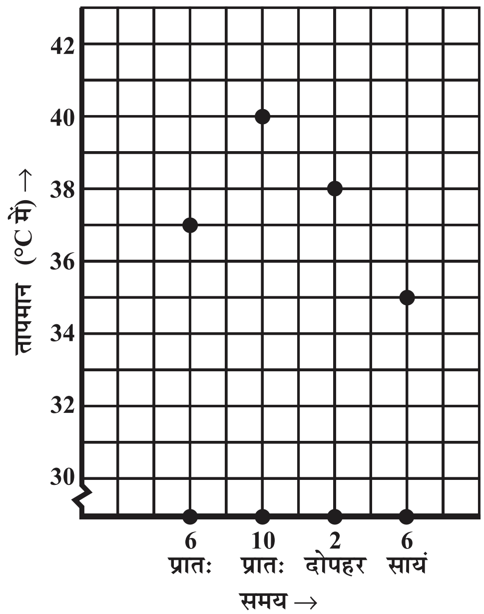
15.1.4 रेखा-आलेख

एक रेखा-आलेख, ऐसे आँकड़े प्रस्तुत करता है जो समय के साथ-साथ लगातार बदलते रहते हैं। जब रेणु बीमार पड़ी तब उसके डॉक्टर ने चार-चार घंटे बाद उसके शारीरिक तापमान का रिकॉर्ड बनाया। यह एक आलेख के रूप में था (आकृति 15.5 व 15.6 में देखें)।

हम इसे 'समय-तापमान' का आलेख कह सकते हैं।

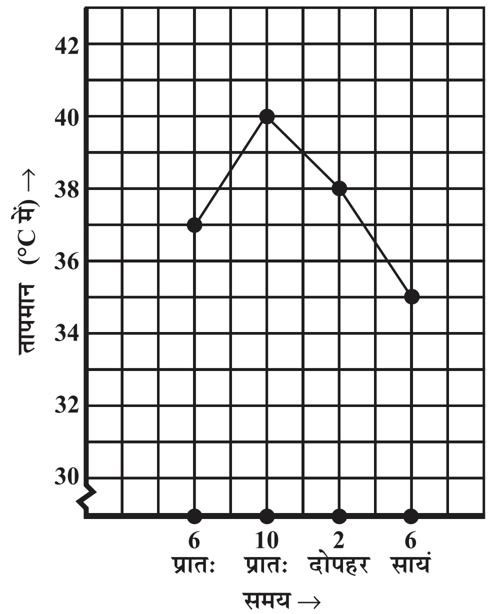
यह निम्न तालिका में दिए गए आँकड़ों का चित्र रूप में प्रदर्शन है।

समय	6 बजे प्रात:	10 बजे प्रात:	2 बजे दोपहर	6 बजे सायं
तापमान (°C में)	37	40	38	35



आकृति 15.5

हर आँकड़े को वर्गांकित कागज़ पर एक बिंदु द्वारा अंकित किया गया है।



आकृति 15.6

बाद में बिंदुओं को रेखाखंडों से मिला दिया गया है। परिणाम, यह **रेखा आलेख** है।

क्षैतिज रेखा (जिसे x-अक्ष भी कहते हैं) वे समय दिखाती है, जब-जब तापमान लिया गया। ऊर्ध्वाधर रेखा (जिसे y-अक्ष भी कहते हैं) पर क्या दिखाया गया है?

यह आलेख आपको क्या-क्या बताता है? उदाहरण के लिए, आप इसमें तापमान के प्रारूप देख सकते हैं : 10 बजे प्रातः अधिक था फिर 6 बजे सायं तक घटता गया। ध्यान दीजिए 6 बजे प्रातः और 10 बजे प्रातः के बीच तापमान 3°C (40°C – 37°C) बढ़ा।

8 बजे प्रातः तापमान नहीं पढ़ा गया फिर भी आलेख देखकर लगता है कि यह 37°C से अधिक था। (कैसे?)

उदाहरण 1 : दिया गया आलेख (आकृति 15.7) वर्ष 2007 में, दो बल्लेबाजों A तथा B द्वारा खेले गए 10 मैचों में बनाए गए रनों को प्रदर्शित करता है। आलेख का अध्ययन कीजिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दोनों अक्ष-रेखाओं पर क्या-क्या सूचना दी गई है?

(ii) कौन सी रेखा बल्लेबाज़ A द्वारा बनाए गए रन प्रदर्शित करती है।

(iii) वर्ष 2007 में, क्या किसी मैच में दोनों बल्लेबाज़ों द्वारा बनाए गए रन समान थे? यदि हाँ, तो किस मैच में?

(iv) दोनों बल्लेबाज़ों में कौन अधिक स्थिर है? आपने यह निर्णय कैसे लिया?

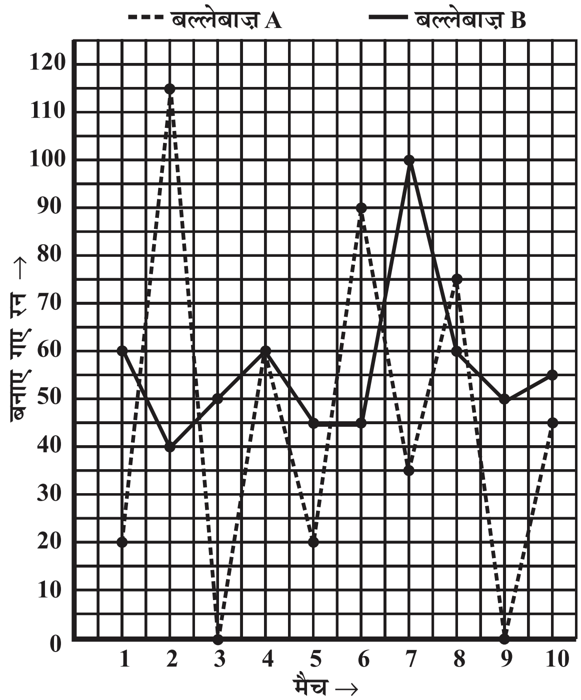
हल :

(i) क्षैतिज अक्ष (या x-अक्ष), वर्ष 2007 में खेले गए मैचों की संख्या प्रकट करती है। ऊर्ध्वाधर अक्ष (या y-अक्ष) प्रत्येक मैच में बनाए गए रनों की संख्या प्रकट करती है।

(ii) बिंदुयुक्त रेखा A बल्लेबाज़ द्वारा बनाए गए रनों को दर्शाती है जैसा आलेख के ऊपर संकेत भी है।

(iii) चौथे मैच के दौरान दोनों ने एक समान 60 रन बनाए। (यह उस बिंदु से पता चलता है, जहाँ पर दोनों रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं।

(iv) बल्लेबाज़ A के आलेख में एक ऊँचा शिखर है तथा अनेक नीची घाटियाँ। वह रन बनाने में स्थिर नहीं है। जबकि दूसरी ओर, बल्लेबाज़ B ने कभी 40 से कम रन नहीं बनाए; यद्यपि उसने B के 115 के मुकाबले अधिकतम 100 ही रन बनाए। A ने दो मैचों में शून्य रन ही बनाए तथा कुल पाँच मैचों में 40 से कम। क्योंकि A द्वारा बनाए गए रनों में अधिक उतार-चढ़ाव है, अतः B ही एक विश्वसनीय व स्थिर बल्लेबाज़ है।



आकृति 15.7

उदाहरण 2 : एक कार एक शहर P से दूसरे शहर Q की ओर जा रही है जो एक दूसरे से 350 km दूरी पर हैं। दिया गया आलेख (आकृति 15.8) विभिन्न समयों पर कार की P शहर से दूरियाँ दर्शाता है। आलेख अध्ययन कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दोनों अक्षों पर क्या-क्या दर्शाया गया है?

(ii) कार किस समय और कहाँ से यात्रा आरंभ की?

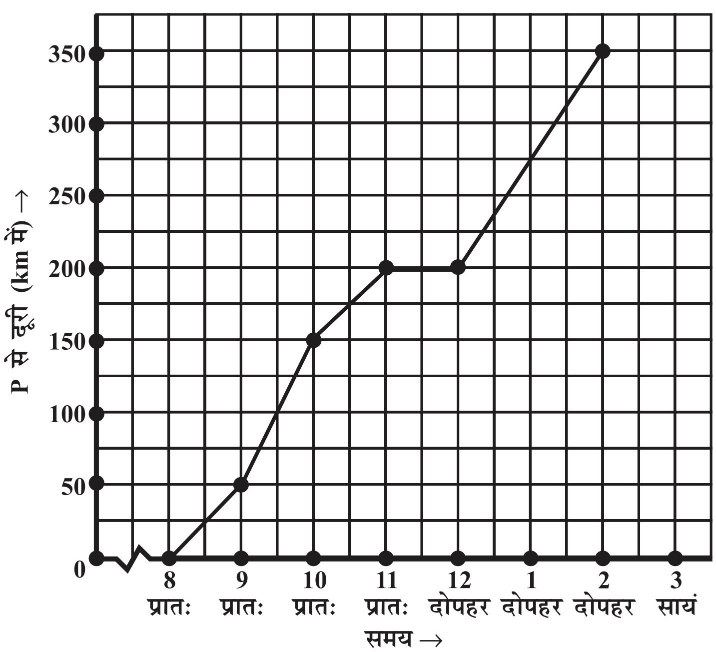
(iii) पहले घंटे में कार कितनी दूर चली?

(iv) दूसरे घंटे तथा तीसरे घंटे में कार कितनी-कितनी दूरियाँ तय की?

(v) क्या पहले तीन घंटों में कार की चाल समान थी? आपने कैसे जाना?

(vi) क्या कार कभी किसी स्थान पर रुकी? अपने उत्तर के लिए तर्क भी दीजिए।

(vii) कार, शहर Q पर किस समय पहुँची?



आकृति 15.8

हल :

(i) क्षैतिज (x) अक्ष समय दर्शाता है। ऊर्ध्वाधर (y) अक्ष, P शहर से कार की दूरियाँ दर्शाता है।

(ii) कार 8 बजे प्रातः शहर P से चली।

(iii) कार पहले घंटे में 50 km की दूरी तय की। (आप यह देख सकते हैं कि कार प्रातः 8 बजे शहर P से चली और प्रातः 9 बजे, आलेख के अनुसार, 50 km की दूरी पर थी। अतः प्रातः 8 और 9 बजे के बीच, एक घंटे में कार ने 50 km दूरी तय की।

(iv) (a) कार दूसरे घंटे (प्रातः 9 बजे से 10 बजे) में 100 km दूरी (150–50) तय की।
(b) कार ने तीसरे घंटे (प्रातः 10 बजे से 11 बजे) में 50 km की दूरी (200–150) तय की।

(v) प्रश्न (iii) व (iv) के उत्तरों से पता चलता है कि कार की चाल सदैव समान नहीं थी। (आलेख यह भी दर्शाता है कि चाल किस प्रकार बदली।)

(vi) आलेख में हम देखते हैं कि कार प्रातः 11 बजे और 12 बजे भी शहर P से 200 km दूर थी। इस अंतराल में तय की गई दूरी, एक क्षैतिज रेखाखंड है जो इस तथ्य की पुष्टि करता है।

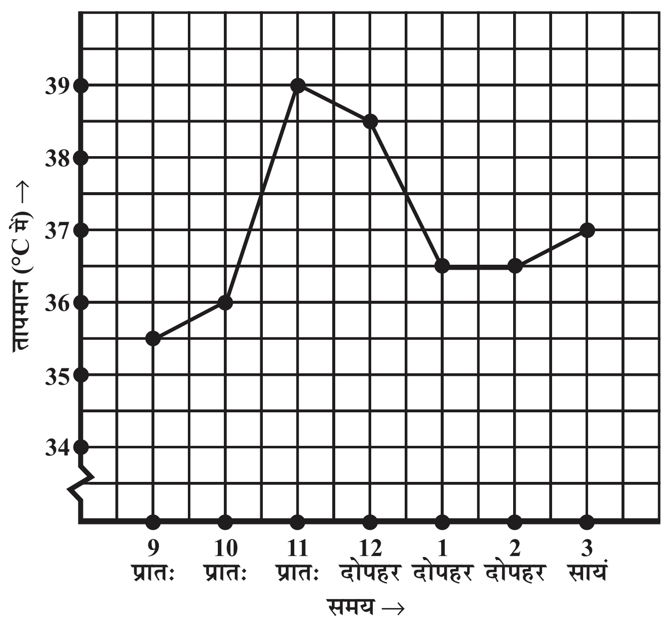
(vii) 2 बजे दोपहर कार Q शहर पहुँची।

प्रश्नावली 15.1

1. निम्न आलेख, किसी अस्पताल में एक रोगी का प्रति घंटे लिया गया तापमान दर्शाता है:

(a) रोगी का तापमान 1 बजे दोपहर क्या था?

(b) रोगी का तापमान 38.5° C कब था?



(c) इस पूरे अंतराल में रोगी का तापमान दो बार एक समान ही था। ये दो समय, क्या-क्या थे?

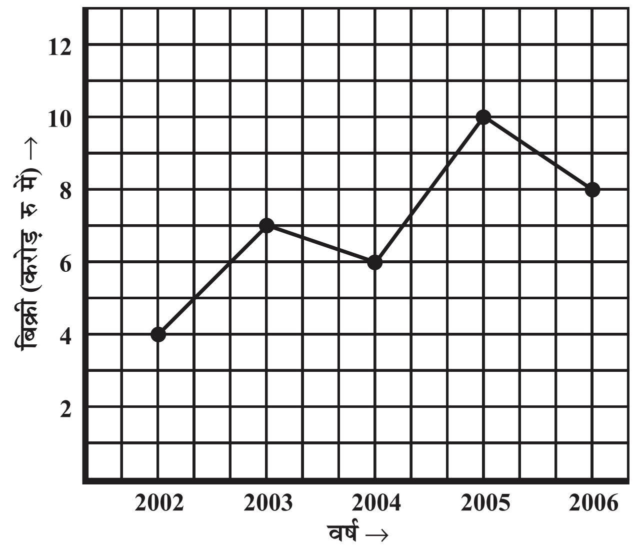
(d) 1.30 बजे दोपहर रोगी का तापमान क्या था? इस निष्कर्ष पर आप कैसे पहुँचे?

(e) किन अंतरालों में रोगी का तापमान 'बढ़ने का रुझान' दर्शाता है।

2. एक निर्माता कंपनी की विभिन्न वर्षों में की गई बिक्री निम्न आलेख द्वारा दर्शाई गई है:

(a) (i) वर्ष 2002 में (ii) वर्ष 2006 में कितनी बिक्री थी?

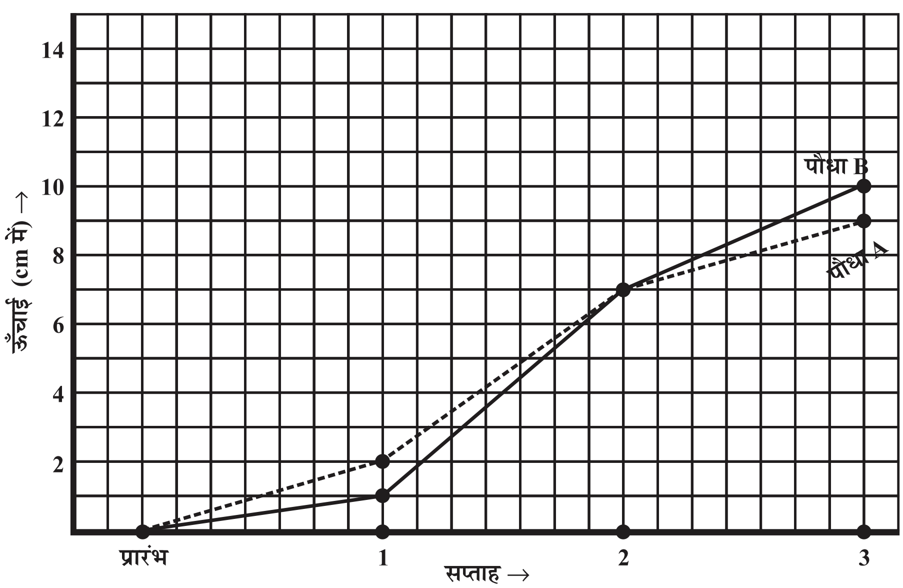
(b) (i) वर्ष 2003 में (ii) वर्ष 2005 में कितनी बिक्री थी?



(c) वर्ष 2002 तथा वर्ष 2006 की बिक्रियों में कितना अंतर था?

(d) किस अंतराल में बिक्रियों का यह अंतर सबसे अधिक था?

3. वनस्पति-विज्ञान के एक प्रयोग में, समान प्रयोगशाला परिस्थितियों में दो पौधे A तथा B उगाए गए। तीन सप्ताहों तक उनकी ऊँचाइयों को हर सप्ताह के अंत में मापा गया। परिणामों को निम्न आलेख में दर्शाया गया है :



(a) (i) 2 सप्ताह बाद (ii) 3 सप्ताह बाद पौधे A की ऊँचाई कितनी थी?

(b) (i) 2 सप्ताह बाद (ii) 3 सप्ताह बाद पौधे B की ऊँचाई कितनी थी?

(c) तीसरे सप्ताह में पौधे A की ऊँचाई कितनी बढ़ी?

(d) दूसरे सप्ताह के अंत से तीसरे सप्ताह के अंत तक पौधे B की ऊँचाई कितनी बढ़ी?

(e) किस सप्ताह में पौधे A की ऊँचाई सबसे अधिक बढ़ी?

(f) किस सप्ताह में पौधे B की ऊँचाई सबसे कम बढ़ी?

(g) क्या किसी सप्ताह में दोनों पौधों की ऊँचाई समान थी? पहचानिए।

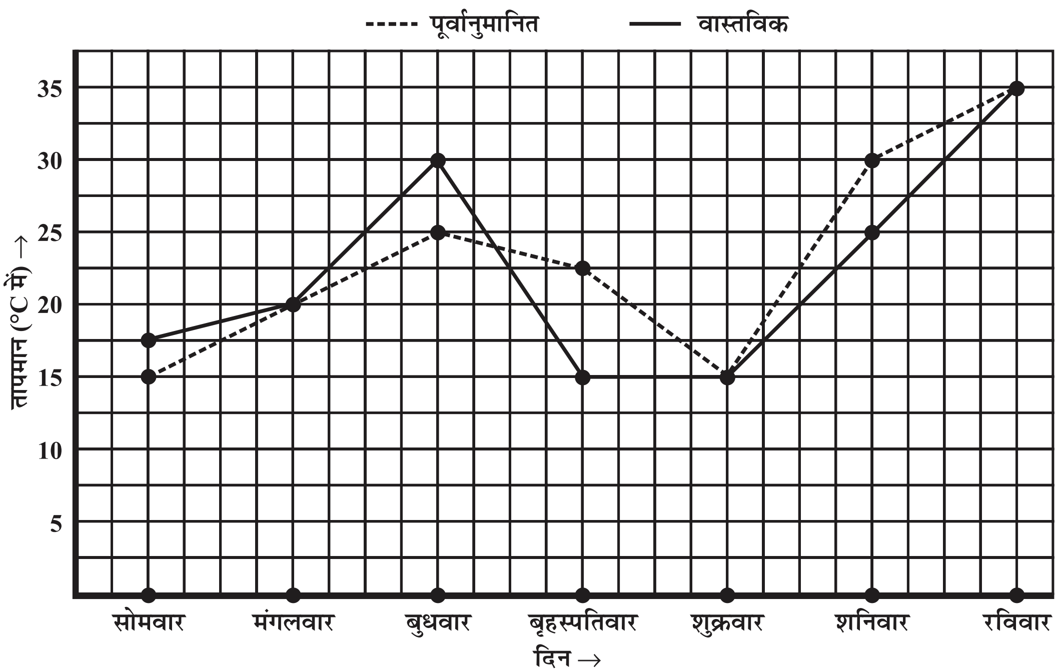
4. निम्न आलेख, किसी सप्ताह के प्रत्येक दिन के लिए पूर्वानुमानित तापमान तथा वास्तविक तापमान दर्शाता है :

(a) किस दिन पूर्वानुमानित तापमान व वास्तविक तापमान समान था?

(b) सप्ताह में पूर्वानुमानित अधिकतम तापमान क्या था?

(c) सप्ताह में वास्तविक न्यूनतम तापमान क्या था?

(d) किस दिन वास्तविक तापमान व पूर्वानुमानित तापमान में अंतर सर्वाधिक था?



5. निम्न तालिका प्रयोग कर एक रैखिक आलेख बनाइए :

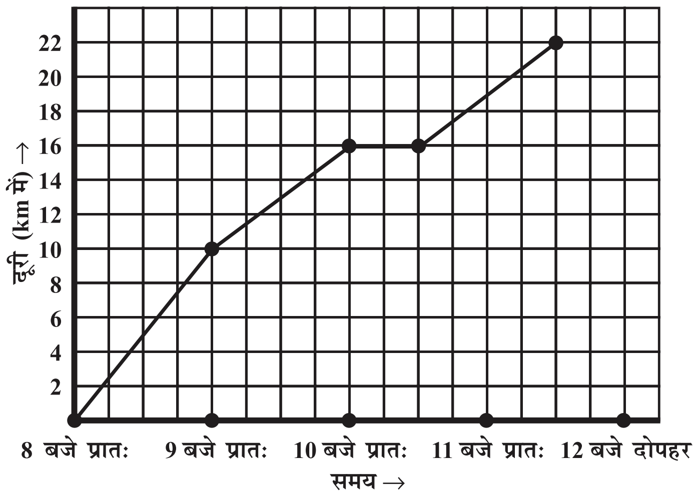
(a) विभिन्न वर्षों में किसी पर्वतीय नगर में हिमपात के दिनों की संख्या :

वर्ष	2003	2004	2005	2006
दिन	8	10	5	12

(b) विभिन्न वर्षों में एक गाँव में, पुरुषों व स्त्रियों की संख्या (हज़ारों में)

वर्ष	2003	2004	2005	2006	2007
पुरुषों की संख्या	12	12.5	13	13.2	13.5
स्त्रियों की संख्या	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. एक डाकिया किसी नगर के पास ही स्थित एक उपनगर में एक व्यापारी को पार्सल पहुँचाने के लिए साइकिल पर जाता है। विभिन्न समयों पर नगर से उसकी दूरियाँ निम्न आलेख द्वारा दर्शाई गई हैं।



(a) x-अक्ष पर समय दर्शाने के लिए क्या पैमाना प्रयोग किया गया है?

(b) उसने पूरी यात्रा के लिए कितना समय लिया?

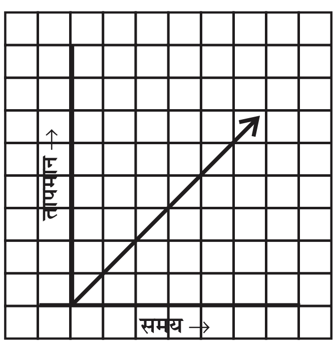
(c) व्यापारी के स्थान की नगर से दूरी कितनी है?

(d) क्या, डाकिया रास्ते में कहीं रुका? विवरण दीजिए।

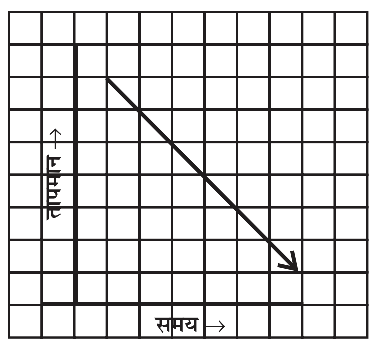
(e) किस अंतराल में उसकी चाल सबसे अधिक थी?

7. निम्न आलेखों में कौन-कौन से आलेख समय व तापमान के बीच संभव हैं? तर्क के साथ अपने उत्तर दीजिए।

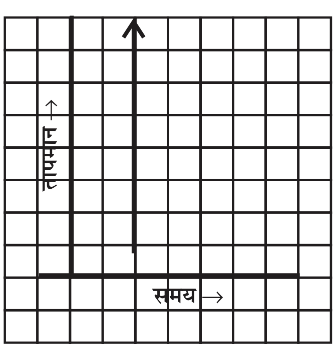
(i)



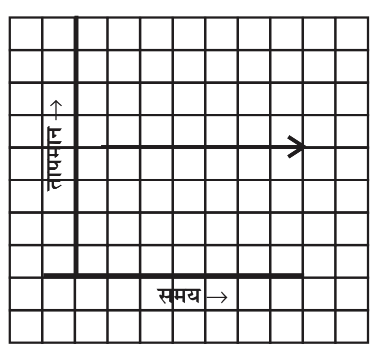
(ii)



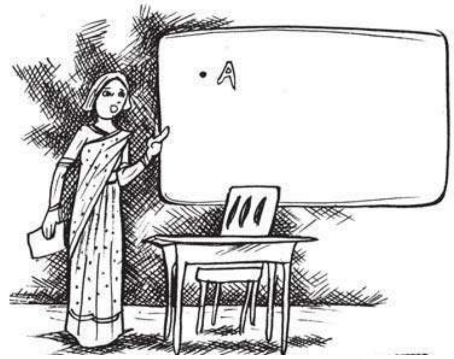
(iii)



(iv)



15.2 रैखिक आलेख



रेखा-आलेख, अनेक रेखाखंडों को परस्पर मिलाकर बनाया जाता है। कभी-कभी यह आलेख एक पूरी अखंडित रेखा भी हो सकती है। ऐसे आलेख को **रैखिक आलेख** कहते हैं। ऐसे आलेख बनाने के लिए हमें वर्गांकित कागज़ पर कुछ बिंदु अंकित करने पड़ते हैं। अब हम सीखेंगे कि वर्गांकित कागज़ पर बिंदु आसानी से कैसे अंकित किए जाते हैं।

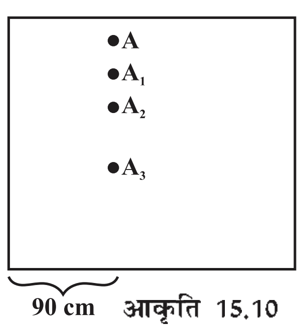
15.2.1 बिंदु की स्थिति

अध्यापिका ने श्यामपट पर एक बिंदु अंकित किया। फिर उसने विद्यार्थियों से पूछा कि वे उसकी श्यामपट पर स्थिति कैसे वर्णित करेंगे? इस पर अनेक उत्तर मिले, (आकृति 15.9)।

आकृति 15.9

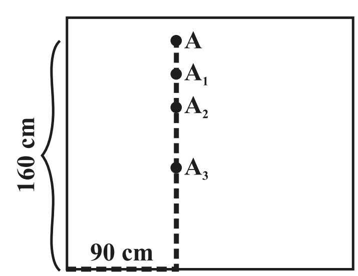
क्या इनमें से कोई भी कथन बिंदु की स्थिति को सही-सही निश्चित करता है? नहीं, कोई भी नहीं। क्यों? इसके बारे में सोचिए।

तब जॉन ने एक सुझाव दिया। उसने बिंदु की दूरी श्यामपट के बाएँ किनारे से मापी और कहा, "यह बिंदु श्यामपट के बाएँ किनारे से 90 cm दूर है।" क्या आप समझते हैं कि उसका सुझाव बिल्कुल सही है? (आकृति 15.10)



आकृति 15.10

A, A_1, A_2, A_3 सभी बिंदु बाएँ किनारे से 90 cm दूर है।



आकृति 15.11

बिंदु A बाएँ किनारे से 90 cm तथा निचले किनारे से 160 cm दूर है।

तब रेखा ने कथन को सुधारते हुए कहा, "यह बिंदु श्यामपट के बाएँ किनारे से 90 cm तथा निचले किनारे से 160 cm दूरी पर स्थित है।" इस प्रकार समस्या का ठीक हल प्राप्त करते हैं; (आकृति 15.11)। तब अध्यापक ने बताया, "हम बिंदु की स्थिति इस प्रकार (90, 160) लिखकर प्रकट करते हैं।" क्या बिंदु (160, 90) बिंदु (90, 160) से विभिन्न होगा?" इसके बारे में चिंतन कीजिए।

कहा जाता है कि सत्रहवीं शताब्दी में गणितज्ञ रेने दकार्त (Rene Descartes) ने एक चींटी को छत के कोने के पास चलते हुए देखा और तल में किसी बिंदु की स्थिति को निर्धारित करने के बारे में सोचना आरंभ किया। क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर, दो रेखाओं से दिए गए बिंदु की दो दूरियाँ माप कर, स्थिति प्रकट करने की विधि, उनके सम्मान में आज 'कार्तीय विधि' (Cartesian system) कहलाती है।

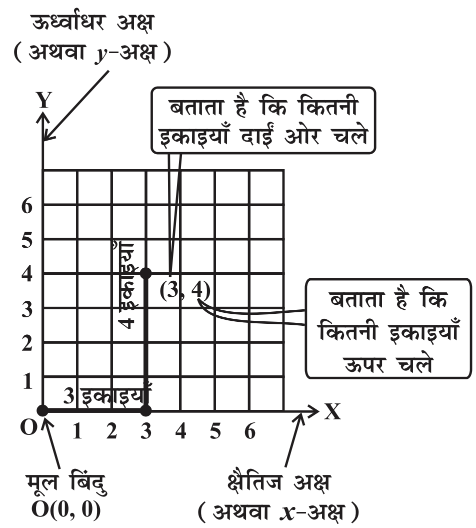
रेने दकार्त
(1596-1650)

15.2.2 निर्देशांक

कल्पना कीजिए कि आप किसी थियेटर में जाते हैं और अपनी आरक्षित सीट ढूँढ़ते हैं। इसके लिए आपको दो संख्याएँ चाहिए; पंक्ति संख्या तथा सीट संख्या। किसी तल में बिंदु की स्थिति निर्धारित करने का यही आधार है।

आकृति 15.12 पर ध्यान दीजिए कि बिंदु (3, 4) जिसकी दूरी बाएँ किनारे से 3 इकाई और निचले किनारे से 4 इकाई है, वर्गांकित कागज़ पर किस प्रकार अंकित किया गया है।

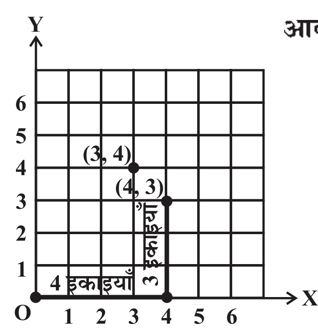
आलेख वाला कागज़ भी एक वर्गांकित कागज़ ही है। इस पर हम x-अक्ष तथा y-अक्ष सुविधा के अनुसार दर्शाते हैं और फिर उस पर बिंदु की स्थिति निर्धारित करते हैं। संख्या 3, बिंदु का ***x*-निर्देशांक** तथा 4, ***y*-निर्देशांक** कहलाता है। इस प्रकार हम कहते हैं कि (3, 4) बिंदु के **निर्देशांक** हैं।



आकृति 15.12

उदाहरण 3 : एक आलेख में बिंदु (4, 3) अंकित कीजिए। क्या यह वही बिंदु है जो (3, 4) दर्शाता है?

हल : वर्गांकित कागज़ पर x-अक्ष तथा y-अक्ष निर्धारित कीजिए। (ये वास्तव में संख्या रेखाएँ ही हैं।) मूल बिंदु (0, 0) से प्रारंभ कीजिए। 4 इकाइयाँ दाईं ओर चलकर फिर 3 इकाइयाँ ऊपर की ओर चलें तो आपको बिंदु (4, 3) प्राप्त होता है। आकृति 15.13 देखकर आप समझ सकते हैं कि बिंदु (4, 3) व बिंदु (3, 4) अलग-अलग बिंदु हैं।



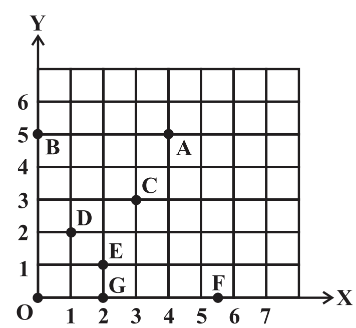
आकृति 15.13

उदाहरण 4 : आकृति 15.14 देखकर निम्न बिंदुओं की स्थिति के लिए उपयुक्त अक्षर चुनिए :

(i) (2, 1) (ii) (0, 5) (iii) (2, 0)

तथा लिखिए

(iv) बिंदु A के निर्देशांक (v) बिंदु F के निर्देशांक



आकृति 15.14

हल :

(i) (2, 1) है बिंदु E (D नहीं, सोचिए)।

(ii) (0, 5) है बिंदु B (क्यों? मित्रों के साथ चर्चा कीजिए)।

(iii) (2, 0) है बिंदु G।

(iv) बिंदु A के निर्देशांक हैं (4, 5)।

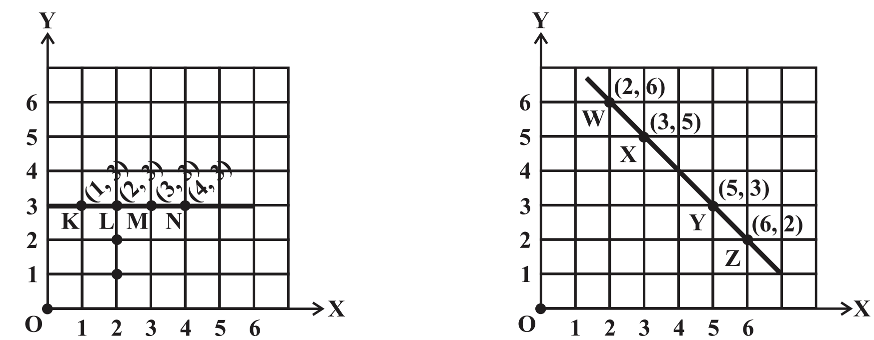
(v) बिंदु F के निर्देशांक हैं (5.5, 0)।

उदाहरण 5 : निम्न बिंदुओं को वर्गांकित कागज़ पर अंकित कीजिए और देखिए कि क्या वे सभी एक ही सरल रेखा में हैं। अगर हैं तो उस रेखा को नाम दीजिए।

(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5)   (ii) A(1, 1), B(1, 2), C(1, 3), D(1, 4)

(iii) K(1, 3), L(2, 3), M(3, 3), N(4, 3)   (iv) W(2, 6), X(3, 5), Y(5, 3), Z(6, 2)

हल :

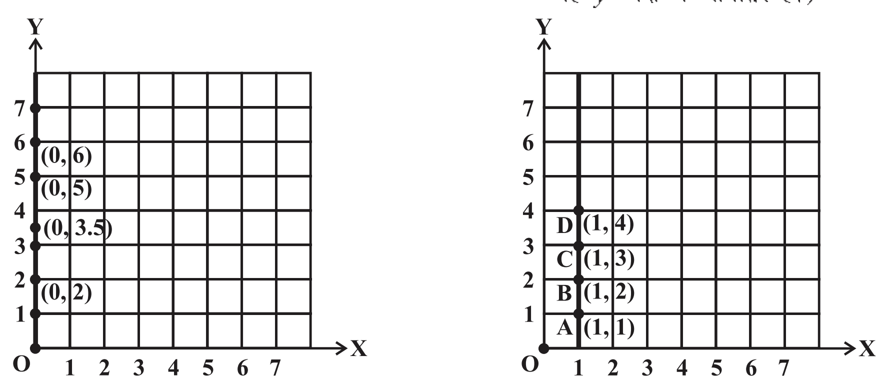


(i)

यहाँ सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। वह है y-अक्ष

(ii)

यहाँ सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। यह है रेखा AD (आप इसे कोई अन्य नाम भी दे सकते हैं।) यह y-अक्ष के समांतर है।)



(iii)   **आकृति 15.15**   (iv)

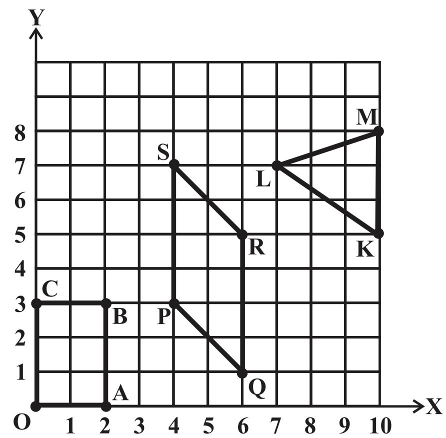
ये सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। इसे हम KL या KM या MN आदि नाम दे सकते हैं। यह x-अक्ष के समांतर है।

ये सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। हम इसे XY या WY या YZ आदि नाम दे सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए प्रत्येक उदाहरण में अंकित बिंदुओं को मिलाने पर प्राप्त आलेख एक सरल रेखा है। ऐसे आलेखों को **रैखिक आलेख** कहते हैं।

प्रश्नावली 15.2

1. निम्न बिंदुओं को एक वर्गांकित कागज़ (Graph Sheet) पर अंकित कीजिए और जाँचिए कि क्या वे सभी एक सरल रेखा पर स्थित हैं?
   (a) A(4, 0), B(4, 2), C(4, 6), D(4, 2.5)
   (b) P(1, 1), Q(2, 2), R(3, 3), S(4, 4)
   (c) K(2, 3), L(5, 3), M(5, 5), N(2, 5)
2. बिंदुओं (2, 3) तथा (3, 2) में से गुज़रती हुई एक सरल रेखा खींचिए। उन बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए जिन पर यह रेखा x-अक्ष तथा y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है।
3. आलेख में बनाई गई आकृतियों में प्रत्येक के शीर्षों के निर्देशांक लिखिए।



4. निम्न कथनों में कौन सा सत्य है तथा कौन सा असत्य? असत्य को ठीक कीजिए।
   (i) कोई बिंदु जिसका x-निर्देशांक शून्य है तथा y-निर्देशांक शून्येतर है, y-अक्ष पर स्थित होता है।
   (ii) कोई बिंदु जिसका y-निर्देशांक शून्य है तथा x-निर्देशांक 5 है, y-अक्ष पर स्थित होगा।
   (iii) मूल बिंदु के निर्देशांक (0, 0) हैं।

15.3 कुछ अनुप्रयोग

दैनिक जीवन में आपने देखा होगा कि किसी भी सुविधा का जितना अधिक उपयोग आप करते हैं उतना ही अधिक उसके लिए मूल्य देना होता है। अगर आप बिजली अधिक खर्च करते हैं तब आपको बिल भी अधिक देना होगा। अगर आप बिजली कम खर्च करते हैं तो बिल भी कम आएगा। यह एक उदाहरण है जहाँ एक राशि दूसरी को प्रभावित करती है। बिजली का बिल, उपयोग की गई बिजली की मात्रा पर निर्भर करता है। हम कहते हैं कि बिजली की मात्रा एक मुक्त या स्वतंत्र चर है जब कि बिजली का बिल एक **आश्रित चर** है। ऐसी राशियों के संबंध को हम आलेख द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

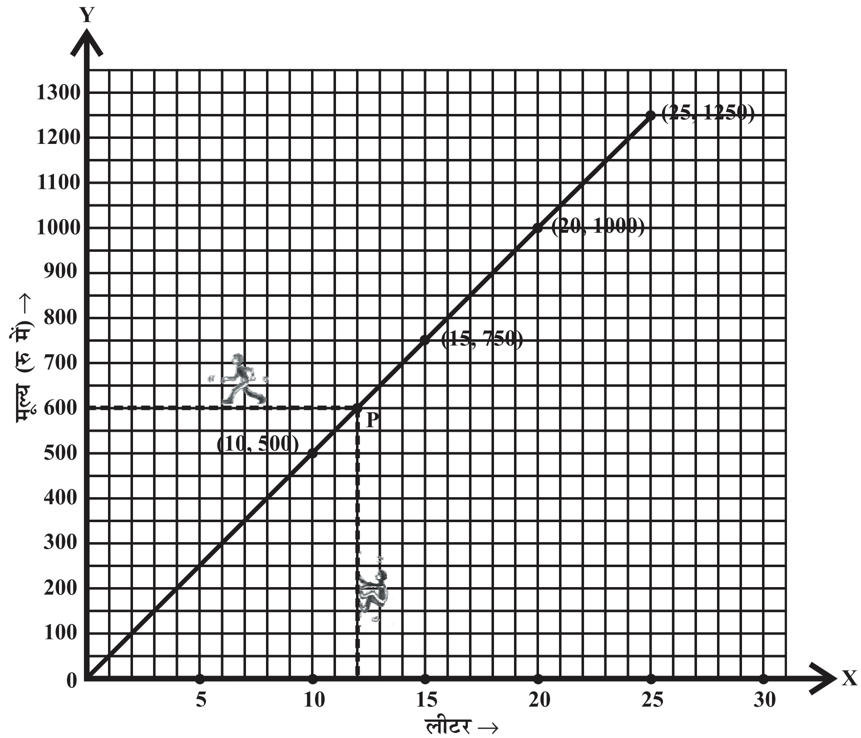
एक कार की पेट्रोल टंकी को भरने के लिए दी गई राशि खरीदे गए पेट्रोल की मात्रा (लीटर में) द्वारा निश्चित होती है। यहाँ पर कौन सा चर स्वतंत्र है? चर्चा कीजिए।

उदाहरण 6 : (मात्रा तथा मूल्य) निम्न तालिका पेट्रोल की मात्राएँ व उसके मूल्य बताती है:

पेट्रोल की मात्रा (लीटर में)	10	15	20	25
पेट्रोल का मूल्य (रुपयों में)	500	750	1000	1250

इन आँकड़ों को दर्शाने के लिए आलेख बनाइए।

हल :



आकृति 15.16

(i) आइए, दोनों अक्षों के लिए (आकृति 15.16) उपयुक्त पैमाना चुनें।
(ii) क्षैतिज अक्ष पर पेट्रोल की मात्रा दर्शाते हैं।
(iii) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर मूल्य दर्शाते हैं।
(iv) (10, 500) , (15, 750), (20, 1000) तथा (25, 1250) बिंदुओं को अंकित करें।
(v) बिंदुओं को मिलाइए।

हम देखते हैं कि आलेख एक सरल रेखा है। (यह एक रैखिक आलेख है) यह आलेख मूल बिंदु से क्यों गुज़रता है? इसके बारे में सोचिए।

यह आलेख हमें कुछ तथ्यों के अनुमान लगाने में सहायक हो सकता है। मान लीजिए, हम जानना चाहते हैं कि 12 लीटर पेट्रोल के लिए कितना मूल्य देना होगा?

क्षैतिज अक्ष पर 12 की स्थिति देखिए। 12 के चिह्न पर ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुकूल चलकर आलेख को बिंदु P पर मिलते हैं।

बिंदु P से क्षैतिज रेखा के अनुकूल चलकर ऊर्ध्वाधर अक्ष पर पहुँचते हैं जहाँ हमें वह बिंदु मिलता है, जो 600 रु उत्तर दर्शाता है।

यह आलेख एक ऐसी स्थिति का है, जिसमें दो राशियाँ समानुपात में हैं। कैसे? ऐसी स्थितियों में, आलेख सदैव रैखिक ही होते हैं।

प्रयास कीजिए

ऊपर के उदाहरण में, आलेख से ज्ञात कीजिए कि 800 रु में कितना पेट्रोल खरीदा जा सकता है?

उदाहरण 7 : (मूलधन तथा साधारण ब्याज)

एक बैंक वरिष्ठ नागरिकों को उनके जमा धन पर 10% साधारण ब्याज देता है। जमा धन तथा उस पर अर्जित वार्षिक साधारण ब्याज के संबध को दर्शाने के लिए एक आलेख खींचिए। इस आलेख से निम्न ज्ञात कीजिए :

(a) 250 रु जमा करने पर प्राप्त ब्याज।

(b) 70 रु ब्याज प्राप्त करने के लिए कितना धन जमा करना होगा?

जमा धन	1 वर्ष के लिए साधारण ब्याज
100 रु	$\frac{100\times1\times10}{100}$ = 10 रु
200 रु	$\frac{200\times1\times10}{100}$ = 20 रु
300 रु	$\frac{300\times1\times10}{100}$ = 30 रु
500 रु	$\frac{500\times1\times10}{100}$ = 50 रु
1000 रु	100 रु

उपयुक्त चरण :

1. अंकित की जाने वाली राशियाँ जमा धन तथा उससे अर्जित ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. x-अक्ष तथा y-अक्ष पर दर्शाई जाने वाली राशियाँ निर्धारित कीजिए।
3. उपयुक्त पैमाने चुनिए।
4. बिंदु अंकित कीजिए।
5. बिंदुओं को मिलाइए।

इन राशियों से निम्न तालिका प्राप्त होती है :

जमा धन (रुपयों में)	100	200	300	500	1000
वार्षिक सा० ब्याज (रुपयों में)	10	20	30	50	100

(i) पैमाना : क्षैतिज अक्ष पर 1 इकाई = 100 रु
क्षैतिज अक्ष पर 1 इकाई = 10 रु

(ii) जमा धन को क्षैतिज अक्ष पर दर्शाते हैं।

(iii) साधारण ब्याज ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दर्शाते हैं।

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50) तथा (1000, 100) बिंदुओं को अंकित कीजिए।

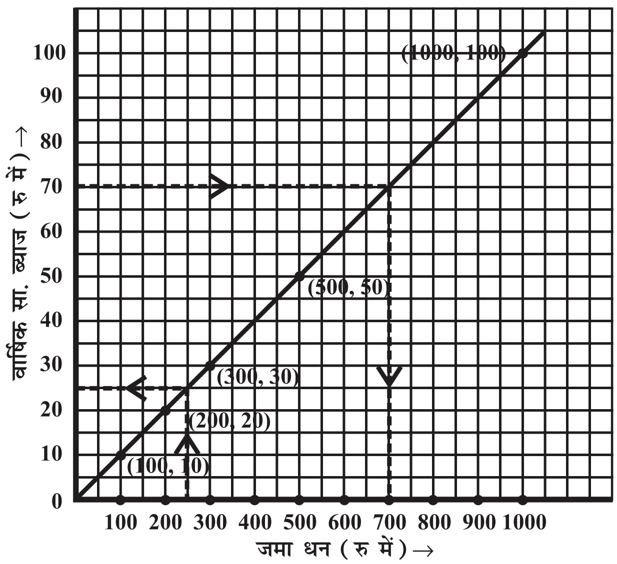
(v) बिंदुओं को मिलाइए। हमें आलेख में एक सरल रेखा प्राप्त होती है; (आकृति 15.17)।

(a) क्षैतिज अक्ष पर 250 रु मूलधन के लिए ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 25 रु साधारण ब्याज है।

(b) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 70 रु ब्याज के लिए क्षैतिज अक्ष पर 700 रु मूलधन है।

प्रयास कीजिए

क्या उदाहरण 7 एक समानुपात का उदाहरण है?



आकृति 15.17

उदाहरण 8 : (समय और दूरी) अजीत लगातार 30 km/hour की गति से स्कूटर चलाता है। इस स्थिति के लिए समय-दूरी के बीच एक आलेख खींचिए। इस आलेख से ज्ञात कीजिए :

(i) अजीत को 75 किमी दूरी तय करने में लगने वाला समय।

(ii) अजीत द्वारा $3\frac{1}{2}$ घंटे में तय की गई दूरी।

हल :

यात्रा के घंटे	तय की गई दूरी
1 घंटा	30 km
2 घंटे	$2 \times 30 = 60$ km
3 घंटे	$3 \times 30 = 90$ km
4 घंटे	$4 \times 30 = 120$ km

इन राशियों से निम्न तालिका प्राप्त होती है :

समय (घंटों में)	1	2	3	4
तय की गई दूरी (km में)	30	60	90	120

(i) पैमाना : क्षैतिज अक्ष, 2 इकाई = 1 घंटा

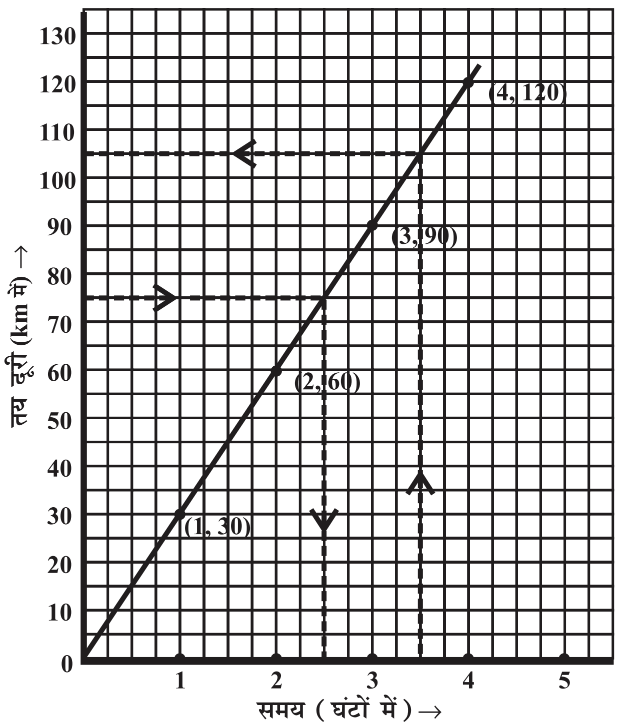
क्षैतिज अक्ष, 1 इकाई = 10 km

(ii) क्षैतिज अक्ष पर समय दर्शाते हैं।

(iii) ऊर्ध्वाधर अक्ष दूरी दर्शाते हैं।

(iv) (1, 30), (2, 60), (3, 90) तथा (4, 120) बिंदुओं को अंकित कीजिए।

(v) बिंदुओं को मिलाइए। हमें एक रैखिक आलेख प्राप्त होता है; (आकृति 15.18)।



आकृति 15.18

(a) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 75 km दूरी लेने पर, उसके अनुरूप क्षैतिज अक्ष पर 2.5 घंटे लगेंगे।

(b) क्षैतिज अक्ष पर $3\frac{1}{2}$ घंटे के अनुरूप ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दूरी 105 km मिलती है।

प्रश्नावली 15.3

1. उपयुक्त पैमाने प्रयोग करते हुए, निम्न तालिकाओं में दी गई राशियों के लिए आलेख बनाइए :

(a) सेबों का मूल्य

सेबों की संख्या	1	2	3	4	5
मूल्य (रुपयों में)	5	10	15	20	25

(b) कार द्वारा तय की गई दूरी

समय (घंटों में)	6 बजे प्रातः	7 बजे प्रातः	8 बजे प्रातः	9 बजे प्रातः
दूरी (km में)	40	80	120	160

(i) 7.30 बजे प्रात: व 8 बजे प्रात: के अंतराल में कार द्वारा कितनी दूरी तय की गई?

(ii) कार के 100 km दूरी तय कर लेने पर समय क्या था?

(c) जमा धन पर वार्षिक ब्याज

जमा धन (रुपयों में)	1000	2000	3000	4000	5000
सा० ब्याज (रुपयों में)	80	160	240	320	400

(i) क्या आलेख मूल बिंदु से गुज़रता है?

(ii) आलेख से 2500 रु का वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए।

(iii) 280 रु ब्याज प्राप्त करने के लिए कितना धन जमा करना होगा?

2. निम्न तालिकाओं के लिए आलेख खींचिए।

(i)

वर्ग की भुजा (cm में)	2	3	3.5	5	6
परिमाप (cm में)	8	12	14	20	24

क्या यह रैखिक आलेख है?

(ii)

वर्ग की भुजा (cm में)	2	3	4	5	6
क्षेत्रफल (cm^2 में)	4	9	16	25	36

क्या यह रैखिक आलेख है?

हमने क्या चर्चा की?

1. आलेखीय चित्रण समझना सरल होता है।

2. (i) **दंड-आलेख** विभिन्न श्रेणियों की तुलना करने के लिए उपयुक्त होता है।

(ii) **वृत्त-चित्र या वृत्त-आलेख** एक संपूर्ण के विभिन्न भागों की तुलना करने के लिए उपयुक्त होता है।

(iii) **आयत-चित्र** लगातार अंतराल वाले आँकड़ों के लिए दंड-आलेख है।

3. **रेखा-आलेख**, समय के अंतरालों के साथ आँकड़ों में परिवर्तन दर्शाता है।

4. रेखा-आलेख जो एक पूर्ण अखंडित रेखा हो, एक **रैखिक आलेख** कहलाता है।

5. वर्गांकित कागज़ पर किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए हमें x-**निर्देशांक** तथा y-**निर्देशांक** चाहिए।

6. एक **स्वतंत्र चर** तथा **आश्रित चर** में संबंध एक आलेख द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अध्याय 16

संख्याओं के साथ खेलना

16.1 भूमिका

आप विभिन्न प्रकार की संख्याओं, जैसे – प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आप इनके अनेक रोचक गुणों का भी अध्ययन कर चुके हैं। कक्षा VI में, हमने गुणनखंडों और गुणजों को ज्ञात करने की खोज की तथा यह भी देखा कि इनके बीच में क्या संबंध ज्ञात किए जा सकते हैं। इस अध्याय में, हम संख्याओं के बारे में और अधिक विस्तृत जानकारी प्राप्त करेंगे। ये अवधारणाएँ विभाज्यता के नियमों की जाँच (tests of divisibility) के औचित्य को समझने में सहायता करेंगी।

16.2 व्यापक रूप में संख्याएँ

आइए एक संख्या 52 लें और उसे इस रूप में लिखें :

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

इसी प्रकार, संख्या 37 को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

व्यापक रूप में, अंकों a और b से बनी किसी दो अंकों की संख्या ab को इस रूप में लिखा जा सकता है : $ab = 10 \times a + b = 10a + b$

ba के बारे में क्या कहा जा सकता है? $ba = 10 \times b + a = 10b + a$

यहाँ ab का अर्थ $a \times b$ नहीं है।

आइए, अब संख्या 351 को लें। यह एक तीन अंकों की संख्या है। इस संख्या को भी इस रूप में लिखा जा सकता है:

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

इसी प्रकार, $497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

व्यापक रूप में, अंकों a, b और c से बनी किसी तीन अंकों की संख्या abc को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

इसी प्रकार,

$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$

इत्यादि।

प्रयास कीजिए

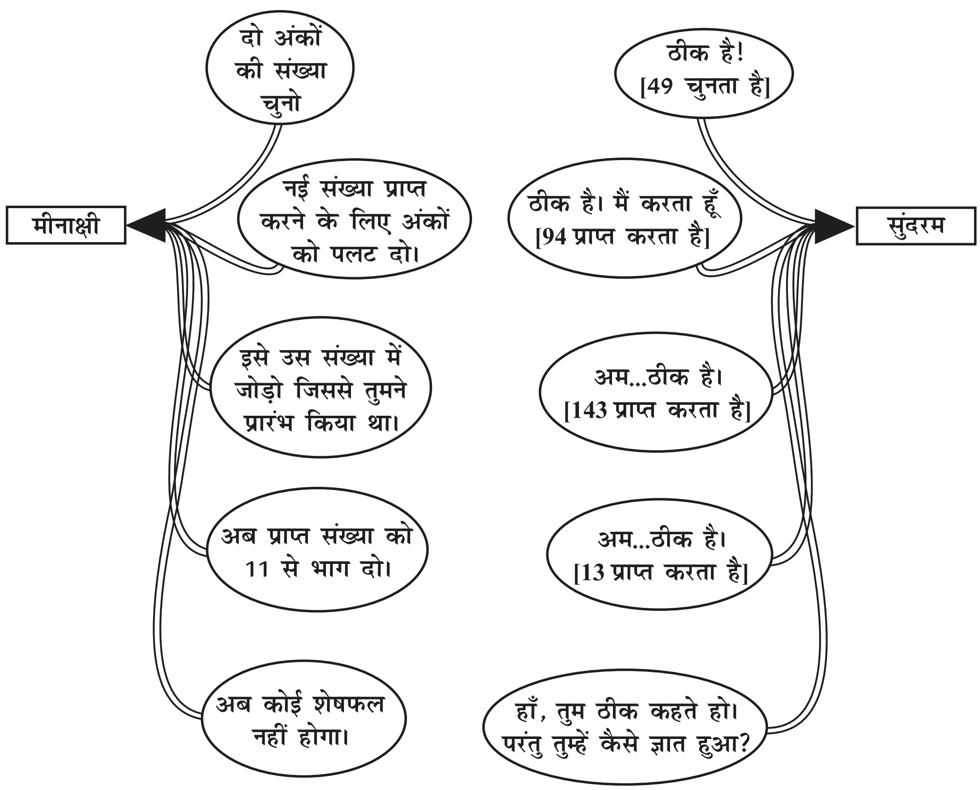
1. निम्नलिखित संख्याओं को व्यापक रूप में लिखिए :
   (i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302
2. निम्नलिखित को सामान्य रूप में लिखिए :
   (i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100a + 10c + b$

16.3 संख्याओं के साथ खेल

(i) **अंकों का पलटना—दो अंकों की संख्या**

मीनाक्षी ने सुंदरम से कोई दो अंकों वाली संख्या सोचने को कहा तथा यह भी कहा कि वह अब जैसा कहती जाए वह उसी प्रकार करता जाए। उनके वार्तालाप को निम्नलिखित आकृति में दर्शाया गया है। **आगे पढ़ने से पहले, कृपया आकृति का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।**

मीनाक्षी और सुंदरम में वार्तालाप : पहला दौर



यहाँ ऐसा होता है कि सुंदरम 49 चुनता है। अंक पलटने पर तब उसे संख्या 94 प्राप्त होती है। फिर वह इन संख्याओं को जोड़कर $49 + 94 = 143$ प्राप्त करता है। अंत में, उसने इस संख्या

को 11 से भाग देकर, $143 \div 11 = 13$ प्राप्त किया और कोई शेषफल नहीं रहा। यही वह बात है जो मीनाक्षी ने पहले से ही बताई (अर्थात् प्रागुक्ति की है।)।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि सुंदरम ने निम्नलिखित संख्याएँ चुनी होती, तो परिणाम क्या प्राप्त होते :

1. 27   2. 39   3. 64   4. 17

आइए, अब देखें कि क्या हम मीनाक्षी की 'चतुराई' "(trick)" को स्पष्ट कर सकते हैं।

मान लीजिए कि सुंदरम संख्या ab चुनता है, जो दो अंकों की संख्या $10a + b$ का संक्षिप्त रूप है। अंकों को पलटने पर, वह संख्या $ba = 10b + a$ प्राप्त करता है। इन दोनों संख्याओं को जोड़ने पर, वह प्राप्त करता है :

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11\,(a + b)$$

अत:, प्राप्त योग सदैव 11 का एक गुणज (multiple) है, जैसा कि मीनाक्षी ने दावा किया है।

ध्यान दीजिए कि यदि हम योग को 11 से भाग दें, तो भागफल $(a + b)$ प्राप्त होता है। यह भागफल चुनी गई संख्या ab के अंकों के योग के बराबर है।

आप उपरोक्त की जाँच कितनी भी दो अंकों की संख्याओं को लेकर कर सकते हैं।

मीनाक्षी और सुंदरम का खेल जारी रहता है!

मीनाक्षी : एक अन्य दो अंकों की संख्या के बारे में सोचो। परंतु मुझे वह संख्या नहीं बताना।

सुंदरम : ठीक है!

मीनाक्षी : अब अंकों को पलटो और बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाओ।

सुंदरम : मैंने घटा लिया है। अब आगे क्या करना है?

मीनाक्षी : अब अपने उत्तर को 9 से भाग दो। मेरा दावा है कि शेषफल शून्य होगा।

सुंदरम : हाँ, तुम सही कह रही हो। वास्तव में, यहाँ शेषफल शून्य ही है। परंतु इस बारे में मैं जानता हूँ कि तुम इस बारे में इतनी निश्चिंत क्यों हो!

वास्तव में, सुंदरम ने संख्या 29 सोची थी। इसके अंकों को पलटकर उसने संख्या 92 प्राप्त की। फिर उसने $92 - 29 = 63$ प्राप्त किया तथा अंत में उसने $63 \div 9$ ज्ञात किया, जो भागफल 7 देता है और शेषफल शून्य है।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि सुंदरम ने उपरोक्त के लिए निम्नलिखित संख्या चुनी होती, तो क्या परिणाम प्राप्त होते :

1. 17   2. 21   3. 96   4. 37

आइए देखें कि किस प्रकार सुंदरम मीनाक्षी की दूसरी चतुराई को स्पष्ट करता है। (अब वह ऐसा करने में आत्मविश्वास का अनुभव करने लगा है!)

मान लीजिए कि वह दो अंकों की संख्या $ab = 10a + b$ चुनता है। अंकों को पलटने पर, वह संख्या $ba = 10b + a$ प्राप्त करता है। अत: मीनाक्षी उसे बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाने को कहती है।

- यदि दहाई का अंक इकाई के अंक से बड़ा है (अर्थात् $a > b$ है), तो वह इस प्रकार घटाता है :

$$(10a + b) - (10a + b) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b)$$

- यदि इकाई का अंक दहाई के अंक से बड़ा है (अर्थात् $b > a$ है), तो वह इस प्रकार घटाता है :

$$(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a)$$

- निस्संदेह, जब $a = b$ है, तो वह 0 प्राप्त करता है।

प्रत्येक स्थिति में, परिणामी संख्या 9 से विभाज्य है। अत: शेषफल 0 है। ध्यान दीजिए कि यदि हम घटाने पर प्राप्त परिणामी संख्या को 9 से भाग दें, तो हमें $a > b$ या $a < b$ के अनुसार $(a - b)$ या $(b - a)$ प्राप्त होता है। आप कोई भी अन्य दो अंकों की संख्याएँ लेकर उपरोक्त तथ्य की जाँच कर सकते हैं।

(ii) अंकों का पलटना–तीन अंकों की संख्या

अब सुंदरम की बारी है कि वह कुछ चतुराइयों को दिखाए।

सुंदरम : एक तीन अंकों की कोई संख्या सोचो, परंतु इसके बारे में मुझे नहीं बताना।

मीनाक्षी : ठीक है!

सुंदरम : अब इन अंकों को उलटे क्रम में (पलटते हुए) लेकर, एक नयी संख्या बनाओ और बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाओ।

मीनाक्षी : ठीक है, मैंने घटा लिया है। आगे क्या करना है?

सुंदरम : अपने उत्तर को 99 से भाग दीजिए। मैं निश्चित रूप से कह सकता हूँ कि शेषफल शून्य होगा।

वास्तव में, मीनाक्षी ने तीन अंकों की संख्या 349 चुनी थी। इसलिए उसने प्राप्त किया :

- अंक पलटने पर संख्या : 943;
- अंतर : $943 - 349 = 594$;
- विभाजन : $594 \div 99 = 6$, शेषफल शून्य के साथ।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि मीनाक्षी ने निम्नलिखित संख्याएँ चुनी होतीं, तो परिणाम क्या प्राप्त होता? प्रत्येक स्थिति में, अंत में प्राप्त हुए भागफल का एक रिकॉर्ड (record) रखिए।

1. 132 2. 469 3. 737 4. 901

आइए देखें कि यह चतुराई कैसे कार्य करती है। मान लीजिए कि मीनाक्षी द्वारा चुनी गई तीन अंकों की संख्या $abc = 100a + 10b + c$ है।

अंकों को पलटने पर, वह संख्या $cba = 100c + 10b + a$ प्राप्त करती है। घटाने पर प्राप्त होगा :

- यदि $a > c$ है, तो संख्याओं का अंतर है,

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
$$= 99a - 99c = 99(a - c).$$

- यदि $c > a$ है, तो संख्याओं का अंतर है,

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a).$$

- निःसंदेह यदि, $a = c$ है तो अंतर 0 है।

प्रत्येक स्थिति में, परिणामी संख्या 99 से विभाज्य है। इसलिए, शेषफल 0 प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि भागफल $(c - a)$ होगा। आप तीन अंकों की अन्य संख्याएँ लेकर इसी तथ्य की जाँच कर सकते हैं।

(iii) दिए हुए तीन अंकों से तीन अंकों की संख्याएँ बनाना

अब एक बार फिर मीनाक्षी की बारी है।

मीनाक्षी : तीन अंकों की कोई संख्या सोचो।

सुंदरम : ठीक है, मैंने ऐसा कर लिया है।

मीनाक्षी : अब इस संख्या का प्रयोग दो अन्य तीन अंकों की संख्याएँ बनाने में इस प्रकार करो : यदि तुमने संख्या abc चुनी है, तो

- पहली संख्या cab (अर्थात् इकाई का अंक उस संख्या के सबसे बाएँ सिरे पर पहुँच गया) है।
- अन्य संख्या bca (अर्थात् सैकड़े का अंक उस संख्या के सबसे दाएँ सिरे पर पहुँच गया) है।

अब इन संख्याओं को जोड़ो। परिणामी संख्या को 37 से भाग दो। मेरा दावा है कि शेषफल शून्य होगा।

सुंदरम : हाँ, तुम सही हो।

वास्तव में, सुंदरम ने तीन अंकों की संख्या 237 सोची थी। जैसा मीनाक्षी ने करने को कहा था वैसा करने के पश्चात् उसने संख्याएँ 723 तथा 372 पाई। अतः उसने यह किया।

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 7 \\ +\quad 7\ 2\ 3 \\ +\quad 3\ 7\ 2 \\ \hline 1\ 3\ 3\ 2 \\ \hline \end{array}$$

तीनों अंकों 2, 3 और 7 का प्रयोग करके, तीन अंकों वाली सभी संभव संख्याएँ बनाइए तथा इनका योग ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या यह योग 37 से विभाज्य है। क्या यह संख्या abc के तीनों अंकों a, b और c से बनी सभी संख्याओं के योग के लिए सत्य है।

फिर उसने परिणामी संख्या 1332 को 37 से भाग दिया :

$$1332 \div 37 = 36, \quad \text{शेषफल शून्य के साथ।}$$

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि सुंदरम ने निम्नलिखित संख्याएँ सोची होती, तो परिणाम क्या प्राप्त होता :

1. 417 2. 632 3. 117 4. 937

क्या यह चतुराई सदैव कार्य करती है?
आइए देखें :

$$abc = 100a + 10b + c$$
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$
$$abc + cab + bca = 111(a + b + c)$$
$$= 37 \times 3(a + b + c), \text{ जो 37 से विभाज्य है।}$$

16.4 अंकों के लिए अक्षर

यहाँ हमारे सम्मुख कुछ पहेलियाँ हैं जहाँ एक अंकगणितीय प्रश्न में अंकों के स्थानों पर अक्षर होते हैं तथा समस्या यह ज्ञात करने की है कि कौन-सा अक्षर किस अंक को निरूपित करता है। अतः, यह एक प्रकार से कोड (code) को हल करने जैसी बात है। प्राय: हम योग और गुणन की समस्याओं तक सीमित रहेंगे। ऐसी पहेलियों को हल करते समय अपनाए जाने वाले दो नियम ये हैं :

1. *पहेली में, प्रत्येक अक्षर केवल एक ही अंक को प्रदर्शित करना चाहिए। एक अंक केवल एक ही अक्षर से प्रदर्शित किया जाना चाहिए।*
2. *एक संख्या का पहला अंक शून्य नहीं हो सकता। इस प्रकार, हम संख्या तिरसठ को '063' या '0063' न लिखकर '63' लिखते हैं।*

एक नियम जिसका हमें पालन करना है वह यह है कि एक पहेली का केवल एक ही उत्तर होना चाहिए।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित योग में Q ज्ञात कीजिए :

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ Q \\ +\ 1\ Q\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

हल : यहाँ केवल एक अक्षर Q है, जिसका हमें मान ज्ञात करना है।

इकाई के स्तंभ में, उपरोक्त योग का अध्ययन कीजिए। Q + 3 से हमें 1 प्राप्त होता है। अर्थात् एक संख्या जिसकी इकाई का अंक 1 है।

ऐसा होने के लिए, Q अंक 8 होना चाहिए। अत: इस पहेली को नीचे दर्शाए अनुसार हल किया जा सकता है :

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 8 \\ +\ 1\ 8\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात् Q = 8 है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित योग में, A और B ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} A \\ +\ A \\ +\ A \\ \hline B\ A \\ \hline \end{array}$$

हल : इसमें दो अक्षर A और B हैं, जिनके मान ज्ञात किए जाने हैं।

इकाई के स्तंभ में योग का अध्ययन कीजिए : तीन A का योग एक ऐसी संख्या है जिसकी इकाई का अंक A है। अत: दो A का योग एक ऐसी संख्या होनी चाहिए जिसकी इकाई का अंक 0 हो। यह तभी होगा जब $A = 0$ हो या $A = 5$ हो।

यदि $A = 0$ है, तो योग $0 + 0 + 0 = 0$ होगा, जिससे $B = 0$ हो जाएगा। हम इसे नहीं चाहेंगे (क्योंकि इससे $A = B$ हो जाएगा और BA के दहाई का अंक भी 0 हो जाएगा)। इसलिए हम इसे छोड़ देते हैं। अत: $A = 5$ है।

इसलिए, यह पहेली नीचे दर्शाए अनुसार हल होगी :

$$\begin{array}{rr} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात्, $A = 5$ और $B = 1$ हो।

उदाहरण 3 : A और B को ज्ञात कीजिए :

$$\begin{array}{rrr} & B & A \\ \times & B & 3 \\ \hline 5 & 7 & A \\ \hline \end{array}$$

हल : यहाँ भी दो अक्षर A और B हैं, जिनके मान ज्ञात किए जाने हैं। क्योंकि $3 \times A$ के इकाई का अंक A है, इसलिए या तो $A = 0$ है या $A = 5$ है।

अब B को देखिए। यदि $B = 1$ हो, तो $BA \times B3$ का मान *अधिक से अधिक* 19×19, अर्थात् 361 होगा। परंतु यहाँ गुणनफल 57A है, जो 500 से अधिक है। अत: $B = 1$ नहीं हो सकता।

यदि $B = 3$ हो, तो $BA \times B3$ का गुणनफल 30×30 से अधिक होगा, अर्थात् यह 900 से अधिक होगा। परंतु 57A का मान 600 से कम है। अत: $B = 3$ नहीं हो सकता।

उपरोक्त दोनों तथ्यों को दृष्टिगत रखते हुए, B का मान केवल 2 ही हो सकता है। अत: दिया हुआ गुणन या तो 20×23 होगा या 25×23 होगा।

पहली संभावना नहीं हो सकती, क्योंकि $20 \times 23 = 460$ है। परंतु दूसरी संभावना सही है, क्योंकि $25 \times 23 = 575$ है।

अत: $A = 5$ और $B = 2$ है।

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 5 & 7 & 5 \\ \hline \end{array}$$

इन्हें कीजिए

दो अंकों की एक संख्या ab लिखिए तथा इसके अंकों को पलटने पर प्राप्त संख्या ba लिखिए। इनका योग ज्ञात कीजिए। मान लीजिए यह योग एक तीन अंकों की संख्या dad है।

अर्थात्
$$ab + ba = dad$$
$$(10a + b) + (10b + a) = dad$$
$$11(a + b) = dad$$

योग $(a + b)$ संख्या 18 से अधिक नहीं हो सकता (क्यों?)। क्या dad, 11 का एक गुणज है? क्या dad, 198 से कम है? 198 तक तीन अंकों की ऐसी सभी संख्याएँ लिखिए, जो 11 की गुणज हैं। a और d के मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 16.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए तथा संबद्ध चरणों के लिए कारण भी दीजिए :

1.
$$\begin{array}{r} 3\ A \\ +\ 2\ 5 \\ \hline B\ 2 \\ \hline \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 4\ A \\ +\ 9\ 8 \\ \hline C\ B\ 3 \\ \hline \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 1\ A \\ \times\ A \\ \hline 9\ A \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\ 3\ 7 \\ \hline 6\ A \\ \hline \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 3 \\ \hline C\ A\ B \\ \hline \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 5 \\ \hline C\ A\ B \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 6 \\ \hline B\ B\ B \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} A\ 1 \\ +\ 1\ B \\ \hline B\ 0 \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} 2\ A\ B \\ +\ A\ B\ 1 \\ \hline B\ 1\ 8 \\ \hline \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 1\ 2\ A \\ +\ 6\ A\ B \\ \hline A\ 0\ 9 \\ \hline \end{array}$$

16.5 विभाज्यता की जाँच

कक्षा VI में आप यह पढ़ चुके हैं कि निम्नलिखित भाजकों से किस प्रकार विभाज्यता (divisibility) की जाँच की जाती है :

$$10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11$$

आपको इनकी जाँच करने के नियम सरल लगे होंगे, परंतु साथ ही आपने यह भी आश्चर्य किया होगा कि ये किस प्रकार कार्य करते हैं। अब हम इस अध्याय में, इनके 'क्यों' वाले पहलू पर चर्चा करेंगे।

16.5.1 10 द्वारा विभाज्यता

यह निश्चय ही सभी में से सबसे सरल जाँच है। हम पहले 10 के कुछ गुणजों को देखते हैं :

$$10, 20, 30, 40, 50, 60, \ldots,$$

इसके साथ 10 के कुछ अगुणजों (non-multiples) को देखिए 13, 27, 32, 48, 55, 69, ... इन संख्याओं से हमें यह पता चलता है कि ऐसी संख्याएँ जिनकी इकाई का अंक 0 है, 10 के गुणज हैं तथा वे संख्याएँ जिनकी इकाई का अंक 0 नहीं है, 10 के गुणज नहीं हैं। इससे हमें 10 द्वारा विभाज्यता की जाँच का एक नियम प्राप्त होता है।

निस्संदेह, हमें केवल जाँच का नियम देकर ही नहीं रुक जाना चाहिए। हमें यह भी स्पष्ट करना चाहिए कि यह जाँच का नियम किस तरह कार्य करता है। ऐसा करना कठिन नहीं है। हमें केवल स्थानीय मान (place value) के नियमों को याद रखना है।

कोई संख्या $\ldots cba$ लीजिए। यह निम्नलिखित संख्या का संक्षिप्त रूप है :

$$\ldots + 100c + 10b + a$$

यहाँ a इकाई का अंक है, b दहाई का अंक है, c सैकड़े का अंक है इत्यादि। यहाँ तीन बिंदु (...) ये दर्शाते हैं कि c के बाईं ओर और अंक हो सकते हैं।

क्योंकि 10, 100, ... 10 से विभाज्य हैं, इसलिए $10b$, $100c$, ... भी 10 से विभाज्य होंगे। जहाँ तक संख्या a का प्रश्न है, यदि दी हुई संख्या 10 से विभाज्य है, तो a को भी 10 से विभाज्य होना चाहिए। यह तभी संभव है, जब $a = 0$ है।

अत: कोई संख्या 10 से विभाज्य होती है, यदि उसका इकाई के स्थान पर 0 है।

16.5.2 5 से विभाज्यता

5 के गुणजों को देखिए : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...

हम देखते हैं कि इकाई के अंक 5 और 0 एक संख्या छोड़कर आ रहे हैं तथा इनके अतिरिक्त इकाई के स्थान पर कोई अन्य अंक नहीं आ रहा है।

अत: हमें 5 द्वारा विभाज्यता का यह नियम प्राप्त होता है : *यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 5 या 0 है, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती है।*

आइए, इस नियम को स्पष्ट करें। किसी संख्या $\ldots cba$ को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\ldots + 100c + 10b + a$$

चूँकि 10, 100, ... 10 से विभाज्य हैं, इसलिए $10b$, $100b$, ... भी 10 से विभाज्य होंगे तथा यही बाद में 5 से भी विभाज्य होंगे, क्योंकि $10 = 5 \times 2$ है। जहाँ तक संख्या a का प्रश्न है, यदि संख्या 5 से विभाज्य है, तो इसे भी 5 से विभाज्य होना चाहिए। अत: a को या तो 0 या 5 होना चाहिए।

प्रयास कीजिए

(पहला प्रश्न आपकी सहायता के लिए किया हुआ है।)

1. यदि विभाजन $N \div 5$ से शेषफल 3 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
   (इकाई के अंक को 5 से भाग देने पर शेषफल 3 आना चाहिए। अत: इकाई का अंक 3 या 8 होगा।)
2. यदि विभाजन $N \div 5$ से शेषफल 1 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
3. यदि विभाजन $N \div 5$ से शेषफल 4 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?

16.5.3 2 से विभाज्यता

ये सभी सम संख्याएँ हैं : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ... ,
तथा ये विषम संख्याएँ हैं : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... ,
हम देखते हैं कि एक प्राकृत संख्या सम होती है, यदि इसकी इकाई का अंक हो,

2, 4, 6, 8 या 0

एक संख्या विषम होती है, यदि इसकी इकाई का अंक हो, 1, 3, 5, 7 या 9

कक्षा VI में सीखे गए 2 की विभाज्यता की जाँच के नियम को याद कीजिए। यह नियम इस प्रकार है :

यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो तो वह संख्या 2 से विभाज्य होती है।

इसके लिए स्पष्टीकरण इस प्रकार है :

किसी भी संख्या $...cba$ को $... + 100c + 10b + a$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसके पहले दो पद $100c$ और $10b$ संख्या 2 से विभाज्य हैं, क्योंकि 100 और 10 संख्या 2 से विभाज्य हैं। जहाँ तक a का प्रश्न है, यदि दी हुई संख्या 2 से विभाज्य है, तो इसे भी 2 से विभाज्य होना चाहिए। यह तभी संभव है, जब $a = 0, 2, 4, 6$ या 8 हो।

प्रयास कीजिए

(पहला-प्रश्न आपकी सहायता के लिए किया हुआ है।)

1. यदि विभाजन $N \div 2$ से शेषफल 1 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
   (N विषम है। इसलिए इसकी इकाई का अंक विषम होगा। अत: N की इकाई का अंक 1, 3, 5, 7 या 9 होगा।)
2. यदि विभाजन $N \div 2$ से कोई शेष प्राप्त नहीं होता (अर्थात् शेषफल 0 है), तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
3. मान लीजिए कि विभाजन $N \div 5$ से शेषफल 4 और विभाजन $N \div 2$ से शेषफल 1 प्राप्त होता है। N की इकाई का अंक क्या होना चाहिए?

16.5.4 9 और 3 से विभाज्यता

अब तक ज्ञात किए गए विभाज्यता की जाँच के तीन नियमों को ध्यानपूर्वक देखिए, जो 10, 5 और 2 के विभाजन की जाँच के लिए थे। हम इनमें एक समान बात देख रहे हैं : इनमें दी हुई संख्या की केवल इकाई के अंक का ही प्रयोग होता है तथा अन्य अंकों से इन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इस प्रकार, विभाज्यता का निर्णय केवल इकाई के अंक से ही हो जाता है। 10, 5 और 2 संख्या 10 के भाजक (division) हैं, जो हमारी स्थानीय मान पद्धति में एक महत्वपूर्ण संख्या है।

परंतु 9 से विभाज्यता की जाँच में ये नियम नहीं चलेंगे। आइए, कोई संख्या, मान लीजिए 3573 लें। इसका प्रसारित रूप $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$ है।

इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$$

$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \qquad \ldots (1)$$

हम देखते हैं कि संख्या 9 या 3 से तभी विभाज्य होगी, यदि $(3 + 5 + 7 + 3)$ संख्या 9 या 3 से विभाज्य हो।

हम देखते हैं कि $(3 + 5 + 7 + 3) = 18$ संख्या 9 से विभाज्य है और 3 से भी विभाज्य है। अत: संख्या 3573 संख्याओं 9 और 3 दोनों से विभाज्य है।

आइए, अब संख्या 3576 पर विचार करें। ऊपर की ही तरह, हम प्राप्त करते हैं :

$$3576 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6$$

$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6)$$

क्योंकि $(3 + 5 + 7 + 6) = 21$, 9 से विभाज्य नहीं है, परंतु 3 से विभाज्य है, इसलिए 3576, संख्या 9 से विभाज्य नहीं है। परंतु यह 3 से विभाज्य है। अत:,

(i) एक संख्या N संख्या 9 से विभाज्य होती है, यदि इसके अंकों का योग 9 से विभाज्य हो। अन्यथा वह 9 से विभाज्य नहीं होती है।

(ii) एक संख्या N संख्या 3 से विभाज्य होती है, यदि इसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो। अन्यथा यह 3 से विभाज्य नहीं होगी।

यदि संख्या cba है, तो $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underbrace{9(11c + b)}_{\text{3 और 9 से विभाज्य}} + (a + b + c)$$

अत: 9 (या 3) की विभाज्यता तभी संभव है, जब $(a \times b \times c)$ 9 (या 3) से विभाज्य हो।

उदाहरण 4 : 21436587 की 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 21436587 के अंकों का योग $= 2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36$

यह योग 9 से विभाज्य है। $(36 \div 9 = 4)$

अत: हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि 21436587 संख्या 9 से विभाज्य है। हम दोबारा जाँच भी कर सकते हैं। $\frac{21436587}{9} = 2381843$ (विभाज्य पूर्ण है)

उदाहरण 5 : 152875 की 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 152875 के अंकों का योग $1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28$ है। यह संख्या 9 से विभाज्य नहीं है। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 152875 संख्या 9 से विभाज्य नहीं है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं की 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए :

1. 108   2. 616   3. 294   4. 432   5. 927

उदाहरण 6 : यदि तीन अंकों की संख्या $24x$, 9 से विभाज्य है, तो x का मान क्या है?

हल : क्योंकि $24x$, संख्या 9 से विभाज्य है, इसलिए इसके अंकों का योग $2 + 4 + x$, 9 से विभाज्य होना चाहिए। अर्थात् $6 + x$, a से विभाज्य होना चाहिए।

यह तभी संभव है, जब $6 + x$ या तो 9 हो या 18 हो। क्योंकि x एक अंक है, इसलिए $6 + x = 9$ होगा। अत:, $x = 3$ है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. आप देख चुके हैं कि 450, 10 से विभाज्य है। यह 2 और 5 से भी विभाज्य है, जो 10 के गुणनखंड हैं। इसी प्रकार, संख्या 135, 9 से विभाज्य है। यह 3 से भी विभाज्य है, जो 9 का एक गुणनखंड है।

   क्या आप कह सकते हैं कि यदि कोई संख्या किसी संख्या m से विभाज्य हो, तो वह m के प्रत्येक गुणनखंड से भी विभाज्य होगी?

2. (i) एक तीन अंकों की संख्या abc को $100a + 10b + c$ के रूप में लिखिए। अब

$$100a + 10b + c = 99a + 11b + (a - b + c)$$
$$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$

   यदि संख्या abc, 11 से विभाज्य है, तो आप $(a - b + c)$ के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या यह आवश्यक है कि $(a + c - b)$, 11 से विभाज्य हो?

   (ii) एक चार अंकों की संख्या $abcd$ को इस प्रकार लिखिए :

$$1000a + 100b + 10c + d$$
$$= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$$
$$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$

यदि संख्या $abcd$, 11 से विभाज्य है, तो $(b + d) - (a + c)$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(iii) उपरोक्त (i) और (ii) से, क्या आप कह सकते हैं कि कोई संख्या 11 से विभाज्य होगी, यदि इसके विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य होगा?

उदाहरण 7 : 2146587 की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 2146587 के अंकों का योग $2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33$ है। जो स्पष्टत: 3 से विभाज्य है $(33 \div 3 = 11)$। अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 2146587, संख्या 3 से विभाज्य है।

उदाहरण 8 : 15287 की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 15287 के अंकों का योग $= 1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23$ यह 3 से विभाज्य नहीं है। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 15287 संख्या 3 से विभाज्य नहीं है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

1. 108   2. 616   3. 294   4. 432   5. 927

प्रश्नावली 16.2

1. यदि $21y5$, 9 का एक गुणज है, जहाँ y एक अंक है, तो y का मान क्या है?
2. यदि $31z5$, 9 का एक गुणज है, जहाँ z एक अंक है, तो z का मान क्या है? आप देखेंगे कि इसके दो उत्तर हैं। ऐसा क्यों है?
3. यदि $24x$, 3 का एक गुणज है, जहाँ x एक अंक है, तो x का मान क्या है?

   (क्योंकि $24x$, 3 का एक गुणज है, इसलिए इसके अंकों का योग $6 + x$, 3 का एक गुणज हैं। अर्थात् $6 + x$ निम्नलिखित में कोई एक संख्या होगी,

   $$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$$

   परंतु चूँकि x एक अंक है, इसलिए $6 + x = 6$ या $6 + x = 9$ या $6 + x = 12$ या $6 + x = 15$ हो सकता है। अत:, $x = 0$ या 3 या 6 या 9 हो सकता है। इसलिए x का मान इन चारों विभिन्न मानों में से कोई एक हो सकता है।
4. यदि $31z5$, 3 का एक गुणज है, जहाँ z एक अंक है, तो z का मान क्या हो सकता है?

हमने क्या चर्चा की?

1. संख्याओं को व्यापक रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार, दो अंकों की संख्या ab को $10a + b$ लिखा जा सकता है।
2. संख्याओं के व्यापक रूप पहेलियों या संख्या खेलों को हल करने में सहायक होते हैं।
3. संख्याओं की 10, 5, 2, 9 या 3 द्वारा विभाज्यता की तर्कसंगतता प्रदान की जा सकती है, यदि उन्हें व्यापक रूप में लिखा जाए।